Manhattan Editores

pre SAN MARCOS

CICLO ORDINARIO

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

Ejercicios : 2020-I , 2019-II , 2019-I , 2018-II

INDICE

Semana 01
Teoría 005
Ejercicios
2020-1 007
2019-2 015
2019-1 021
2018-2 029
Semana 02
Teoría 039
Ejercicios
2020-1 041
2019-2 051
2019-1 061
2018-2 073
Semana 03
Teoría 085
Ejercicios
2020-1 086
2019-2 097
2019-1 107
2018-2 117
Semana 04
Teoría 128
Ejercicios
2020-1 131
2019-2 143
2019-1 154
2018-2 164
Semana 05
Teoría 175
Ejercicios
2020-1 177
2019-2 188
2019-1 200
2018-2 210
Semana 06
Teoría 221
Ejercicios
2020-1 223
2019-2 235
2019-1 246
2018-2 254
Semana 07
Teoría 265
Ejercicios
2020-1 269
2019-2 278
2019-1 286
2018-2 294
Semana 08
Teoría 303
Ejercicios
2020-1 304
2019-2 314
2019-1 323
2018-2 333
Semana 09
Teoría 344
Ejercicios
2020-1 346
2019-2 356
2019-1 363
2018-2 374
Semana 10
Teoría 386
Ejercicios
2020-1 387
2019-2 400
2019-1 410
2018-2 419

INDICE

Semana 11
Teoría 428
Ejercicios
2020-1 430
2019-2 439
2019-1 447
2018-2 454
Semana 12
Teoría 464
Ejercicios
2020-1 467
2019-2 476
2019-1 485
2018-2 495
Semana 13
Teoría 506
Ejercicios
2020-1 508
2019-2 518
2019-1 531
2018-2 547
Semana 14
Teoría 559
Ejercicios
2020-1 562
2019-2 572
2019-1 584
2018-2 596
Semana 15
Teoría 608
Ejercicios
2020-1 610
2019-2 622
2019-1 631
2018-2 639
Semana 16
Teoría 647
Ejercicios
2020-1 650
2019-2 662
2019-1 671
2018-2 679
Semana 17
Teoría 687
Ejercicios
2020-1 689
2019-2 698
2019-1 706
2018-2 714
Semana 18
Teoría 724
Ejercicios
2020-1 726
2019-2 734
2019-1 745
2018-2 752

twitter.com/calapenshko

PNHO BOOK

twitter.com/calapenshko

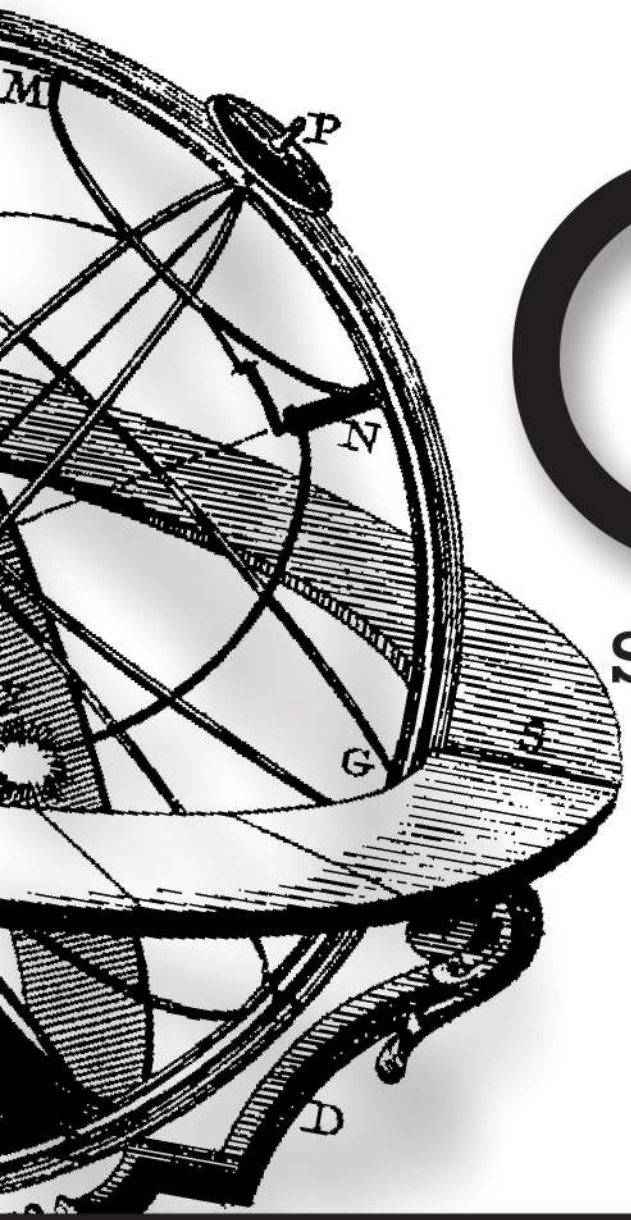
TRIGONOMETRÍA

SEM	CONTENIDO
1.	Ángulo trigonométrico. Ángulos trigonométricos especiales. Sistemas de medidas angulares: sexagesimal, centesimal y radial. Relación entre sistemas.
2.	Sector circular. Longitud de arco. Área de un sector circular. Área de un trapecio circular. Aplicación de longitud de arco: Número de vueltas, Poleas y engranajes.
3.	Razones trigonométricas de ángulos agudos. Teorema de Pitágoras. Definiciones de las razones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos. Área de una región triangular.
4.	Razones trigonométricas de ángulos agudos. Razones trigonométricas de ángulos notables: 30º, 45º, 60º, 15º, 75º, aproximación a 37º, 53º, 16º y 74º. Razones trigonométricas de ángulos complementarios. Razones trigonométricas recíprocas.
5.	Razones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud: ángulos en posición normal. Razones trigonométricas de ángulos en posición normal. Signo de las razones trigonométricas. Ángulos coterminales y propiedades. Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales.
6.	Reducción de ángulos al primer cuadrante. Razones trigonométricas de ángulos positivos menores que una vuelta. Razones trigonométricas de ángulos mayores de una vuelta. Razones trigonométricas de ángulos negativos.
7.	Identidades trigonométricas. Identidades trigonométricas, pitagóricas, recíprocas y por cociente. Identidades trigonométricas auxiliares.
8.	Razones trigonométricas de ángulos compuestos. Razones trigonométricas de la suma y la diferencia de ángulos. Identidades auxiliares.
9.	Razones trigonométricas de ángulos múltiples. Razones trigonométricas del ángulo doble. Razones trigonométricas del ángulo mitad. Identidades especiales. Razones trigonométricas del ángulo triple. Ejercicios combinados de ángulos múltiples.
10.	Transformaciones trigonométricas Transformaciones de suma o diferencia a producto. Transformaciones de producto a suma o diferencia.
11.	Ecuaciones trigonométricas. Ecuaciones trigonométricas elementales y no elementales.
12.	Resolución de triángulos oblicuángulos. Ley de senos. Ley de cosenos. Ley de proyecciones. Ley de tangentes. Ángulos verticales: Ángulo de elevación y depresión. Ángulos horizontales: Puntos cardinales y rumbos.
13.	Circunferencia trigonométrica. Ecuación de la circunferencia. Arcos dirigidos. Líneas trigonométricas: seno y coseno. Representaciones gráficas de las líneas de seno y coseno.
14.	Líneas trigonométricas: tangente, contangente, secante y cosecante. Representaciones gráficas de las líneas tangentes, cotangente, secante y cosecante.
15.	Funciones trigonométricas. Funciones trigonométricas seno y coseno. Dominio y rango. Aplicaciones de las funciones seno y coseno. Amplitud, período y frecuencia.
16.	Funciones trigonométricas tangente, cotangente, secante y cosecante. Dominio, rango y gráfica. Aplicaciones.
17.	Funciones trigonométricas inversas. Función arcoseno (arcsen), función arcocoseno (arccos) y función arcotangente (arctan). Dominio, rango y gráfica. Aplicaciones.
18.	Función arcocotangente (arccot), función arcosecante (arcsec) y función arcocosecante (arccsc). Dominio, rango y gráfica. Aplicaciones.

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS

twitter.com/calapenshko



01

semana

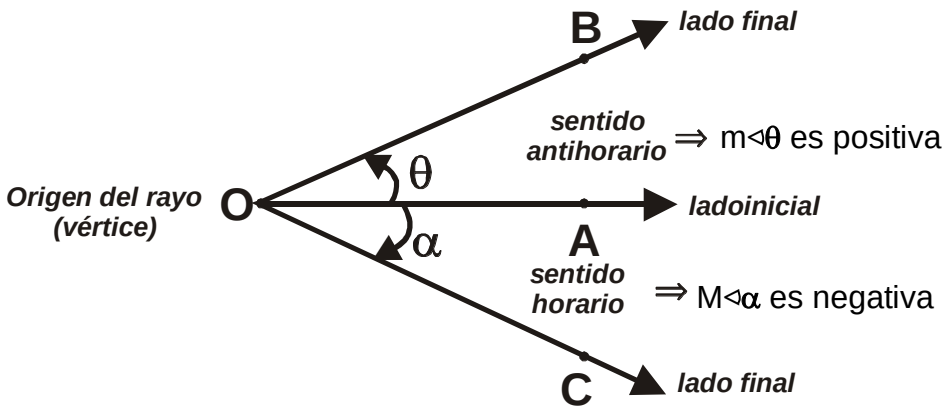
CALAPENSHKO

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

Ángulo Trigonométrico



Sistemas de Medición Angular

1. **<u>Sistema Sexagesimal o Inglés (S)</u>** Medida del ángulo de 1 vuelta = 360º

Equivalencias:

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$
$$1° = 3600''$$

2. **<u>Sistema Centesimal o Francés (C)</u>** Medida del ángulo de 1 vuelta = 400^g

Equivalencias:

$$1^g = 100^m$$
$$1^m = 100^s$$
$$1^g = 10000^s$$

3. <u>Sistema Radial o Circular (R)</u> Medida del ángulo de 1 vuelta = 2π rad

Relación entre Sistemas

1 vuelta = 360° = 400^g = 2 π rad

<u>Equivalencias fundamentales:</u>

π rad = 180°

π rad = 200^g

9° = 10^g

<u>Fórmula de conversión:</u>

Notación:

S es el número de grados sexagesimales
C es el número de grados centesimales
R es el número de radianes

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = k}$$

S = 180 k
C = 200 k
R = π k

equivalentemente:

$$\boxed{\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{R}{\pi/20} = t}$$

S = 9 t

C = 10 t

R = $\frac{\pi t}{20}$

Trigonometría

EJERCICIOS

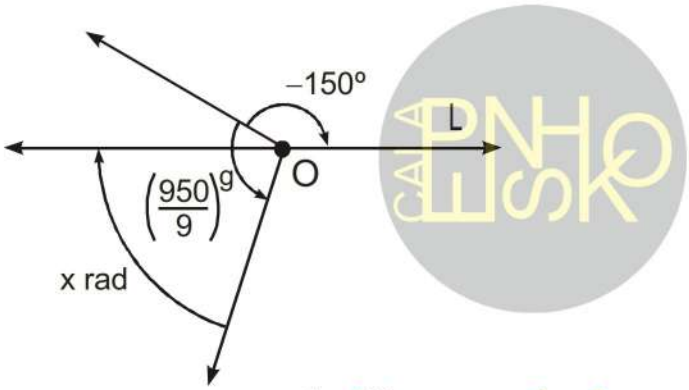
1. Con los datos de la figura, halle x.

A) $\frac{13\pi}{36}$

B) $-\frac{13\pi}{36}$

C) $\frac{15\pi}{36}$

D) $-\frac{15\pi}{36}$



twitter.com/calapenshko

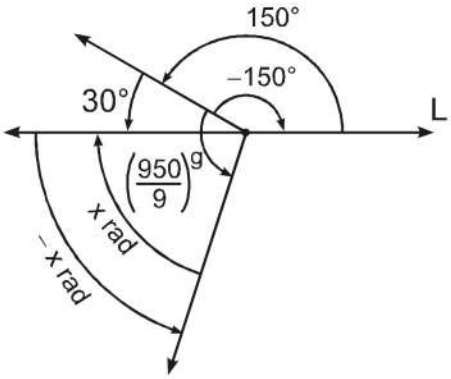
Solución:

- $\left(\frac{950}{9}\right)^g = 30° - x \text{ rad}$

$$\frac{95\cancel{0}}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{10\cancel{}} = 30 - x \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\frac{180x}{\pi} = -65$$

$$x = -\frac{13\pi}{36}$$



Rpta: B

2. Si un taxista que va manejando su auto, al acercarse a una curva, gira el volante un ángulo de 40°30' y, luego regresa el volante a su posición inicial girando $-\frac{a\pi}{b}$ rad; determine la medida de $\left(31\left(\frac{b+a}{b-a}\right)+1\right)^g$ en radianes.

A) $\frac{\pi}{4}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{2}$ rad D) $\frac{\pi}{6}$ rad

Solución:

Se deduce que

$$\frac{a\pi}{b}\text{ rad} <> 40° + 30' \times \frac{1°}{60'} = \frac{81°}{2} \times \frac{\pi}{180°} = \frac{9\pi}{40}\text{ rad} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{40}{9}$$

$$\left(31\left(\frac{b+a}{b-a}\right)+1\right)^g = 50^g \times \frac{\pi}{200^g} = \frac{\pi}{4}\text{ rad}$$

Rpta.: A

3. La suma de las medidas de dos ángulos es 29°7′30″. Si uno de ellos mide $\frac{\pi}{8}$ rad, halle la medida del otro en el sistema sexagesimal.

A) 6°25′45″ B) 5°37′30″ C) 4°30′37″ D) 6°37′30″

Solución:

$\alpha + \beta = 29°7'30''$

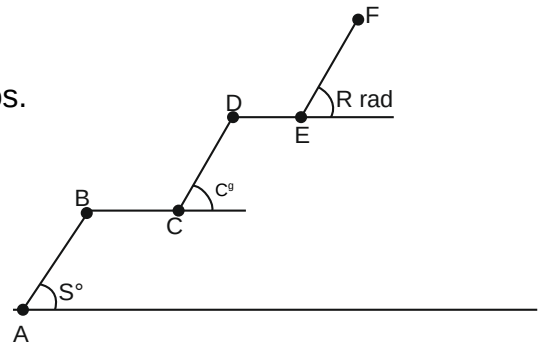
$\beta = \frac{\pi\text{ rad}}{8} \times \frac{180°}{\pi\text{ rad}} = 22°30'$

$\alpha = 29°7'30'' - 22°30' = 6°37'30''$

Rpta.: D

4. Se muestra la vista lateral de la maqueta de una escalera eléctrica del centro comercial Mi San Marcos, tal que $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$ son paralelos a la horizontal y $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$. Si $\frac{C}{\sqrt{10-S}} = 1 + \frac{S}{\sqrt{C-9}}$, halle el ángulo de inclinación de $\overline{EF}$ con respecto a la horizontal.

Además, se sabe que S y C son números enteros.



A) $\frac{\pi}{3}$rad B) $\frac{\pi}{20}$rad

C) $\frac{\pi}{10}$rad D) $\frac{\pi}{6}$rad

Solución:

Se deduce que

$10 - S > 0 \Rightarrow 9k < 10 \Rightarrow k < \frac{10}{9}$

$C - 9 > 0 \Rightarrow 10K > 9 \Rightarrow k > \frac{9}{10}$

SyC enteros $\Rightarrow$ k=1 $\Rightarrow S = 9,\ C = 10$

Satisfacen la ec:

$$\frac{C}{\sqrt{10-S}}=1+\frac{S}{\sqrt{C-9}}$$

$$\Rightarrow R\text{rad}=\frac{\pi}{20}\text{rad}$$

Rpta.: B

5. Para abrir la bóveda de un banco, se debe girar la palanca en un ángulo de medida α (en sentido antihorario). Si $\alpha=S^{\circ}=C^{g}=R\text{rad}$ y $\frac{\pi S}{C^2-S^2}-\frac{\pi C}{S^2-C^2}=5R$, halle la medida del ángulo en el sistema radial.

A) $\frac{\pi}{4}\text{rad}$ B) $\frac{2\pi}{5}\text{rad}$ C) $\frac{\pi}{10}\text{rad}$ D) $\frac{6\pi}{25}\text{rad}$

Solución:

$$\frac{\pi S}{C^2-S^2}-\frac{\pi C}{S^2-C^2}=5R$$

$$\frac{\pi S}{C^2-S^2}+\frac{\pi C}{C^2-S^2}=5R$$

$$\frac{\pi(C+S)}{(C+S)(C-S)}=5R$$

$$\frac{\pi}{k}=\frac{5\pi k}{20} \quad \Rightarrow \quad k=2 \quad \Rightarrow \quad R\text{rad}=\frac{\pi\ \text{rad}}{10}$$

Rpta.: C

6. Si a y b representan el número de minutos sexagesimales y centesimales de un mismo ángulo respectivamente, además, $b-a=368$; halle la medida de dicho ángulo.

A) $\frac{\pi}{25}\text{rad}$ B) $\frac{\pi}{20}\text{rad}$ C) $\frac{\pi}{15}\text{rad}$ D) $\frac{\pi\text{rad}}{50}$

Solución:

$$a'=b^{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^{\circ}}{60}=\frac{b^{g}}{100}\left(\frac{9^{\circ}}{10^{g}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{27}{50} \quad \Rightarrow \quad b=50n\ ,a=27n$$

Además, por dato se tiene que:

$50n - 27n = 368 \quad \Rightarrow \quad n = 16$

$$a' = 27.16'\left(\frac{1°}{60'}\right)\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180}\right) = \frac{\pi \text{ rad}}{25}.$$

Rpta.: A

7. Un militar crea un nuevo sistema de medición angular "milésima artillera", tal que su unidad $(1)^{00}$ resulta de dividir en 6400 partes iguales el ángulo de una vuelta. Si los ángulos α y βmiden 1,8° y $1{,}25^g$ respectivamente; halle la medida de $\alpha + \beta$ en este nuevo sistema.

A) 52^{00} B) 20^{00} C) 32^{00} D) 62^{00}

<u>Solución</u>:

$$1^{\circ\circ} = \frac{360°}{6400} = \frac{400^g}{6400}$$

$$1^{\circ\circ} = \frac{9°}{160} = \frac{1^g}{16}$$

$$\alpha + \beta = 1{,}8°\left(\frac{160^{\circ\circ}}{9°}\right) + 1{,}25^g\left(\frac{16^{\circ\circ}}{1^g}\right) = 32^{\circ\circ} + 20^{\circ\circ} = 52^{\circ\circ}$$

Rpta.: A

8. El siguiente gráfico muestra los resultados sobre los niveles de consumo de cuatro productos integrales A, B, C y D.

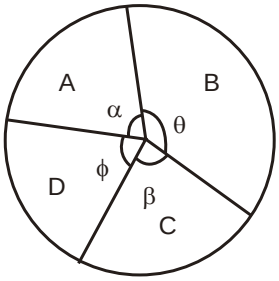
Si $\alpha = \frac{7\pi}{18}\text{rad}$, $\theta = \left(\frac{1700}{9}\right)^g$ y $\beta = 83°59^{\prime}60^{\prime\prime}$, determine el porcentaje de consumo del producto integral que tiene menor demanda.

A) 7%

B) 8%

C) 9%

D) 10%



Solución:

twitter.com/calapenshko

$$\alpha = \frac{7\pi}{18}\text{rad} = \frac{7(180°)}{18} = 70°$$

$$\theta = \left(\frac{1700}{9}\right)^g \cdot \frac{9°}{10^g} = 170°$$

$$\beta = 83°59^{\prime}60^{\prime\prime} = 84°$$

Si $\alpha + \beta + \theta + \phi = 360°$, entonces $70° + 170° + 84° + \phi = 360° \Rightarrow \phi = 36°$

Se observa que el producto integral D tiene menor demanda.

Si :

$$\left.\begin{array}{lcl} 360° & \rightarrow & 100\% \\ 36° & \rightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{36(100\%)}{360} = 10\%.$$

Rpta.: D

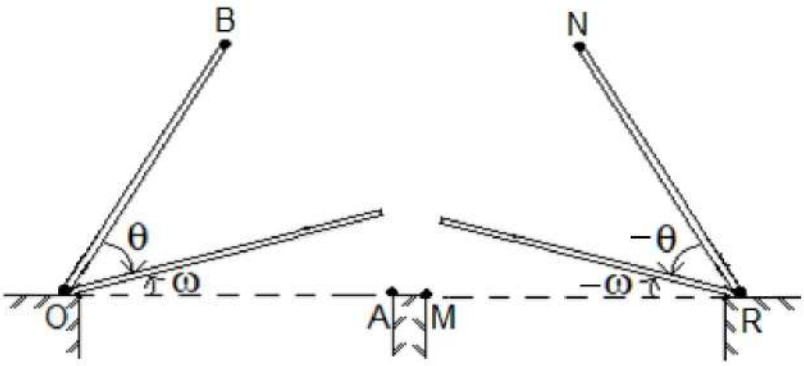
9. Se muestra la vista lateral de un puente levadizo doble. Por la mañana, sus hojas se levantan desde $\overline{OA}$ hasta $\overline{OB}$ y desde $\overline{RM}$ hasta $\overline{RN}$ formando ángulos, cuya suma es de $\frac{2\pi}{3}$rad. Luego, se cierran un poco formando los ángulos que se muestran. Si $\theta = (10-3x)^o$ y $\omega = \left(\frac{35x+50}{9}\right)^g$, halle $\frac{10\pi\text{rad}}{6x}$ en el sistema sexagesimal.

A) -60°

B) -30°

C) 30°

D) 60°



Solución:

$$A\hat{O}B + N\hat{R}M = 120°$$

$$\omega + (-\theta) + \omega + (-\theta) = 120°$$

$$\omega - \theta = 60°$$

$$\left(\frac{35x+50}{9}\right)^g - (10-3x)° = 60°$$

$$x = 10$$

$$\frac{10\pi\text{rad}}{6x} = \frac{10\pi\text{rad}}{60} = 30^{\circ}$$

Rpta.: C

10. Al hacer uso de una calculadora para expresar el ángulo $\frac{0,344}{24}\pi$ rad al sistema sexagesimal, resulta $a°\overline{bc}'\overline{de}''$ y sabiendo que $a \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, halle $a+b+c+d+e$.

A) 16 B) 21 C) 12 D) 18

Solución:

Como $\frac{S}{9} = \frac{20R}{\pi} \Rightarrow S = \frac{180R}{\pi}$

luego:

$$S° = \frac{0,344\pi}{24}\text{ rad} = \frac{180}{\pi}\left(\frac{0,344\pi}{24}\right)°$$
$$= 2.58°$$
$$= 2° + (0.58 \times 60)'$$
$$= 2° + 34.8'$$
$$= 2° + 34' + (0.8 \times 60)''$$
$$= 2° + 34' + 48''$$

luego:

$$\frac{0,344}{24}\text{rad} = 2° + 34' + 48'' \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 4 \\ d = 4 \\ e = 8 \end{array}$$

finalmente:

$n = a + b + c + d + e = 2 + 3 + 4 + 4 + 8 = 21$

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un alumno obtiene los siguientes datos para el ángulo α:

i) es positivo.

ii) su medida en el sistema sexagesimal es A grados sexagesimales.

iii) su medida en el sistema centesimal es P minutos centesimales.

Si $2 + A + P = 2020$, halle la medida de $\frac{\alpha}{3}$ en radianes.

A) $\frac{\pi}{30}$ rad B) $\frac{\pi}{8}$ rad C) $\frac{\pi}{15}$ rad D) $\frac{2\pi}{15}$ rad

Solución:

$\alpha = A°$, $\alpha = P^m = \dfrac{P^g}{100}$

Luego, $9k = A$, $10k = \dfrac{P}{100}$, entonces $9k + 1000k = 2018 \Rightarrow k = \dfrac{2018}{1009} = 2$

Por consiguiente, $\alpha = 18° \Rightarrow \dfrac{1}{3}\alpha = 6° = \dfrac{\pi}{30}\text{rad}.$

Rpta.: A

2. El cuádruple del número de grados centesimales de un ángulo, disminuido en 62, es igual a su número de grados sexagesimales. Halle la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\dfrac{\pi}{30}$ rad B) $\dfrac{\pi}{10}$ rad C) $\dfrac{\pi}{15}$ rad D) $\dfrac{2\pi}{15}$ rad

Solución:

$4C - 62 = S$

$40k - 9k = 62 \Rightarrow k = 2$

$R\text{rad} = \dfrac{\pi\text{rad}}{10}$

Rpta.: B

3. Se ha creado un nuevo sistema de medición angular, cuya unidad de medida es el grado Universal (1^{AL}) que equivale a las $\dfrac{3}{4}$ partes del ángulo de una vuelta. Calcule el valor de $\dfrac{3^{AL} - \frac{7\pi}{12}\text{rad}}{47^o}$.

A) 10 B) 9 C) 11 D) 15

Solución:

$1^{AL} = \dfrac{3}{4}(360°) = 270°$

$\dfrac{3^{AL} - \frac{7\pi}{12}\text{rad}}{47^o} = \dfrac{3(270°) - 105°}{47°} = 15$

Rpta.: D

4. Sean S°, C^g y Rrad son las medidas de un ángulo no nulo en grados sexagesimales, centesimales y radianes respectivamente, tal que $\dfrac{S^4}{9} + \dfrac{C^3}{10} + \dfrac{20R^2}{\pi} = \dfrac{12}{5}(S^3 + C^2 + R)$. Halle la medida del ángulo en el sistema radial.

A) $\dfrac{\pi}{4}$rad B) $\dfrac{2\pi}{5}$rad C) $\dfrac{3\pi}{25}$rad D) $\dfrac{6\pi}{25}$rad

Solución:

$$\frac{9^4k^4}{9}+\frac{10^3k^3}{10}+\frac{20\pi^2k^2}{400\pi}=\frac{12}{5}\left(9^3k^3+10^2k^2+\frac{\pi k}{20}\right)$$

$$k^2\left(9^3k^2+10^2k+\frac{\pi}{20}\right)=\frac{12k}{5}\left(9^3k^2+10^2k+\frac{\pi}{20}\right)$$

$$\Rightarrow k=\frac{12}{5}\Rightarrow R\text{rad}=\frac{12\pi}{100}\text{rad}=\frac{3\pi}{25}\text{rad}$$

Clave: C

5. La medida de un ángulo en el sistema centesimal es $(5x)^g$ y el complemento de dicho ángulo en el sistema sexagesimal es $(18x)°$. Halle la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{40}$ rad B) $\frac{\pi}{10}$ rad C) $\frac{\pi}{15}$ rad D) $\frac{2\pi}{5}$ rad

Solución:

$$(5x)^g+(18x)°=100^g$$

$$(5x)^g+(18x)°\left(\frac{10^g}{9°}\right)=100^g$$

$$25x=100$$

$$(5x)^g=20^g=\frac{\pi}{10}\text{rad}$$

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Un atleta parte del punto I debiendo culminar en el punto P, siendo A, B, C y D puntos de hidratación, si la medida del ángulo BOC es $(200/3)^g$, determine el triple del ángulo expresado en el sistema sexagesimal.

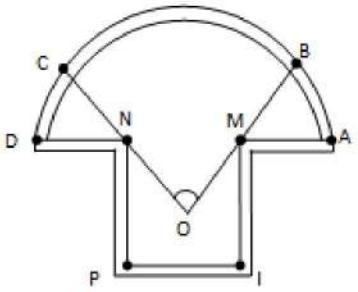
A) 120°

B) 60°

C) 90°

D) 180°

twitter.com/calapenshko



Solución:

$$m\angle BOC = \frac{200^g}{3} \times \frac{180^\circ}{200^g} = 60^\circ$$

El triple es 180°.

Rpta.: D

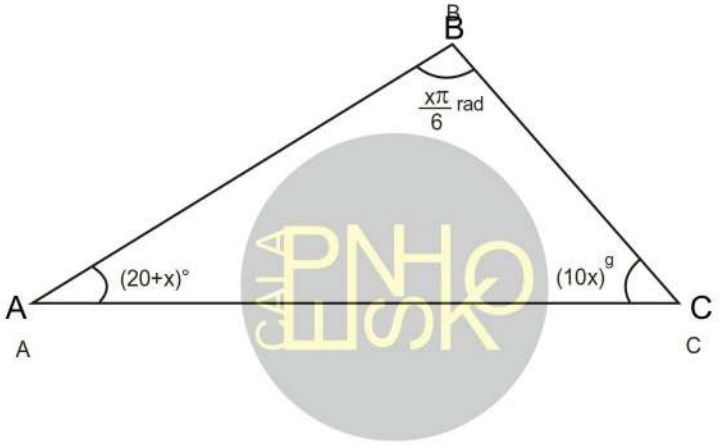
2. Pedro realiza una caminata partiendo en el punto A y retornando al mismo, para ello recorre por las líneas AB, BC y CA. Determine la medida del ángulo BCA, expresado en radianes.

A) $\frac{\pi}{20}$rad

B) $\frac{\pi}{5}$rad

C) $\frac{\pi}{3}$rad

D) $\frac{\pi}{7}$rad



Solución:

$A=(20+x)^\circ;\ B=\frac{x\pi}{6}\text{rad}=\frac{x(180^\circ)}{6}=(30x)^\circ;\ C=(10x)^g.\frac{9^\circ}{10^g}=(9x)^\circ$

En el triángulo A + B + C = 180° $\Rightarrow (20+x)^\circ+(30x)^\circ+(9x)^\circ=180^\circ$

$4x=160\Rightarrow x=4$

El ángulo BCA es $(10x)^g=40^g.\frac{\pi\text{ rad}}{200^g}=\frac{\pi}{5}$ rad.

Rpta.: B

3. Al corregir la hora de un reloj de manecillas, se rota la aguja del horario desde 300^g hasta 8640′. ¿En cuántos radianes excede 300^g a 8640′?

A) $\frac{3\pi}{5}$ rad

B) $\frac{2\pi}{5}$ rad

C) $\frac{7\pi}{10}$ rad

D) $\frac{9\pi}{5}$ rad

Solución:

Si x es el número de radianes, entonces formalmente se tiene:
8640′ + x = 300^g
Factores de conversión

$$x=300^g\left(\frac{\pi\text{rad}}{200^g}\right)-\left(\frac{8640}{60}\right)^o\left(\frac{\pi\text{rad}}{180^o}\right)=\frac{7\pi}{10}\text{ rad}$$

Rpta.: C

4. Seis veces el número de grados sexagesimales de un ángulo sumado a dos veces el número de sus grados centesimales es 222. Calcule la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{3\pi}{20}$ rad B) $\frac{\pi}{7}$ rad C) $\frac{2\pi}{5}$ rad D) $\frac{21\pi}{13}$ rad

Solución:

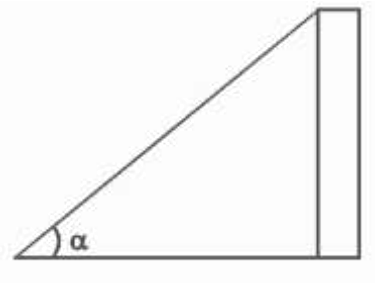
$\alpha=S^o=C^g=R\text{rad}\ \Rightarrow\ 6S+2C=222$

$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=\frac{R}{\pi/20}=k\ \Rightarrow\ S=9k;\quad C=10k;\quad R=\frac{\pi}{20}k$

$6(9k)+2(10k)=222\ \Rightarrow\ k=\frac{222}{74}=3\Rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{20}(3)=\frac{3\pi}{20}\text{rad}$

Rpta.: A

5. Desde el frente de un edificio se observa la parte más alta, si la suma del número de grados sexagesimales con el número de grados centesimales de la medida del ángulo α es 100. Halle el ángulo en el sistema sexagesimal.



A) $\frac{450°}{19}$ B) $\frac{700°}{19}$

C) $\frac{900°}{19}$ D) $\frac{800°}{19}$

Solución:

$\alpha = S^o = C^g$ y $S + C = 100$

$$\begin{matrix} S = 9k \\ C = 10k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 19k = 100 \\ k = \frac{100}{19} \end{matrix}$$

$\Rightarrow S = \frac{900}{19}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{900°}{19}$

Rpta.: C

6. Un instrumento de medición angular está diseñado como un nuevo sistema en el cual la medida del ángulo de una vuelta es igual a 240^b . Con dicho instrumento se mide un ángulo tal que su medida en los sistemas sexagesimal y centesimal son S° y C^g. Si $\frac{S}{2} - \frac{C}{3} < 7 < \frac{7S}{36}$, donde S y C son números enteros, calcule la medida de dicho ángulo en el nuevo sistema.

A) 30^b B) 60^b C) 20^b D) 90^b

Solución:

S = 9K, C = 10K

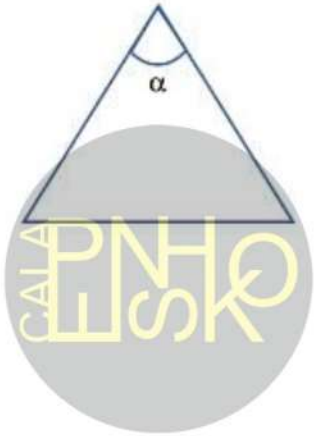
$\frac{9K}{2} - \frac{10K}{3} < 7 < \frac{7(9K)}{36} \Rightarrow \frac{7K}{6} < 7 < \frac{7K}{4} \Rightarrow 4 < K < 6$

Como S y C son enteros, K = 5 ; $2^b = 3°$

$240^b = 360º$, entonces, $S = 9K = 45°(2^b/3°) = 30^b$

Rpta.: A

7. Carmen está desarrollando un trabajo del colegio y recorta un papel en la forma de un triángulo. El número de grados sexagesimales, centesimales y radianes de la medida de α es expresada en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial por los números S, C y R respectivamente. Si $\frac{S^2}{27}-\frac{7C}{5}=40$, exprese la medida del ángulo en radianes.



A) $\frac{\pi}{4}$rad B)

C) D) $\frac{2\pi}{3}$rad

Solución:

$\alpha = S^o = C^g = R\text{rad}$

$S = 9k\ ;\ C = 10k\ ;\ R = \frac{\pi}{20}k$

$\frac{S^2}{27}-\frac{7C}{5}=40\ ;\ \frac{81k^2}{27}-\frac{7}{5}(10k)=40$

$3k^2-14k-40=0 \Rightarrow (3k-20)(k+2)=0$

α es la medida de un ángulo positivo $\Rightarrow k=\frac{20}{3}$

twitter.com/calapenshko

$\alpha = \frac{\pi}{20}k\text{rad} = \frac{\pi}{20}\times\frac{20}{3}\text{rad} = \frac{\pi}{3}\text{rad}$

Rpta.: B

8. El planeta X completa una rotación sobre su eje cada 243 días terrestres. Un cierto satélite de comunicaciones que rota alrededor de la tierra, en un día describe un ángulo $\alpha°\beta'\gamma''$, determine la suma de los números enteros α y β (β > 27).

A) 40 B) 41 C) 28 D) 29

Solución:

Planeta X

243 días $\rightarrow$ 360°

1 día $\rightarrow$ x

$x=\left(\frac{360}{243}\right)^{\circ}=\left(\frac{40}{27}\right)^{\circ} \Rightarrow 1º\ 28'\ (46{,}2)''$

$\alpha = 1$ y $\beta = 28 \Rightarrow \alpha + \beta = 29$

Rpta.: D

9. Los ángulos α y β son agudos en un triángulo rectángulo T. Si $(4+9a)^g$ y $(22+8a)°$ son las medidas de α y β, respectivamente, halle la medida del menor ángulo en T.

A) 54° B) 45° C) 36° D) 63°

Solución:
(1/10) [81(a) + 36] + 8(a) + 22 = 90 $\Rightarrow$ a = 4
α = 36° y β = (90 – 36) = 54°

Rpta.: A

10. En un experimento se miden tres ángulos diferentes, cada uno cinco veces y se reporta el promedio de cada uno de ellos, para disminuir el error durante el proceso de medición. Los resultados obtenidos son $\frac{2\pi}{3}$rad, 240°, 120^g. Calcule la suma de dichos ángulos.

A) 720° B) 440° C) 648° D) 468°

Solución:
$(2\pi/3)$ = 120° y 120^g $(9°/10^g)$ = 108°
La suma de los ángulos es 120° + 240° + 108° = 468°

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

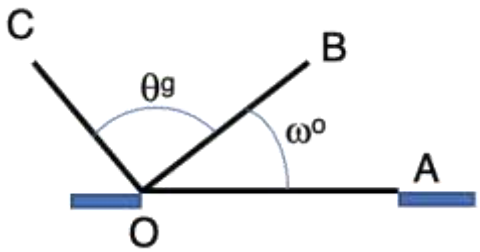
1. En la figura se muestra la vista superior de la puerta que da acceso a la entrada y salida del Centro Preuniversitario de la UNMSM. En la mañana se abre desde OA hasta OC, formando un ángulo de 150°, a partir de las 8:20 am se deja entreabierta formando un ángulo ω°, la razón entre los números ω y θ es como 1 es a 5. Halle 11ω.

A) 120

B) 155

C) 300

D) 111



Solución:
$(9\theta)°/10 + \omega° = 150°$
$\theta = 5\,\omega$
Entonces ω = (300/11) y (11ω) = 300

Rpta.: C

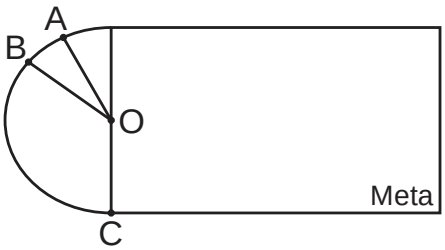
2. La figura representa el recorrido de un atleta de competencia en carrera de mil quinientos metros, en la última vuelta, en A tiene una rapidez uniforme y cuando llega al punto B el ángulo AOB es α°, luego incrementa su rapidez hasta C y de allí a la meta. El ángulo BOC es θrad, siendo $\alpha° + \theta$rad = 150° y $\alpha - \theta$ = 30°, determine $(180 + \pi)\theta$.

A) 120 π

B) 150 π

C) 170 π

D) 180 π



Solución:
$\alpha + (180\theta)/\pi = 150$
$\alpha - \theta = 30$
Entonces
$(180 + \pi)\theta = 120\pi$

Rpta.: A

3. Los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal son S y C, respectivamente y $S + C = 180$. Determine el valor de 19S.

A) 1800 B) 1620 C) 2900 D) 2800

Solución:
$S + C = 180 \Rightarrow 9k + 10k = 180 \Rightarrow k = (180/19)$
$S = (180/19)(9)$
$19S = 9(180) = 1620$

Rpta.: B

4. Un jugador de Golf, golpea la pelota tal que el ángulo de salida respecto de la horizontal es 30°. Siendo así, la pelota llega cerca del hoyo rebota y queda a 10 cm de lograr ingresar. Se reporta el ángulo en el sistema X donde la medida del ángulo de una vuelta corresponde a 100^X. Determine la medida del ángulo de salida de la pelota en el sistema X.

A) $\left(\frac{25}{3}\right)^X$ B) $\left(\frac{3}{25}\right)^X$ C) $\left(\frac{100}{3}\right)^X$ D) $\left(\frac{133}{3}\right)^X$

Solución:
$360º = 100^X$, entonces $18° = 5^X$
$30°(5^X/18°) = (25/3)^X$

Rpta.: A

5. Un disco gira con rapidez constante, alrededor de un eje que pasa por su centro geométrico, tal que la razón entre el ángulo barrido y el tiempo transcurrido es 50 rad/s. Se desea expresar la razón utilizando un sistema H de medida angular denominado "Hunter", donde para una vuelta corresponde 150^H.

A) $3500/\pi$ Hunter/s B) $3750/\pi$ Hunter/s
C) $8500/\pi$ Hunter/s D) $5500/\pi$ Hunter/s

Solución:
$150^H = 2\pi$ rad

La razón $\omega = 50\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\frac{150^H}{2\pi\ \text{rad}} = \frac{3750^H}{\pi} = \frac{3750}{\pi}\frac{\text{Hunter}}{\text{s}}$

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. El CEPUSM divide un terreno como se muestra en la figura. Determine el valor de x.

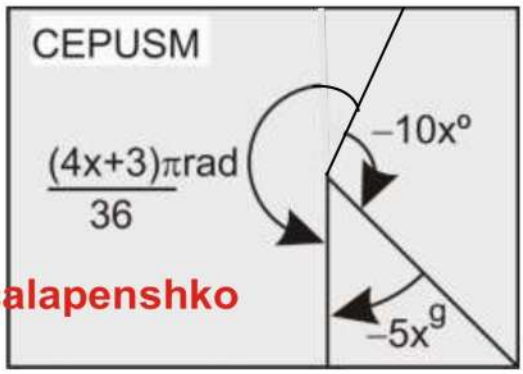
A) 20

B) 10

C) 15

D) 30

E) 22



twitter.com/calapenshko

Solución:

$$\frac{(4x+3)\pi}{36}\text{rad}+10x^{o}+5x^{g}=360^{o}$$

$$\frac{(4x+3)180}{36}+10x+\frac{45}{10}x=360$$

$$20x+15+10x+4{,}5x=360\Rightarrow 69x=690\Rightarrow x=10$$

Rpta.: B

2. En la figura, se muestra un medidor para un flujo específico, cuya medida máxima es 240^{u}. Determine la medida que marca.

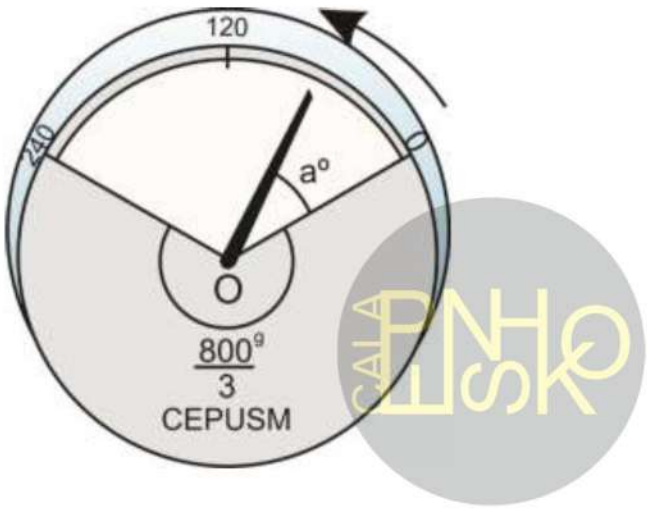
A) $2a^{u}$

B) $\frac{a}{10}^{u}$

C) $\frac{2a}{5}^{u}$

D) $\frac{a}{5}^{u}$

E) $\frac{a}{20}^{u}$



Solución:

$$\begin{array}{l} 240^u \rightarrow 120^o \\ \quad x \rightarrow a^o \\ \hline x = 2a^u \end{array}$$

Rpta.: A

3. Una profesora del CEPUSM le indica a sus alumnos que las medidas de un ángulo positivo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial son S^o, C^g y R rad. Si se verifica que $\frac{10S}{C} = 3^{\frac{\pi}{R}}$, calcule la medida del ángulo.

A) 85^g B) 90^g C) 80^g D) 50^g E) 100^g

Solución:

$$\frac{10S}{C} = 3^{\frac{\pi}{R}} \Rightarrow \frac{10.9k}{10k} = 3^{\frac{\pi}{\frac{\pi k}{20}}}$$

$$9 = 3^{\frac{20}{k}} \Rightarrow k = 10 \Rightarrow \alpha = 100^g$$

Rpta.: E

4. Sean $S°$, C^g y R rad las medidas de un ángulo positivo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial respectivamente tal que $C^2 - S^2 + \frac{5R^2}{\pi^2} = \frac{169}{5}$. Determine la medida del ángulo en grados sexagesimales.

A) $9°$ B) $24°$ C) $12°$ D) $10°$ E) $18°$

Solución:

Podemos expresar $S = 9k,\ C = 10k,\ R = \dfrac{\pi k}{20}$

Reemplazando $(10k)^2 - (9k)^2 + \dfrac{5}{\pi^2}\left(\dfrac{\pi k}{20}\right)^2 = \dfrac{169}{5} \rightarrow 19k^2 + \dfrac{5k^2}{400} = \dfrac{169}{5}$

$$\rightarrow \frac{1521k^2}{80} = \frac{169}{5} \rightarrow k^2 = \frac{16}{9} \rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Luego

$$\alpha = 9^o.\frac{4}{3} = 12^\circ$$

Rpta.: C

5. Si $a = 80\left(\dfrac{5^g}{12\ \text{rad}}\right)^\circ$ y $b = \left(\dfrac{2^o+4^o+6^o}{1^g+2^g+3^g}\right)\text{rad}$, calcule $\dfrac{6a}{\pi^o} + \dfrac{9b}{20\ \text{rad}}$.

A) 4 B) C) 2 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

Solución:

$$a = 80\left(\frac{5^g}{12\ \text{rad}}\right)^\circ = \left(\frac{\pi}{6}\right)^\circ \Rightarrow 6a = \pi^o \cdots (I)$$

$$b = \left(\frac{2^o+4^o+6^o}{1^g+2^g+3^g}\right)\text{rad} = \left[\frac{20}{9}\right]\text{rad} \Rightarrow 9b = 20\ \text{rad} \cdots (II)$$

$$\therefore \frac{6a}{\pi^o} + \frac{9b}{20\ \text{rad}} = 2$$

Rpta.: C

6. Con los datos de la figura y si $S^o - C^g = (0,3)^o\ 6'$, calcule $9S^o - 6^o$.

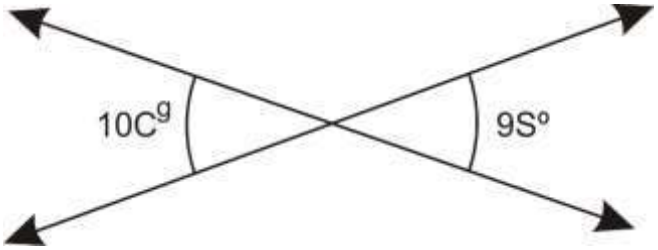
A) $\dfrac{\pi}{3}$ rad

B) $\dfrac{\pi}{6}$ rad

C) $\dfrac{\pi}{4}$ rad

D) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad

E) $\dfrac{5\pi}{12}$ rad



Solución:

$9S = 9k$, $10C = 10k$

$S^o - C^g = (0,3)^o \ 6' \Rightarrow k^o - k^g = \frac{3^o}{10} + 6' \Rightarrow k = 4$

Entonces $9S^o - 6^o = 30^o = \frac{\pi}{6}\text{rad}$

Rpta.: B

7. Si un ángulo mide a segundos sexagesimales y b segundos centesimales, halle el valor de $\frac{3b+5a}{3b-5a}$

A) $\frac{152}{98}$ B) $\frac{169}{52}$ C) $\frac{157}{52}$ D) $\frac{230}{69}$ E) $\frac{231}{69}$

Solución:

Usando a'' y b^S

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \frac{\frac{a}{3600}}{9} = \frac{\frac{b}{10000}}{10}$$

$$\frac{a}{36(9)} = \frac{b}{1000} \Rightarrow \frac{a}{81} = \frac{b}{250}$$

$$\Rightarrow \frac{3b+5a}{3b-5a} = \frac{3b+5\left(\frac{81b}{250}\right)}{3b-5\left(\frac{81b}{250}\right)} \Rightarrow \frac{231b}{69b} = \frac{231}{69}$$

Rpta.: E

8. Un alumno de secundaria recorta una cartulina formando un pentágono cuyos ángulos internos miden $6x^\circ, 10x^g, \frac{\pi}{4}\text{rad}, 30^\circ$ y 150^g. Halle el valor de $\sqrt{x+3}$.

A) 7 B) 2 C) 5 D) 4 E) 6

Solución:

La suma de los ángulos internos de un pentágono es 540°, entonces

$$6x^\circ + 10x^g + \frac{\pi}{4}\text{rad} + 30^\circ + 150^g = 540^\circ$$

$$6x^\circ + 10x^g.\frac{9^\circ}{10^g} + \frac{180^\circ}{4} + 30^\circ + 150^g.\frac{9^\circ}{10^g} = 540^\circ$$

$$6x^\circ + 9x^\circ + 45^\circ + 30^\circ + 135^\circ = 540^\circ$$

$$15x^\circ + 210^\circ = 540^\circ$$

$$x = 22$$

Luego el valor de $\sqrt{x+3} = 5$.

Rpta.: C

9. La suma de las medidas de tres ángulos positivos, cuyas medidas están en progresión aritmética, es 198°. Si el cuadrado del número de grados sexagesimales del menor ángulo es igual al número de grados sexagesimales del mayor ángulo, halle el menor ángulo en el sistema radial.

A) $\frac{11\pi}{180}$rad B) $\frac{11\pi}{30}$rad C) $\frac{17\pi}{180}$rad D) $\frac{13\pi}{90}$rad E) $\frac{7\pi}{30}$rad

Solución:

Del enunciado:

$$\theta^\circ + (\theta + r)^\circ + (\theta + 2r)^\circ = 198^\circ \quad \rightarrow \quad \theta + r = 66$$

$$\theta^2 = \theta + 2r \quad \rightarrow \quad \theta^2 + \theta - 132 = 0 \rightarrow \quad \theta = 11.$$

Luego $\theta^\circ = 11^\circ = \frac{11\pi}{180}$rad

Rpta.: A

10. Sean dos ángulos positivos α y β tales que sus medidas en minutos sexagesimales y minutos centesimales, respectivamente, son iguales. Si la diferencia de dichos ángulos es $\frac{46^o}{3}$**,** halle la medida de β en grados centesimales.

A) 15^g B) 10^g C) 20^g D) 30^g E) 35^g

twitter.com/calapenshko

Solución:

Se tiene: $\alpha = a'$ y $\beta = a^m$

$$a' - a^m = \frac{46^o}{3} \Rightarrow \left(\frac{a}{60}\right)^o - \left(\frac{a}{100}\right)^g \left(\frac{9^o}{10^g}\right) = \frac{46^o}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} - \frac{9a}{1000} = \frac{46}{3}$$

$$\Rightarrow a = 2000$$

Así $\beta = 2000^m = \dfrac{2000}{100} = 20^g$.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El local central de CEPUSM desea instalar ventanas nuevas, como se muestra en la figura. Determine el valor de y.

A) $\dfrac{200}{9}$

B) $\dfrac{100}{3}$

C) $\dfrac{100}{9}$

D) $\dfrac{200}{3}$

E) 50

Fuente: https://www.ideal.es/sociedad/aumentan-ayudas-junta-ventanas-aislantes-20180425142101-nt.html

Solución:

De la figura,

$$x^o = y^g = \frac{\pi}{x-11}\text{rad}$$

$$\Rightarrow x = \frac{180}{x-11} \Rightarrow x = 20 \Rightarrow y = \frac{200}{9}$$

Rpta.: A

2. Con los datos de la figura y $a+b=30$, calcule $a-b$.

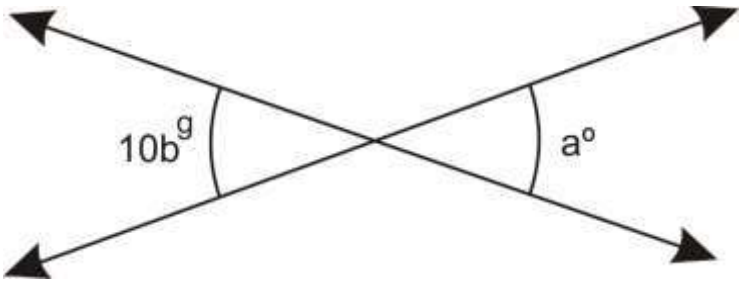
A) 18

B) 25

C)

D) 24

E)



Solución:

$a^o = 10b^g \Rightarrow a = 9b$
$a+b=30$
$9b+b=30$
$b=3 \Rightarrow a-b=24$

Rpta.: D

3. La unidad de medida de un nuevo sistema es $\left(1^u\right)$, que se obtiene de dividir el ángulo de una vuelta en 300 partes iguales. Calcule el valor de $\dfrac{15^u+5^o}{15^u-5^g}$.

A) $\dfrac{46}{27}$ B) $\dfrac{11}{27}$ C) $\dfrac{23}{27}$ D) $\dfrac{20}{27}$ E) $\dfrac{19}{27}$

Solución:

Tenemos $300^u \lessgtr 360^o \Rightarrow 1^u \lessgtr \left(\dfrac{18}{15}\right)^o \Rightarrow 15^u \lessgtr 18^o$

$$\frac{15^u+5^o}{15^u-5^g}=\frac{18^o+5^o}{18^o-\left(\dfrac{9}{2}\right)^o}=\frac{46^o}{27^o}=\frac{46}{27}.$$

Rpta.: A

4. Sea $E=\dfrac{1^o+2^o+3^o+...+50^o}{2^g+4^g+6^g+...+100^g}$. Determine el valor de 9E.

A) $\dfrac{5}{2}$ B) 5 C) $\dfrac{1}{5}$ D) E) $\dfrac{2}{5}$

Solución:

$$E=\frac{1^o+2^o+3^o+...+50^o}{2^g+4^g+6^g+...+100^g}$$

$$E=\frac{(1+2+3+...+50)^o}{2(1\ +2+3\ +...+50)^g}$$

$$E=\frac{A^o}{2A^g};\ \frac{A}{9}=\frac{C}{10}\Rightarrow\frac{10A}{9}=C$$

$$E=\frac{\frac{10A}{9}}{2A}=\frac{10}{2.9}\Rightarrow 9E=5$$

Rpta.: B

5. Con los datos de la figura y si $9a-2b=100$, calcule b^o+a^g.

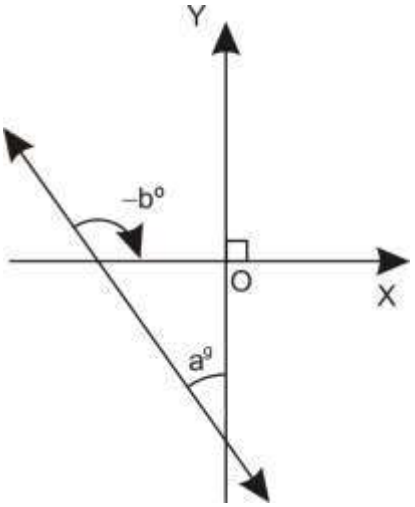
A) 155º

B) 150º

C) 160º

D) 145º

E) 170º



Solución:

Como $b^o=90^o+a^g$ y $9a-2b=100$, entonces $10b=900+9a$ y $9a-2b=100$

Entonces $8b=1000\Rightarrow b=125\Rightarrow a=\dfrac{350}{9}$

Por lo tanto, $b^o+a^g=125^o+\dfrac{350^g}{9}=125^o+35^o=160^o$

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la figura, se muestra una ventana con ciertas medidas. Si $\alpha = \frac{(20+a)\pi}{45}$rad y $\beta = \left(\frac{440-5a}{3}\right)^g$, halle la medida de β.

A) 150º

B) 120º

C) 135º

D) 112º

E) 145º

Solución:

De la figura,

$68º + \alpha = 180º \Rightarrow \alpha = 112º$

$\frac{112}{9} = \frac{20}{\pi}R \Rightarrow R = \frac{112.\pi}{9.20} \Rightarrow R = \frac{28\pi}{45}$

Luego, $\frac{28\pi}{45}\text{rad} = \frac{(20+a)\pi}{45}\text{rad} \Rightarrow a = 8$

Por consiguiente, $\beta = \left(\frac{440-40}{3}\right)^g = \left(\frac{400}{3}\right)^g$

$\frac{\frac{400}{3}}{10} = \frac{S}{9} \Rightarrow \frac{400}{30} = \frac{S}{9} \Rightarrow S = 120 \Rightarrow \beta = 120º$

Rpta.: B

2. En la figura, se muestra un nuevo sistema de medición angular. Calcule la medida del ángulo 120^g en el nuevo sistema.

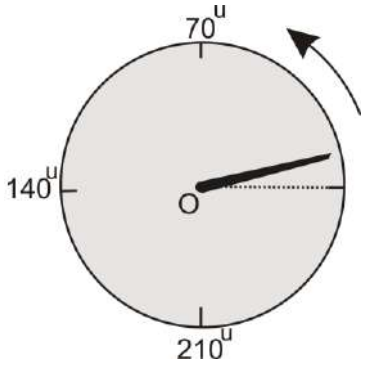
A) 90^U

B) 105^U

C) 84^U

D) 74^U

E) 91^U



Solución:

$$\begin{array}{l} 70^u \rightarrow 100^g \\ \underline{\quad x \rightarrow 120^g} \end{array}$$

$$x = \frac{70.120}{100} \Rightarrow x = 84^u$$

Rpta.: C

3. Las medidas de los ángulos α y θ son $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{18^o}\right)^\circ$ y $10\left(\frac{M^o+N^o}{M^g+N^g}\right)^g$, respectivamente, halle $(\alpha+\theta-2^o)$ en el sistema radial.

A) $\frac{\pi}{18}$ rad B) $\frac{\pi}{10}$ rad C) $\frac{\pi}{20}$ rad D) $\frac{\pi}{12}$ rad E) $\frac{\pi}{15}$ rad

Solución:

Las medidas de α y θ son $\left(\frac{\pi \text{ rad}}{18^o}\right)^\circ$ y $10\left(\frac{M^o+N^o}{M^g+N^g}\right)^g$ ...(I)

$18^o = \frac{\pi}{10}\text{rad};\ M^o = \left(\frac{10M}{9}\right)^g,\ N^o = \left(\frac{10N}{9}\right)^g$ ...(II)

Llevando (II) en (I):

$$\alpha=\left(\frac{\pi rad}{\frac{\pi}{10}rad}\right)^g=10^o;\ \theta=10\left(\frac{\frac{10M^g}{9}+\frac{10N^g}{9}}{M^g+N^g}\right)^g$$

$$\theta=10\left(\frac{\frac{10}{9}\left(M^g+N^g\right)}{M^g+N^g}\right)^g=10\left(\frac{10}{9}\right)^g=10^o\Rightarrow\left(\alpha+\theta-2^o\right)=18^o=\frac{\pi}{10}rad$$

Rpta.: B

4. En un campo deportivo, tres jugadores practican pases con el balón en una formación triangular. Esta formación tiene ángulos internos en progresión geométrica de razón 7. Determine la medida del ángulo mayor en el nuevo sistema *kut*, en el cual, $57^{kut}=1\,rad$.

A) 58^{kut} B) $58\pi^{kut}$ C) $49\pi^{kut}$ D) 49^{kut} E) 82^{kut}

Solución:

$$A+7A+49A=180^o$$

$$57A=180^o\Rightarrow A=\left(\frac{180}{57}\right)^\circ=\left(\frac{60}{19}\right)^\circ$$

$$49A=49\left(\frac{60}{19}\right)^\circ\Rightarrow 49A=\frac{49\pi}{19.3}rad$$

$$49A=\frac{49\pi}{57}rad=49\pi^{kut}$$

Rpta.: C

5. Las medidas del ángulo α son S^o, C^g y R rad. Si $\frac{S+2C}{R}=S$, halle la medida del ángulo $\frac{\pi\alpha}{10}-4^o$.

A) 60^g B) 58^g C) 80^g D) 72^g E) 82^g

Solución:

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=\frac{20R}{\pi}=k\Rightarrow S=9k,\ C=10k,\ R=\frac{\pi k}{20}$$

$$\frac{S+2C}{R}=S\Rightarrow\frac{9k+2.10k}{\frac{\pi k}{20}}=9k\Rightarrow\frac{20.29k}{\pi k}=9k\Rightarrow k=\frac{580}{9\pi}$$

$$\alpha=9k^o=9\left(\frac{580}{9\pi}\right)\Rightarrow\frac{\pi\alpha}{10}-4^o=\left(\frac{\pi}{10}\right)\left(\frac{580}{\pi}\right)-4^o=54^o=60^g$$

Rpta.: A

6. Las medidas del ángulo α son S^o, C^g y $R\ rad$. Si $\dfrac{S-C}{S^{\frac{2}{3}}+(CS)^{\frac{1}{3}}+C^{\frac{2}{3}}}+C^{\frac{1}{3}}=3$, halle la medida de α.

A) 18º B) 29º C) 125º D) 8º E) 27º

Solución:

Usando el cociente notable $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$ podemos escribir

$$\frac{\left(S^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(C^{\frac{1}{3}}\right)^3}{S^{\frac{1}{3}}-C^{\frac{1}{3}}}=S^{\frac{2}{3}}+(CS)^{\frac{1}{3}}+C^{\frac{2}{3}}\text{, luego,}$$

$$\frac{S-C}{S^{\frac{2}{3}}+(CS)^{\frac{1}{3}}+C^{\frac{2}{3}}}=S^{\frac{1}{3}}-C^{\frac{1}{3}}$$

Por consiguiente, $\dfrac{S-C}{S^{\frac{2}{3}}+(CS)^{\frac{1}{3}}+C^{\frac{2}{3}}}+C^{\frac{1}{3}}=S^{\frac{1}{3}}=3\Rightarrow S=27$

Rpta.: E

7. Los ángulos α y β son positivos y para ellos se cumple que la suma del número de grados sexagesimales de α con el número de grados centesimales de β es 38. Si $(\alpha+\beta+48')$ es 37º, halle la medida de α.

A) 45º B) 15º C) 30º D) 20º E) 10º

Solución:

$\alpha=S^o,\ \ \beta=M^g$

$S+M=38$

$S^o+M^g+48'=37^o$

$S^o+M^g=37^o-0,8^o=36,2^o$

$\Rightarrow S^o+M^g=36,2^o\Rightarrow S^o+\left(\dfrac{9M}{10}\right)^g=36,2^o$

$\Rightarrow 10S+9M=362$

$\Rightarrow 10S+9(38-S)=362\Rightarrow S=20$

Luego, $\alpha=20^o$

Rpta.: D

8. Si $E = 10^{o}30' - 5^{g}50^{m}$, halle E en radianes.

A) $\frac{37\pi}{1200}$rad B) $\frac{\pi}{30}$rad C) $\frac{13\pi}{400}$rad D) $\frac{11\pi}{400}$rad E) $\frac{11\pi}{1200}$rad

Solución:

$$5^{g}50^{m} = 5^{g} + 50^{m} = \left(\frac{11}{2}\right)^{g} = \left(\frac{99}{20}\right)^{\circ}$$

$$\Rightarrow 5^{g}50^{m} = \left(\frac{99}{20}\right)^{\circ} = 4{,}95^{o} = 4^{o} + 0{,}95^{o} = 4^{o}57'$$

Luego, $E = 10^{o}30' - 4^{o}57' = 5^{o}33' = \left(\frac{111}{20}\right)^{\circ}$

Por consiguiente, $E = \frac{37\pi}{1200}$rad

Rpta.: A

9. María está muy preocupada por el poste cerca de su casa, cuyo ángulo de inclinación es $\alpha = 73^{o}21'$. Si $\alpha = a^{g}b^{m}\ (0 < b < 100)$, halle $a + b$.

A) 132

B) 115

C) 120

D) 130

E) 131

Solución:

$$\alpha = 73^{o}21'$$

$$21' = \left(\frac{21}{60}\right)^{\circ} = \left(\frac{7}{20}\right)^{\circ} \Rightarrow \alpha = \left(73 + \frac{7}{20}\right)^{\circ} = \left(\frac{1467}{20}\right)^{\circ}$$

$$\frac{\frac{1467}{20}}{9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \frac{1467}{20.9} = \frac{C}{10} \Rightarrow \alpha = 81{,}5^{g} = 81^{g} + 0{,}5^{g} = 81^{g}50^{m}$$

$$\therefore \alpha = 81^{g}50^{m} \Rightarrow a = 81,\ b = 50 \Rightarrow a + b = 131$$

Rpta.: E

10. En la ecuación $10a = 5b + 2160$, donde a y b representan los números de minutos en los sistemas sexagesimal y centesimal de un mismo ángulo. Calcule la medida del ángulo.

A) 25^g B) 78^g C) 54^g D) 20^g E) 27^g

Solución:

$$10a = 5b + 2160$$
$$\alpha = S^o = C^g$$
$$\alpha = 60S' = 100C^m \Rightarrow 60S = a,\ 100C = b$$
$$10(60S) = 5(100C) + 2160$$
$$\Rightarrow 10.60.9k = 5.100.10k + 2160$$
$$\Rightarrow 5400k = 5000k + 2160$$
$$\Rightarrow k = 5,4$$
$$\therefore \alpha = 10k^g = 54^g$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ricardo levanta la tapa de su laptop, formando un ángulo obtuso $\alpha = a^o$. Luego baja la tapa de su laptop formando un ángulo $\beta = b^g$. Además, los ángulos son suplementarios. Si a y b están en la relación de 27 a 10, calcule la medida del ángulo menor.

A) $\frac{\pi}{4}$rad B) $\frac{\pi}{3}$rad C) $\frac{\pi}{6}$rad D) $\frac{5\pi}{12}$rad E) $\frac{\pi}{10}$rad

Solución:

$$\alpha + \beta = a^o + b^g = 180^o$$
$$\alpha + \beta = a^o + \left(\frac{9b}{10}\right)^{\circ} = 180^o$$
$$\Rightarrow \frac{10a + 9b}{10} = 180$$
$$\Rightarrow \frac{10(27k) + 9(10k)}{10} = 180$$
$$\Rightarrow 270k + 90k = 1800 \Rightarrow k = 5$$
$$\therefore \beta = 50^g = \frac{\pi}{4}\text{rad}$$

Rpta.: A

2. De los ángulos α y β se sabe:

i. la suma de sus medidas es $\frac{11\pi}{180}\text{rad}$

ii. α mide M minutos sexagesimales y β mide T minutos centesimales

iii. $M+T=1120$.

Halle $\beta-\alpha$, en grados sexagesimales.

A) 6º B) 6,5º C) 8º D) 7º E) 7,5º

Solución:

$$\alpha+\beta=\frac{11\pi}{180}\text{rad}\Rightarrow M'+T^m=\frac{11\pi}{180}\text{rad}$$

$$\frac{M^o}{60}+\frac{T^g}{100}=\frac{11\pi}{180}\text{rad}$$

$$\frac{M\pi}{60.180}\text{rad}+\frac{T\pi}{100.200}\text{rad}=\frac{11\pi}{180}\text{rad}$$

$$\alpha+\beta=\frac{M\pi}{60.180}\text{rad}+\frac{(1120-M)\pi}{100.200}\text{rad}=\frac{11\pi}{180}\text{rad}$$

$$\alpha+\beta=\frac{M\pi}{60.180}\text{rad}-\frac{M\pi}{100.200}\text{rad}+\frac{14\pi}{50.5}\text{rad}=\frac{11\pi}{180}\text{rad}$$

$$\Rightarrow\frac{\pi M}{100}\left(\frac{1}{6.18}-\frac{1}{200}\right)\text{rad}=\frac{\pi}{10}\left(\frac{11}{18}-\frac{14}{25}\right)\text{rad}$$

$$\Rightarrow\frac{M}{10}\left(\frac{92}{6.18.200}\right)=\left(\frac{23}{18.25}\right)\Rightarrow M=25$$

$$\Rightarrow\alpha=120'\wedge\beta=1000^m\Rightarrow\alpha=2^o\wedge\beta=10^g=9^o$$

$$\therefore\beta-\alpha=7^o$$

Rpta.: D

3. Las medidas del ángulo α son S^o y C^g. Calcule el valor de la expresión

$$\left(\frac{380C}{C+S}\right)\frac{\left(S^g+C^o\right)^g}{\left(S^o+C^g\right)^\circ}.9$$

A) 180 B) 181 C) $\frac{181}{20}$ D) $\frac{181}{2}$ E) $\frac{180}{2}$

Solución:

$$\left(\frac{380C}{C+S}\right)\frac{\left(S^g+C^o\right)^g}{\left(S^o+C^g\right)^\circ}=\left(\frac{380.10k}{10k+9k}\right)\frac{\left(9k^g+10k^o\right)^g}{\left(9k^o+10k^g\right)^\circ}$$

$$\left(\frac{380C}{C+S}\right)\frac{\left(S^g+C^o\right)^g}{\left(S^o+C^g\right)^\circ}=200\frac{\left(9k^g+10k^o\right)^g}{\left(9k^o+10k^g\right)^\circ}$$

$$20\frac{\left(9k^g+10k^o\right)^g}{\left(9k^o+10k^g\right)^\circ}=2\frac{\left(81k^o+100k^o\right)^g}{\left(18k^o\right)^\circ}=2\frac{181k^o}{18k^o}=\frac{181}{9}$$

$$\therefore 9.\left(\frac{380C}{C+S}\right)\frac{\left(S^g+C^o\right)^g}{\left(S^o+C^g\right)^\circ}=181$$

Rpta.: B

4. Un móvil parte del reposo y realiza una trayectoria curvilínea. Cuando se detiene el móvil, dos observadores A y B reportan lecturas del ángulo descrito por el móvil, $(3x-9)^\circ$ y 160^g, halle el valor de $x-\frac{x}{3}$.

A) 34 B) 51 C) 15 D) 43 E) 17

Solución:

$$\frac{(3x-9)}{9}=\frac{160}{10}\Rightarrow 3x-9=9.16$$

$$\Rightarrow 3x=9.17\Rightarrow x=51\wedge\frac{x}{3}=17$$

$$\therefore x-\frac{x}{3}=51-17=34$$

Rpta.: A

5. Las medidas de un ángulo α en los sistemas sexagesimal y centesimal son A'' y B^s. Si $A+B=1655$, halle la medida de α.

A) 12^m B) $\frac{25}{2}^m$ C) 125^m D) $\frac{25}{4}^m$ E) $12{,}5^m$

Solución:

$$\frac{A^o}{3600}=\frac{B^g}{10000}\Rightarrow\frac{\frac{A}{3600}}{9}=\frac{\frac{B}{10000}}{10}$$

$$\Rightarrow A=\frac{81B}{250}$$

Como $A+B=1655$, entonces $\frac{81B}{250}+B=1655$

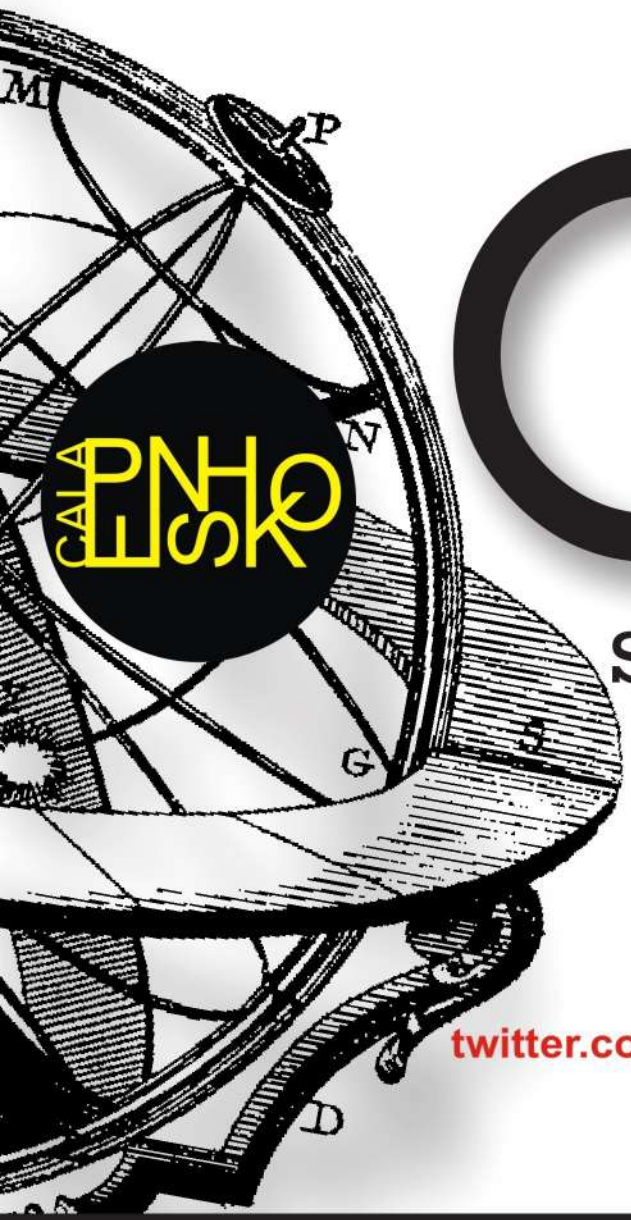
$$331B=1655.250\Rightarrow B=5.250=1250$$

$$\therefore \alpha=1250^s=12,5^m$$

Rpta.: E

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



02

semana

twitter.com/calapenshko

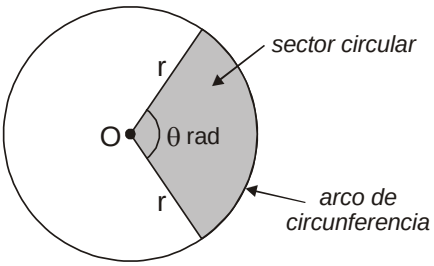
pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

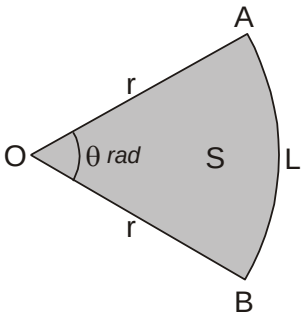
SECTOR Y TRAPECIO CIRCULAR

Sector circular:



$0 < \theta < 2\pi$

Longitud de arco y Área del sector circular

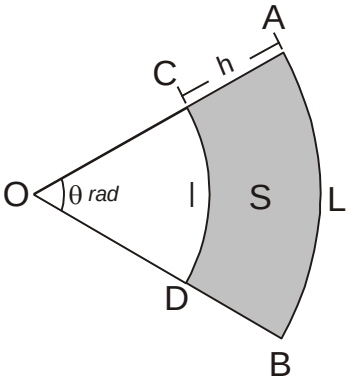


- Si L u es la longitud de AB $\Rightarrow$ $\boxed{L = \theta r}$

- Si S u^2 es el área del sector circular AOB $\Rightarrow$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}Lr = \frac{1}{2\theta}L^2}$$

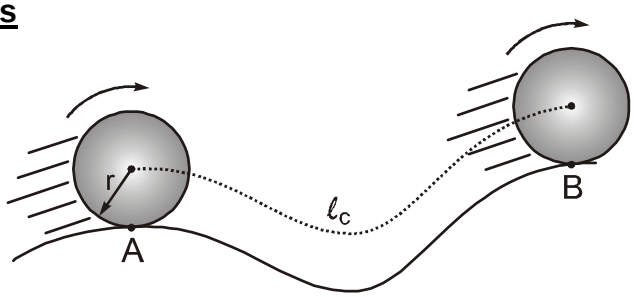
Trapecio circular:



- Si S es el área del trapecio circular ABDC ⇒

$$S = \left(\frac{\ell + L}{2}\right)h$$

Número de vueltas



$$n_v = \frac{\ell_c}{2\pi\, r}$$

Donde:

- n_v : número de vueltas que da la rueda al desplazarse, desde A hacia B.
- ℓ_c : longitud recorrida por el centro de la rueda.
- r : radio de la rueda.

Trigonometría

EJERCICIOS

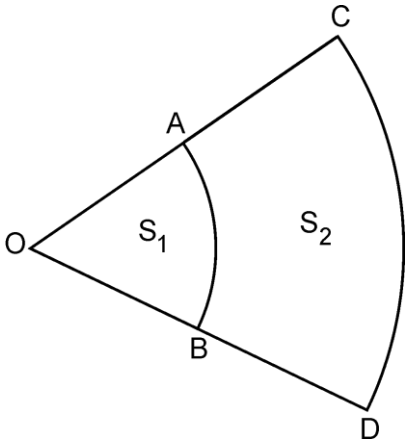
1. La figura representa la parte superior de las dos porciones de pizza que le corresponde comer a Lucía y a Ximena, respectivamente, una porción en forma del sector circular AOB y la otra porción en forma del trapecio circular ABDC. Si las áreas de dichas porciones se denotan por $S_1\ u^2$, $S_2\ u^2$ y se sabe que $OA = AC$, determine $\frac{S_1}{S_2}$.

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{3}$

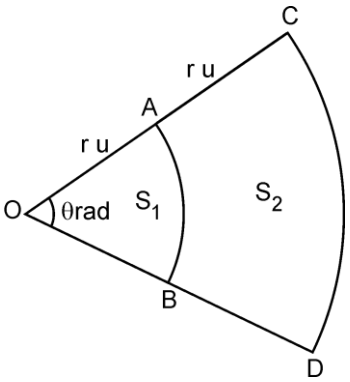
C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{3}{2}$



Solución:

A partir de la información proporcionada, se tiene:



$S_1 = \frac{1}{2}\theta r^2$ y $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\theta(2r)^2$

Luego, $\frac{1}{2}\theta r^2 + S_2 = \frac{1}{2}\theta(2r)^2$

Entonces $S_2 = \frac{3\theta r^2}{2}$

Finalmente, nos piden $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\theta r^2}{2}}{\frac{3\theta r^2}{2}} = \frac{1}{3}$.

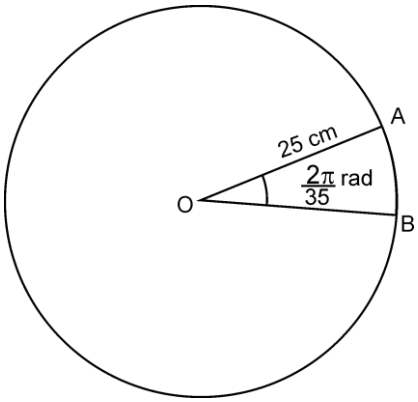
Rpta.: B

2. Ethel para celebrar su fiesta de cumpleaños elige una torta circular de 50 cm de diámetro e invita muchos amigos. El número de invitados asciende a 35 personas, y entre estos se reparte la torta equitativamente. Si Ethel desea comprar cajitas para repartir la torta a sus invitados, ¿cuánto de área ocupa la base de cada una de estas porciones?

A) $25\pi\ cm^2$ B) $\frac{120\pi}{3}\ cm^2$ C) $\frac{125\pi}{7}\ cm^2$ D) $\frac{31\pi}{120}\ cm^2$

Solución:

A partir de la información, se tiene la siguiente representación gráfica, la misma que nos ayudará a resolver la situación planteada.



Notemos que el sector circular AOB representa la porción de torta que recibe cada invitado.

Como se necesita saber el área que ocupa la base de cada porción, para poder comprar las cajitas, se tiene:

$$\text{Área}_{\text{SECTOR AOB}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{35}\right)(25)^2 = \frac{125\pi}{7}\ \text{cm}^2.$$

Rpta.: C

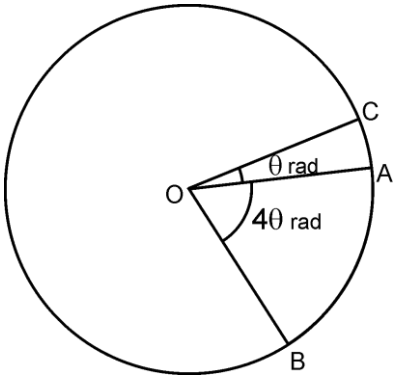
3. En la figura, se representa la vista superior de una pizza hawaiana. Si mi amigo Mario toma la tajada que corresponde al sector AOB cuya área es de $40\pi\ \text{cm}^2$ y $AC = \frac{2\pi}{3}$ cm, determine la medida del diámetro de dicha pizza.

A) 60 cm

B) 50 cm

C) 65 cm

D) 55 cm



Solución:

Consideremos

R : Radio

D : Diámetro $= 2R$

$AC = \frac{2\pi}{3}$ cm

Área $_{\text{Sector AOB}} = 40\pi\ \text{cm}^2$

Luego, a partir de la información proporcionada, se tiene:

$$40\pi = \frac{1}{2}(4\theta)R^2 \quad \Rightarrow \quad 20\pi = \theta R^2 \quad \ldots\ldots \ (1)$$

Además $\frac{2\pi}{3} = \theta R$ …… (2)

Reemplazando (2) en (1),

$$20\pi = \left(\frac{2\pi}{3}\right)R$$

Entonces $R = 30$ cm

Finalmente, nos piden la medida del diámetro de la pizza, $D = 2R = 60$ cm .

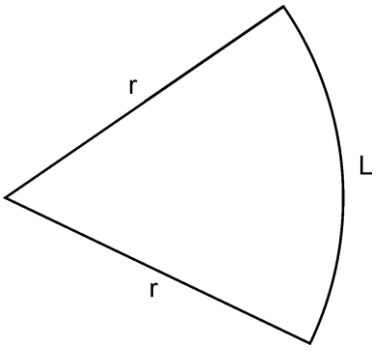
Rpta.: A

4. El Sr. Campoverde quiere construir y cercar un campo que tiene la forma de un sector circular con un alambre de 200 m de longitud. Determine la medida del radio de dicho sector, si se desea obtener la máxima área posible.

A) 40 m B) 50π m C) 50 m D) 40π m

Solución:

A partir de la información, se tiene la siguiente representación gráfica, la misma que nos ayudará a resolver la situación planteada.



Sean $P: \text{Perímetro}$ y $A: \text{Área}$

Sabemos $P = 2r + L$

Entonces $L = 200 - 2r$

Además, $A = \frac{1}{2}Lr$

Entonces $A = \frac{1}{2}(200 - 2r)r$

Es decir, $A = 100r - r^2 = -\left[r^2 - 100r + 50^2 - 50^2\right] = -\left[(r-50)^2 - 2500\right]$

Por lo tanto, $A = 2500 - (r-50)^2$

Finalmente, $A_{MÁX} = 2\ 500\ m^2$ y $r = 50$ m.

Rpta.: C

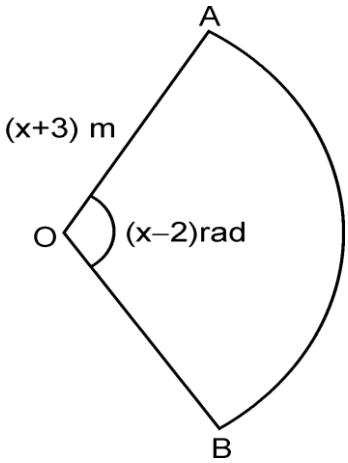
5. El tío de Lucero desea adquirir un terreno que tiene forma de sector circular para cultivar hortalizas, tal y como se representa en la figura. Si se sabe que el precio del metro cuadrado es de 80 dólares y el perímetro de dicho terreno es de 28 m, ¿cuál es el monto que tiene de depositar el tío de Lucero para adquirir el terreno de cultivo?

A) 3 290 dólares

B) 3 430 dólares

C) 3 340 dólares

D) 3 920 dólares



Solución:

Sean P: Perímetro y A: Área

A partir de la información dada, y como $P = 28\text{ m}$, se tiene:

$$x+3+x+3+(x-2)(x+3)=28$$
$$x^2+3x-28=0$$
$$(x+7)(x-4)=0$$

Entonces $x = 4\text{ m}$

Luego, $A = \frac{1}{2}(2)(7)^2\ \text{m}^2 = 49\ \text{m}^2$

Finalmente, el costo del terreno se obtiene de la siguiente manera:

$$C = 49(80)\ \text{dólares} = 3\ 920\ \text{dólares}$$

Por lo tanto, el costo del terreno asciende a $3\ 920$ dólares.

Rpta.: D

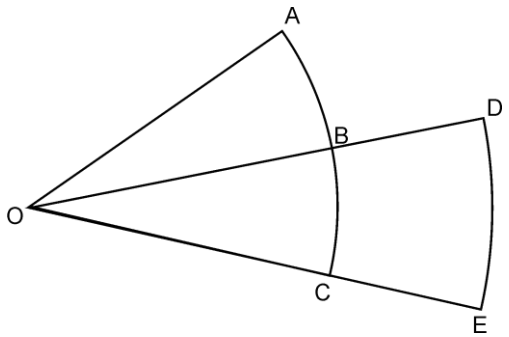
6. Don Rafael les deja una herencia a sus tres hijos, cuyas superficies respectivamente y en ese orden, están representados en la figura, por los sectores circulares AOB, BOC y el trapecio circular BDEC, tal y como se representa en la figura. Si $\frac{OE}{3} = \frac{OC}{2}$ y $DE = AC = 2\ BC$, ¿qué porcentaje más le corresponde a los dos primeros hijos respecto al tercer hijo?

A) $\frac{400}{3}$ %

B) $\frac{100}{3}$ %

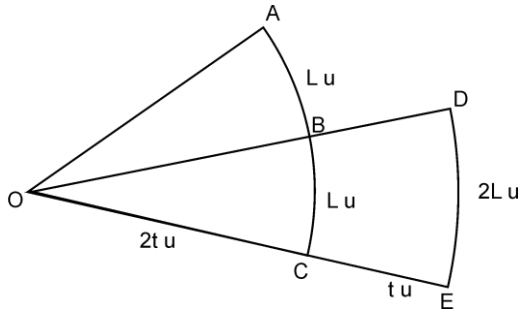
C) 33 %

D) $\frac{200}{3}$ %



Solución:

Nos apoyaremos en una representación gráfica, para poder comprender de una mejor forma la situación que nos plantea el ejercicio:



Además, sabemos $DE = AC = 2\ \underset{L}{BC}$ y $\frac{OE}{3} = \frac{OC}{2} = t$

Luego, $\text{Área}_{\text{Sector AOC}} = \frac{1}{2}(2L)(2t) = 2Lt \ \ u^2$ y

$\text{Área}_{\text{TRAP. CIRC.}} = \frac{1}{2}(3L)(t) = \frac{3Lt}{2} \ \ u^2$

Finalmente, para saber qué porcentaje más reciben los dos primeros hijos respecto al tercer hijo, basta proceder de la siguiente manera:

$$\left(\frac{2Lt - \frac{3Lt}{2}}{\frac{3Lt}{2}}\right).100\ \% = \frac{100}{3}\%\ .$$

Por lo tanto, los dos primeros hijos reciben $\frac{100}{3}\%$ más respecto al tercer hijo.

Rpta.: B

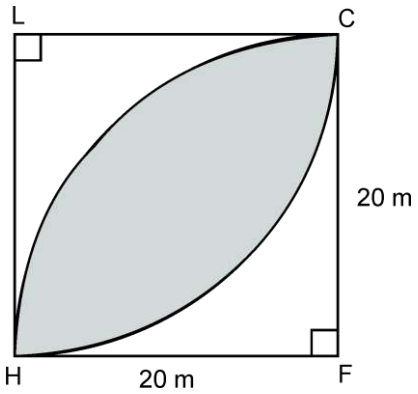
7. **H**arumi (H), **L**ucero (L), **C**ecilia (C) y **F**abiana (F) se ubican en un determinado instante en las esquinas de un parque tal y como se representa en la figura adjunta. La municipalidad desea sembrar rosas en la región sombreada, para lo cual contrata a un jardinero. Si CFH y CLH representan sectores circulares en ese instante y el jardinero cobra $\frac{5}{2(\pi-2)}$ soles por metro cuadrado, ¿cuál es el monto que debe pagar la municipalidad al jardinero por el trabajo realizado?

A) 500 soles

B) 400 soles

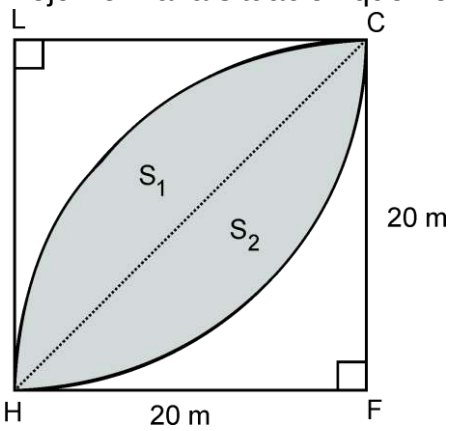
C) 400π soles

D) 500π soles



<u>Solución</u>:

Nos apoyaremos en una representación gráfica, para poder comprender de una mejor forma la situación que nos plantea el ejercicio:



Notemos que: $S_1 = S_2$

Por lo tanto, el área de la región sombreada viene dada por:

$$A_{SOM} = 2S_1$$

Entonces,

$$A_{SOM} = 2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 20^2 - \frac{1}{2}\cdot 20^2\right] = 200(\pi-2)\ m^2$$

Finalmente, lo que tiene que pagar la municipalidad por sembrar las rosas se obtiene de la siguiente manera:

$$C = 200(\pi - 2)\cdot\frac{5}{2(\pi-2)}\ \text{soles} = 500\ \text{soles}\ .$$

Por lo tanto, el monto que la municipalidad le tiene que pagar al jardinero por su trabajo realizado asciende a 500 soles.

Rpta.: A

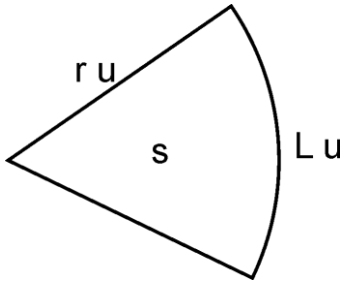
8. La Sra. Benita tiene en su chacra una parcela en forma de un sector circular tal y como se representa en la figura. Se sabe que ella desea ampliar dicho terreno, manteniendo su forma original cuya área es $S\ u^2$. Para ello, si su arco se disminuye en 10% y su radio se incrementa en 30%, ¿cuál es el área del terreno ampliado de la Sra. Benita?

A) $107\%\ S\ u^2$

B) $115\%\ S\ u^2$

C) $120\%\ S\ u^2$

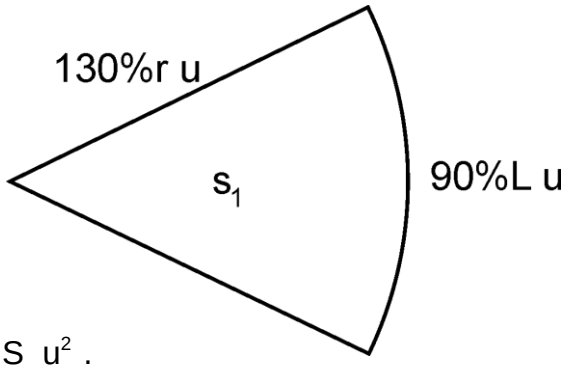
D) $117\%\ S\ u^2$



<u>Solución</u>:

Como S es el número que representa el área del terreno original, se tiene: $S = \frac{1}{2}Lr$

Luego, para comprender de mejor forma la situación planteada, nos apoyamos en una representación gráfica, de donde obtenemos:



$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{130}{100}\right)\left(\frac{90}{100}\right)Lr = \left(\frac{117}{100}\right)S = 117\ \%\ S\ \ u^2\ .$$

Por lo tanto, el área del terreno ampliado de la Señora Benita es $117\%\ S\ u^2$.

Rpta.: D

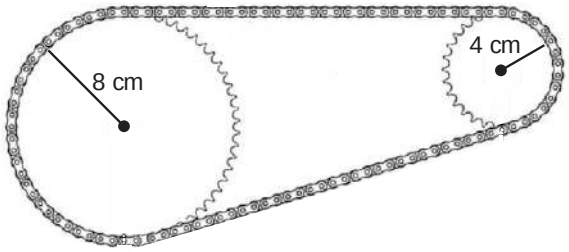
9. Los piñones que enlazan la cadena de la bicicleta de Marco Antonio tienen 8 cm y 4 cm de radio, tal y como se muestra en la figura. ¿A cuántas revoluciones por segundo gira el piñón pequeño si el piñón grande gira a 28 revoluciones por segundo?

A) 58

B) 56

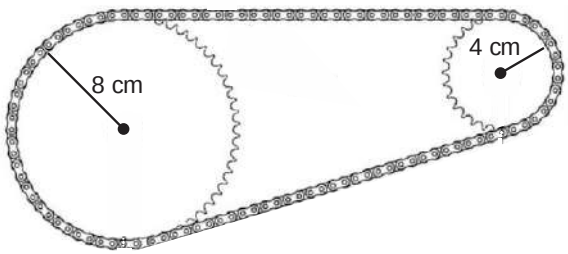
C) 48

D) 54



Solución:

A partir de los datos proporcionados, y con ayuda de una representación gráfica se tiene:



Si L_c es la longitud recorrida por el centro del piñón grande y N_V : número de vueltas, entonces $N_V = \dfrac{L_c}{2\pi(8)}$

$$\Rightarrow \quad L_c = n_v(2\pi)(8) = (28)(2\pi)(8) \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad L_c = 448\pi \text{ cm}$$

Como la longitud recorrida por el centro del piñón chico es igual a la longitud del piñón grande; entonces, el número de vueltas del piñón chico es:

$$n_v = \frac{448\pi}{2\pi(4)} = 56 \text{ vueltas} = 56 \text{ rev/seg}.$$

Rpta.: B

10. Luis Fabián se desplaza en su bicicleta siguiendo una trayectoria rectilínea. Si los radios de las ruedas son $(x+3)$ cm y $(x-3)$ cm y además, se sabe que en un determinado momento las ruedas de mayor y menor radio dieron $(x-8)$ vueltas y $(x-3)$ vueltas respectivamente, determine la cantidad de vueltas que dieron ambas ruedas.

A) 55 B) 77 C) 53 D) 61

Solución:

A partir de la información dada, donde

N_V = Número vueltas rueda mayor radio

n_V = Número vueltas rueda menor radio

$$\underset{x-8}{N_V} = \frac{L}{2\pi\,(x+3)} \quad \Rightarrow \quad L = 2\pi\,(x+3)(x-8)$$

$$\underset{x-3}{n_V} = \frac{L}{2\pi\,(x-3)} \quad \Rightarrow \quad L = 2\pi\,(x-3)(x-3)$$

Luego, $2\pi\left(x^2-5x-24\right) = 2\pi\left(x^2-6x+9\right)$

Entonces, $x = 33$

Finalmente, como la cantidad de vueltas que dan las dos ruedas se denota por N,se tiene:

$$N = x-8+x-3 = 2x-11 = 55 \text{ vueltas}.$$

Es decir, ambas ruedas dan 55 vueltas.

Rpta.: A

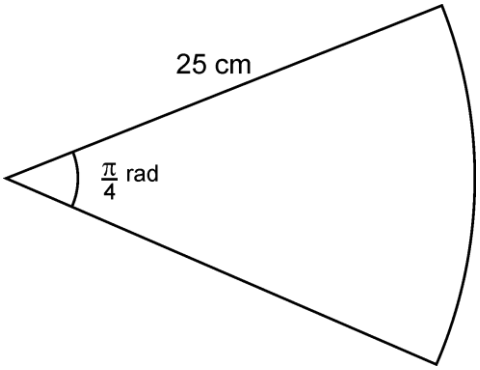
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Carmen quiere dedicarse a la venta de abanicos en forma de sector circular. Si la medida del ángulo central es $44°59'60''$ y su radio mide 25 cm, determine la superficie de los abanicos que Carmen tiene para vender.

A) $\frac{625\pi}{4}$ cm^2 B) $\frac{625\pi}{8}$ cm^2 C) $\frac{625\pi}{3}$ cm^2 D) $\frac{625\pi}{2}$ cm^2

Solución:

A partir de la información dada en el enunciado, se tiene:



$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)(25)^2 = \frac{625\pi}{8}\ \text{cm}^2.$$

Rpta.: B

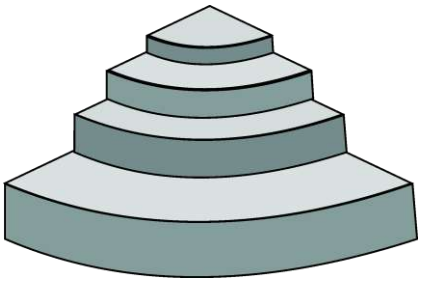
2. Julián, diseñador de interiores desea recubrir el contorno de la escalera que se muestra en la figura. Determine la longitud del recubrimiento, si se sabe que los pasos tienen 35 cm (ancho de los peldaños), los contrapasos 25 cm (altura de los peldaños) y la medida de su ángulo central es $\left(\frac{720}{7}\right)°$.

A) $80(6\pi+2)$ cm

B) $40(2\pi+6)$ cm

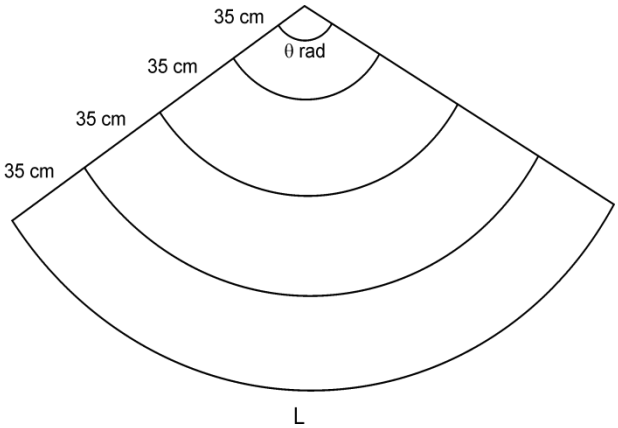
C) $80(\pi+6)$ cm

D) $40(6\pi+2)$ cm



Solución:

A partir de los datos proporcionados, se tiene:



$$\theta = \left(\frac{720}{7}\right)° = \left(\frac{720}{7}\right)° \cdot \frac{\pi\text{rad}}{180°} = \frac{4\pi}{7}\text{rad}.$$

Además, $L = \left(\frac{4\pi}{7}\right)(140) = 80\pi$

Si lo que se desea es recubrir el contorno de lo que se muestra en la figura, nos vamos a enfocar en calcular el borde, a lo cual vamos a denotar con C_R:

$$C_R = 140 + 140 + 80\pi + 25 \cdot 8 = (480 + 80\pi) \text{ cm} .$$

Por lo tanto, la longitud del recubrimiento que el diseñador de interiores necesita para lograr su objetivo es $80(\pi + 6)$ cm.

Rpta.: C

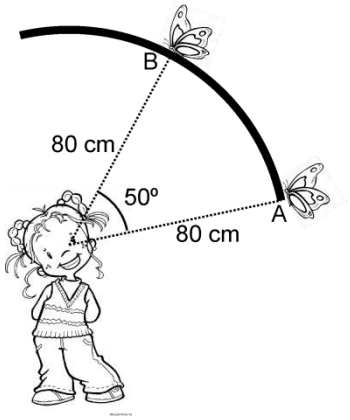
3. Una mariposa se encuentra volando por encima de la cabeza de Natti. Si en un determinado instante ella levanta la mirada y observa que la mariposa describe una trayectoria curva de forma circular tal y como se muestra en la figura, determine la longitud que recorre la mariposita para ir del punto A al punto B.

A) $\frac{100\pi}{9}$ cm

B) $\frac{9\pi}{200}$ cm

C) $\frac{200\pi}{9}$ cm

D) $\frac{9\pi}{100}$ cm



<u>Solución</u>:

A partir de los datos proporcionados y de la representación gráfica dada, se tiene:

$$50° = 50° \cdot \frac{\pi \text{rad}}{180°} = \frac{5\pi}{18} \text{rad} .$$

Sea L la longitud que recorre la mariposita desde el punto A hasta el punto B

Luego,

$$L = \left(\frac{5\pi}{18}\right) 80 \text{ cm} = \frac{200\pi}{9} \text{ cm} .$$

Rpta.: C

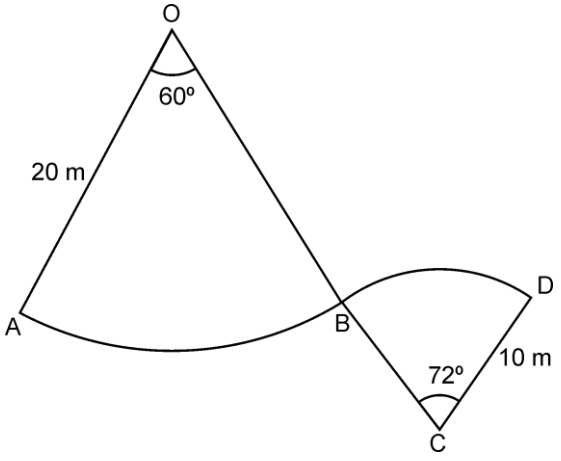
4. En la figura se muestra un camino que consta de dos arcos. Si AOB y BCD son sectores circulares, determine la longitud de dicho camino.

A) $\frac{25\pi}{3}$ m

B) $\frac{32\pi}{3}$ m

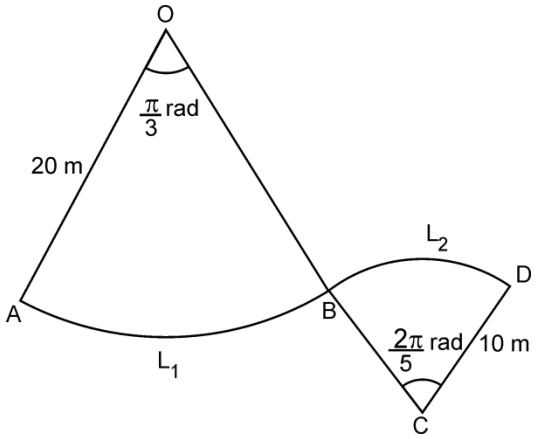
C) $\frac{52\pi}{3}$ m

D) $\frac{47\pi}{3}$ m



Solución:

A partir de la información dada, se tiene que:



Sea

$$L_T = L_1 + L_2$$

Entonces,

$$L_T = \frac{20\pi}{3} + 4\pi = \frac{32\pi}{3} \text{ m}.$$

Por lo tanto, la longitud del camino es $\frac{32\pi}{3}$ m .

Rpta.: B

5. Antonella se traslada en su bicicleta sobre una pista rectilínea para recoger a su hermana Alexa, desde su casa hasta su centro de estudios. Si la rueda delantera que tiene como diámetro 70 cm recorre 18π hm y N representa el número de vueltas que da dicha rueda, determine $\frac{7N}{300}$.

A) 60 B) 50 C) 70 D) 80

Solución:

A partir de la información dada, y teniendo en cuenta que N representa el número de vueltas que da la rueda, se tiene:

$$N_v = \frac{L}{2\pi\, r} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1800\pi}{2\pi(0{,}35)} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{18000}{7}$$

Luego, $\frac{7N}{300} = \frac{7}{300}\left(\frac{18000}{7}\right) = 60$.

Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

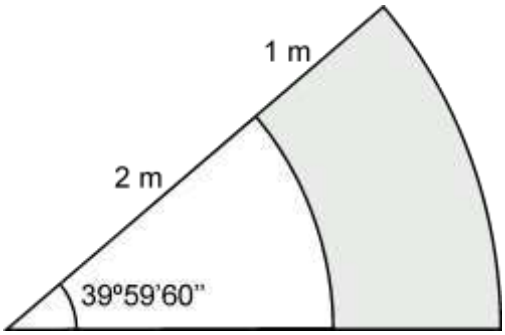
1. El Sr. Céspedes desea cercar con alambre un terreno que tiene forma de trapecio circular, tal y como se representa en la figura. En base a la información dada, ¿cuántos metros de alambre necesitará el Sr. Céspedes para cercar dicho terreno?

A) $\left(\frac{9\pi}{2}+5\right)$ m

B) $\left(\frac{10\pi}{9}+2\right)$ m

C) $\left(\frac{5\pi}{4}+3\right)$ m

D) $\left(\frac{6\pi}{5}+1\right)$ m



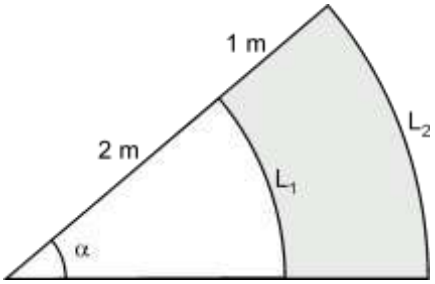
Solución:

A partir de la información proporcionada en la gráfica, se tiene que la medida del ángulo central es $\alpha = 40° = 40° \cdot \frac{\pi \text{rad}}{180°} = \frac{2\pi}{9}\text{rad}$.

Luego, hallamos las medidas de las respectivas longitudes de arco

$$L_1 = \frac{2\pi}{9}.2\text{m} = \frac{4\pi}{9}\text{m}$$

$$L_2 = \frac{2\pi}{9}.3\text{m} = \frac{6\pi}{9}\text{m}$$



Denotemos con E a la cantidad de alambre que necesita el Sr. Céspedes para cercar el terreno en mención.

$$E = L_1 + L_2 + 1\text{m} + 1\text{m}$$

$$E = \frac{4\pi}{9}\text{ m} + \frac{6\pi}{9}\text{ m} + 2\text{ m}$$

$$E = \left(\frac{10\pi}{9}+2\right)\text{ m}$$

Por lo tanto, el Sr. Céspedes necesitará aproximadamente $\left(\frac{10\pi}{9}+2\right)$ m de alambre para cercar dicho terreno.

Rpta.: B

2. El Sr. Sifuentes tiene un terreno en forma de sector circular en el cual siembra maíz. Debido a la temporada de lluvias, el radio de su terreno ha disminuido 32 metros sin que el ángulo central varíe. Si inicialmente el terreno es de radio 420 m y de longitud de arco 105π m, determine la nueva longitud de arco después de la temporada de lluvias.

A) 87π m B) 85π m C) 97π m D) 95π m

Solución:

Sabemos que $\theta=\frac{L}{r} \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{105\pi}{420}=\frac{\pi}{4}$ rad

Luego, $L_{\text{SECTOR RESULTANTE}}=388\left(\frac{\pi}{4}\right)=97\pi$ m.

Rpta.: C

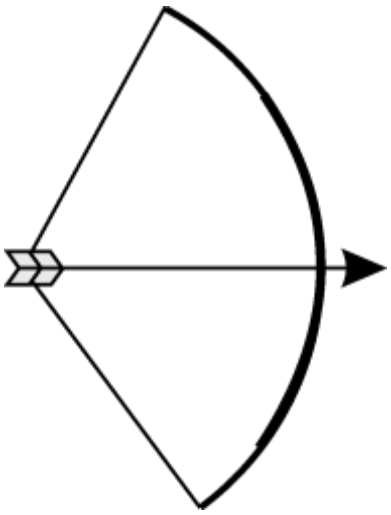
3. Antonio sujeta su arco de flecha de tal manera que se forme un sector circular, tal y como se representa en la figura adjunta. Se sabe que la suma de la longitud del arco y los dos radios es igual a 120 cm. En base a la información dada, determine la longitud del arco de flecha, si el área de la región del sector circular es máxima.

A) 60 cm

B) 45 cm

C) 50 cm

D) 75 cm



Solución:

Consideremos

r : Radio

L : Longitud de arco

S : Área

Luego, a partir de la información proporcionada, se tiene:

$$L+2r=120 \quad \Rightarrow \quad L=120-2r$$

Por lo tanto,

$$S=\frac{L.r}{2}=\frac{(120-2r)r}{2}=60r-r^2$$

$S = -\left(r^2 - 60r + 900\right) + 900$

$S = 900 - (r - 30)^2$

Para que el área sea máxima, la medida del radio es $r = 30\,\text{cm}$,

Finalmente, $L = 60\ \text{cm}$.

Rpta.: A

4. Miguel observa en el reloj de pared de su sala, que son las 8 am cuando se dirige al mercado para realizar las compras. Al retornar, se percata que la punta del minutero cuya longitud es de 15 cm ha descrito un arco cuya longitud es de 20π cm. En base a ello, determine a qué hora Miguel regresó a su casa.

A) 8:20 am B) 8:50 am C) 8:40 am D) 8:30 am

<u>Solución</u>:

Sea θ el ángulo que describe el minutero. En base a ello, tenemos que:

$$15\theta = 20\pi$$

Luego, $\theta = \dfrac{4\pi}{3}\text{rad} = 240°$

Como $5' \Leftrightarrow 30°$

Entonces

$40' \Leftrightarrow 240°$

Por lo tanto, son las 8.40 am

Rpta.: C

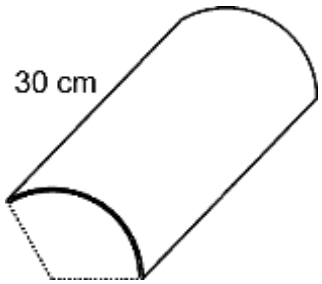
5. En una empresa se fabrica tejas especiales de techo de 30 cm de largo cuyos extremos son arcos de 4 cm de radio y ángulo central de 120°, tal y como se representa en la figura. ¿A cuánto asciende el costo de producción de un millar y medio de este tipo de tejas, si el precio por metro cuadrado es de 10 soles?

A) 130π soles

B) 150π soles

C) 140π soles

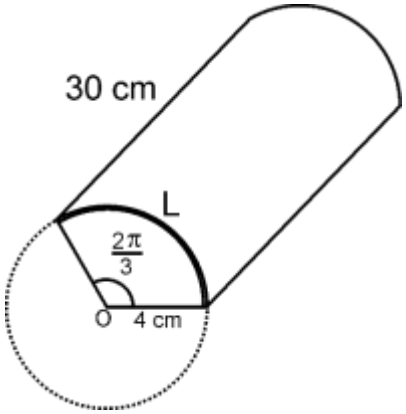
D) 120π soles



<u>Solución</u>:

A partir de la información, se tiene la siguiente representación gráfica, la misma que nos ayudará a resolver la situación planteada.

Sea L la longitud de la teja de techo



$$L = 4\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}$$

Luego, el área de cada teja de techo puede obtenerse de la siguiente forma:

$$S = \left(\frac{8\pi}{3}\right)(30) \text{ cm}^2 = \left(\frac{8\pi}{1000}\right) \text{ m}^2 = \left(\frac{\pi}{125}\right) \text{ m}^2$$

Así, el costo de producción de un millar y medio de tejas de techo de este tipo se obtiene de la siguiente manera:

$$C = \left(\frac{\pi}{125}\right)(10)(1500) \text{ soles} = 120\pi \text{ soles}.$$

Por lo tanto, el costo asciende a 120π soles aproximadamente.

Rpta.: D

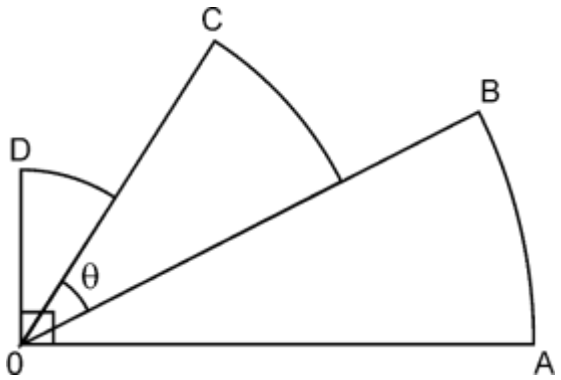
6. En la figura se representa la vista frontal de un porta lapiceros, el mismo que está compuesto por tres sectores circulares concéntricos, cuyas longitudes de arco son iguales. Si se sabe que el diseñador lo elaboró de tal forma que $6OD = 3OC = 2OB$, determine la medida del ángulo θ.

A) $\frac{5\pi}{22}$ rad

B) $\frac{3\pi}{22}$ rad

C) $\frac{\pi}{22}$ rad

D) $\frac{5\pi}{11}$ rad



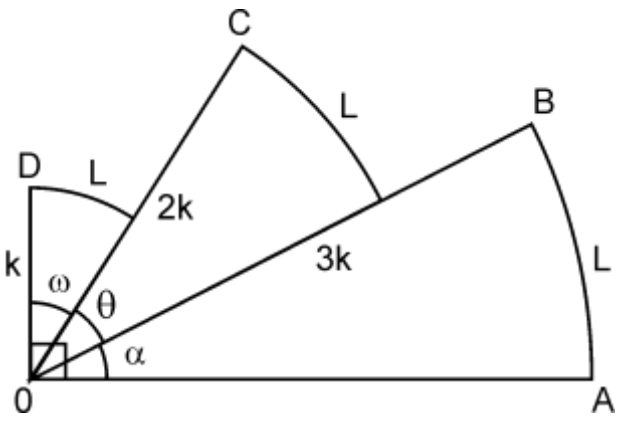
<u>Solución</u>:

Sabemos $6OD = 3OC = 2OB$

Entonces $OD = \frac{OC}{2} = \frac{OD}{3} = k$

Nos apoyaremos en una representación gráfica, para poder comprender de una mejor forma la situación que nos plantea el ejercicio:

$$\begin{cases} \alpha(3k) = L & \Rightarrow & \alpha = \dfrac{L}{3k} \\ \theta(2k) = L & \Rightarrow & \theta = \dfrac{L}{2k} \\ \omega(k) = L & \Rightarrow & \omega = \dfrac{L}{k} \end{cases}$$



Como $\alpha + \theta + \omega = \dfrac{\pi}{2}$

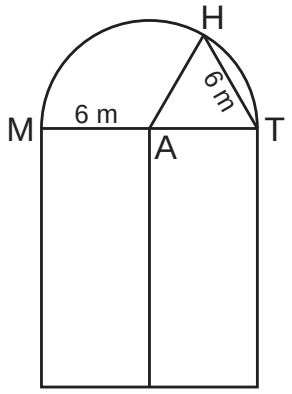
$$\Rightarrow \quad \frac{L}{3k} + \frac{L}{2k} + \frac{L}{k} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{k} = \frac{3\pi}{11}$$

Por lo tanto, $\theta = \dfrac{3\pi}{22}\text{rad}$.

Rpta.: B

7. La Sra. Benita observa el arco de la puerta de la iglesia de 12 metros de ancho, el cual forma parte de un sector circular, ya que desea colocar algunos adornos en los puntos M y H los cuales se representan en la figura. A partir de la información dada en la gráfica, determine la longitud del arco de la puerta del punto M al punto H.



A) 4π m

B) 2π m

C) 6π m

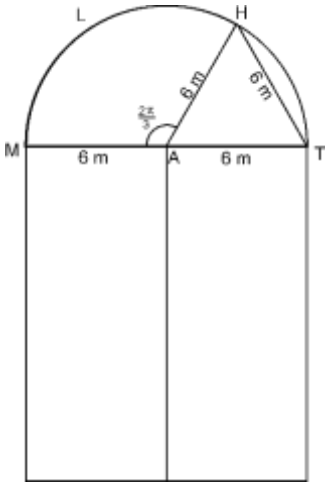
D) 8π m

Solución:

A partir de la gráfica y de los datos proporcionados en el enunciado, se tiene:

$$L = 6\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\pi \text{ m}$$

Por lo tanto, la longitud del arco de la puerta del punto M al punto H es 4π m.



Rpta.: A

8. Lucas tiene dos monedas cuyas medidas de sus radios son R cm y r cm $(R > r)$. Si Lucas las hace rodar una sola vez por el perímetro de su mesa, la diferencia entre las vueltas que dieron ambas monedas es igual al número de vueltas que daría la moneda de su primo Julián al hacerlo girar una sola vez por el perímetro de dicha mesa. En base a ello, determine el radio de la moneda de Julián.

A) $\frac{Rr}{R+r}$ cm B) $\frac{Rr}{R-r}$ cm C) $\frac{R}{R+r}$ cm D) $\frac{R-r}{Rr}$ cm

Solución:

A partir de la situación dada, se desprende lo siguiente:

L: Perímetro de la mesa.

$n_R = \frac{L}{2\pi R}$; $n_r = \frac{L}{2\pi r}$

Luego,

x: Radio de la moneda de Julián

$n_x = \frac{L}{2\pi x} = \frac{L}{2\pi r} - \frac{L}{2\pi R}$

$x = \frac{Rr}{R-r}$ cm.

Por lo tanto, el radio de la moneda de Julián es $\frac{Rr}{R-r}$ cm.

Rpta.: B

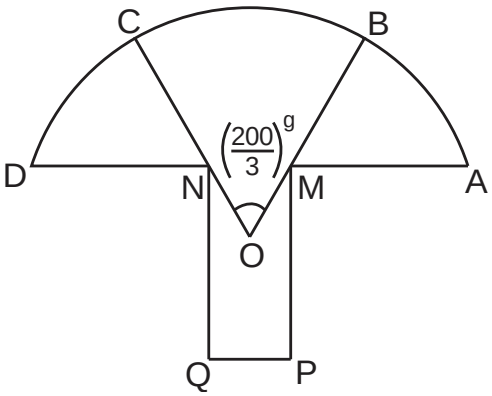
9. Marco Antonio debe recorrer el circuito que se representa en la figura adjunta. Los puntos A, B, C y D son puntos donde Marco Antonio puede hidratarse, el punto P es el punto de partida y la meta se ubica en el punto Q. Si $BM = 2MO = 6$ km, BOC es un sector circular y la velocidad de Marco Antonio es $\frac{11\pi}{2}$ km/h, ¿cuánto tiempo tiene que esperar Marco Antonio para volver a hidratarse después de pasar por el punto B?

A) $\frac{340}{11}$ minutos

B) $\frac{350}{11}$ minutos

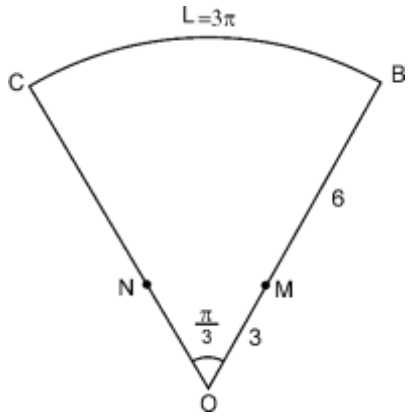
C) $\frac{370}{11}$ minutos

D) $\frac{360}{11}$ minutos



Solución:

A partir de los datos proporcionados, y con ayuda de una representación gráfica se tiene que la longitud del arco BC es:



$L_{BC} = \frac{9\pi}{3} = 3\pi$

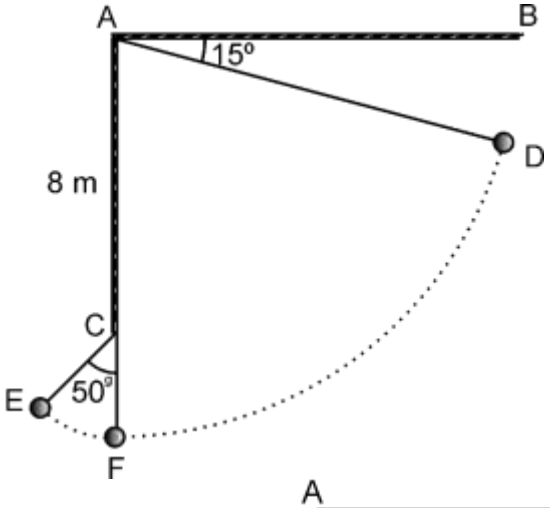
Como $3\pi = \frac{11\pi}{2}t$, se tiene que

$t = \frac{6}{11}$ horas $= \frac{360}{11}$ minutos.

Finalmente, para que Luis pueda volver a hidratarse después de pasar por el punto B, debe transcurrir $\frac{360}{11}$ min.

Rpta.: D

10. En la figura se representa un péndulo, cuyo punto de suspensión es el vértice formado por las barras metálicas perpendiculares AB y AC. Determine el área barrida por el péndulo, al moverse desde la posición D hasta la posición E, si se sabe que $DF + FE = 6\pi$ m.



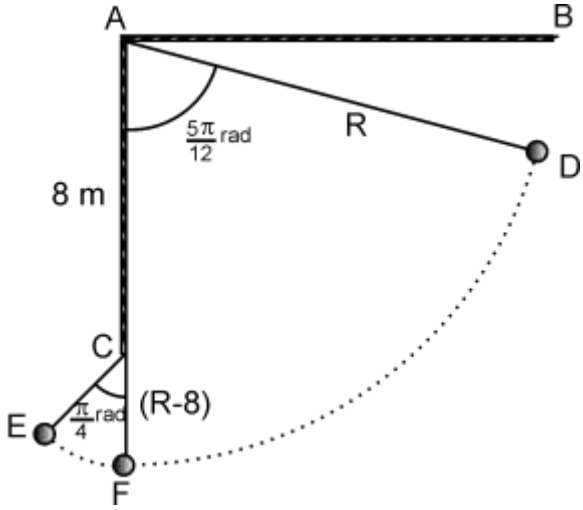
A) 30π m^2

B) 16π m^2

C) 32π m^2

D) 15π m^2

Solución:



En el sector circular DAF:

Sea $AD = R$ u, entonces $DF = \frac{5R\pi}{12}$

Sabemos que $DF + FE = 6\pi$

$\Rightarrow \quad EF = 6\pi - \frac{5R\pi}{12}$

En el sector circular ECF

$$\overset{\frown}{EF} = (R-8)\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 6\pi - \frac{5R\pi}{12} = (R-8)\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 6\pi + 2\pi = \frac{R\pi}{4} + \frac{5R\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \quad 8\pi = \frac{8R\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad R = 12$$

Área = Área ECF + Área DAF

$$= \frac{4\pi}{2} + \frac{12(5\pi)}{2} = 32\pi \text{ m}^2.$$

Finalmente, el área barrida por el péndulo es 32π m^2.

Rpta.: C

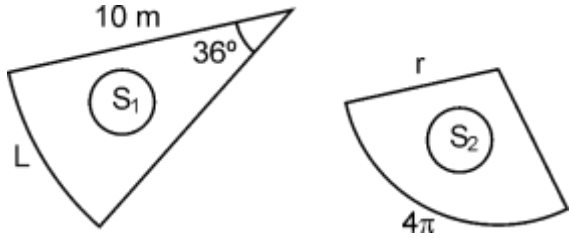
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Las áreas de los sectores circulares S_1 y S_2 son iguales. El ángulo central y el radio de S_1 miden 36 grados sexagesimales y 10 metros. Si el arco de S_2 mide 4π metros, halle la suma de los perímetros de S_1 y S_2.

A) $(32+8\pi)$ m B) $(30+6\pi)$ m C) $(32+6\pi)$ m D) $(30+8\pi)$ m

Solución:

De la representación gráfica dada y de los datos del enunciado, tenemos:



$$\text{Área}_{S_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}\right)(10)^2 = 10\pi \quad \text{y} \quad L = \frac{\pi}{5}(10) = 2\pi$$

$$\text{Área}_{S_2} = 10\pi = \frac{1}{2}(4\pi)r \quad \Rightarrow \quad r = 5$$

Además, sean

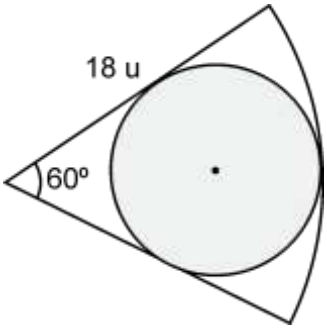
$P_1 =$ Perímetro de $S_1 = (10+10+2\pi) = (20+2\pi)$ metros

$P_2 =$ Perímetro de $S_1 = (5+5+4\pi) = (10+4\pi)$ metros

Por lo tanto, $P_1 + P_2 = (30+6\pi)$ metros.

Rpta.: B

2. Lucero y Fabiana van de compras y encuentran un abanico que les agrada mucho. Sin embargo, quisieran colocarle un estampado de forma circular como se representa en la figura. Con los datos proporcionados, en la figura, determine el área del abanico que quedaría sin estampar.



A) 36π u^2

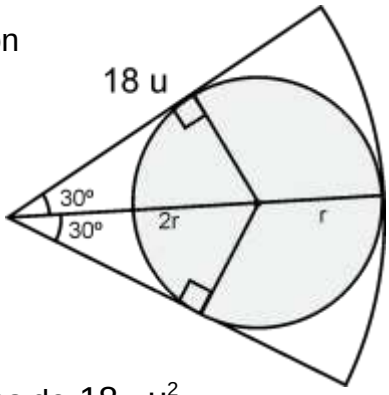
B) 12π u^2

C) 18π u^2

D) 30π u^2

Solución:

A partir de los datos proporcionados y de la representación gráfica dada, se tiene:



$3r = 18 \quad \Rightarrow \quad r = 6$

Además, $\text{Área}_{\text{ABANICO}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)(18)^2 = 54\pi$

y $\text{Área}_{\text{CÍRCULO}} = \pi(6)^2 = 36\pi$

Entonces $\text{Área}_{\text{SIN ESTAMPAR}} = 18\pi$ u^2.

Finalmente, el área del abanico que queda sin estampar es de 18π u^2.

Rpta.: C

3. Rafael y su prima Lucero están jugando con plastilina y moldes que tienen forma de sector circular. Lucerito se percata que si a uno de esos moldes le duplican su ángulo central y a su radio le aumentan 3 u, van a obtener un nuevo molde cuya longitud de arco es el quíntuple de la longitud del arco inicial. Rafael le pide a Lucero que busque un molde cuyo radio sea el quíntuplo del radio del molde inicial. ¿Cuánto mide el radio del molde que debe buscar Lucerito?

A) 10 u B) 5 u C) 8 u D) 7 u

Solución:

Sea $L = \theta.r$

A partir de la información dada, se tiene que la longitud del nuevo sector circular viene dada por: $5L = (2\theta)(r+3)$

Entonces $5(\theta r) = (2\theta)(r+3)$

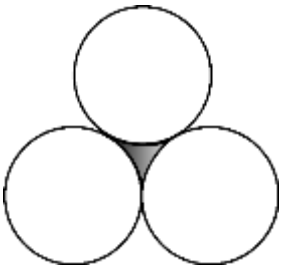
Luego $5r - 2r = 6$

Por lo tanto, $r = 2$ u

Así, $5r = 5(2\text{ u}) = 10$ u.

Rpta.: A

4. Antonio diseña un juguete con las mismas características del "spinner" tal como se representa en la figura. Si los tres discos tienen el mismo radio de longitud r cm, determine el perímetro de la región sombreada en términos del radio r.



A) $2\pi \cdot r$ cm B) $\frac{\pi \cdot r}{3}$ cm

C) $\pi \cdot r$ cm D) $\frac{\pi \cdot r}{2}$ cm

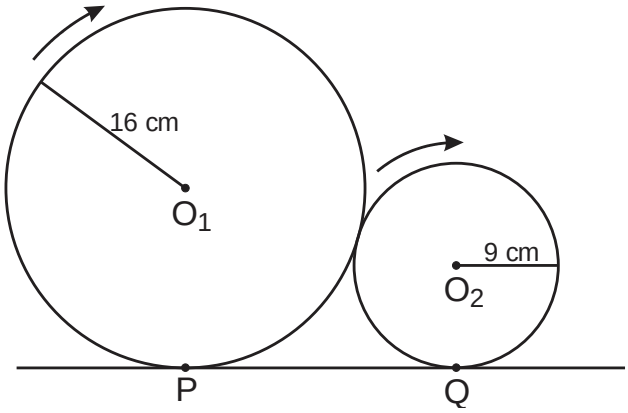
Solución:
A partir de la representación gráfica dada, se tiene que:

$$L_1 = \frac{\pi}{3} \cdot r = L_2 = L_3$$

Por lo tanto, $P_{SOM} = 3L_1 = \pi r$ cm.

Rpta.: C

5. En la clase de Cecilia, la profesora de Matemática les ha mostrado el esquema que se presenta en la figura adjunta. La profesora les menciona que la rueda mayor da 7 vueltas y que la rueda menor da 5 vueltas en las direcciones indicadas sobre una superficie plana. Si se sabe que Cecilia resolvió la tarea, la cual consistía en determinar la distancia que separa a los puntos P y Q luego de dar la cantidad de vueltas que se indica, ¿cuál fue dicha distancia?



A) 314π cm

B) $(314\pi + 24)$ cm

C) $(314\pi + 14)$ cm

D) $(224\pi + 24)$ cm

Solución:
A partir de la información dada, y teniendo en cuenta que P' y Q' son las ubicaciones de P y Q, luego de dar las vueltas indicadas, se tiene:

$$N_v = \frac{d(P,P')}{2\pi(16)} \Rightarrow 7 = \frac{d(P,P')}{2\pi(16)} \Rightarrow d(P,P') = 224\pi \text{ cm}$$

$$N_v = \frac{d(Q,Q')}{2\pi(9)} \Rightarrow 5 = \frac{d(Q,Q')}{2\pi(9)} \Rightarrow d(Q,Q') = 90\pi \text{ cm}$$

Luego, $d(P,Q) = d(P,P') + d(P',Q') + d(Q,Q')$

Entonces $d(P,Q) = 224\pi + 24 + 90\pi = (314\pi + 24)$ cm.

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

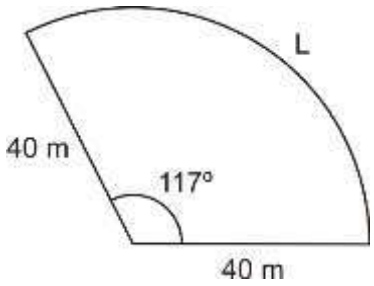
1. El Sr. Rojas desea cercar con alambre un terreno que tiene forma de sector circular, tal que su ángulo central y radio miden $117°$ y 40 m respectivamente. En base a la información dada, ¿cuántos metros de alambre necesitará el Sr. Rojas para cercar dicho terreno?

A) $(40+13\pi)$ m B) $(80+26\pi)$ m C) $(150-40\pi)$ m

D) $(80-13\pi)$ m E) $(100+40\pi)$ m

Solución:

De la información dada, se tiene la siguiente representación gráfica, la misma que nos ayudará a resolver la situación planteada.



Sea $\alpha = 117° = \dfrac{13\pi}{20}$ rad

Luego, $L = \dfrac{13\pi}{20}\cdot 40\text{ m} = 26\pi\text{ m}$

Entonces, $P = (80+26\pi)\text{ m}$.

Por lo tanto, el Sr. Rojas necesitará aproximadamente $(80+26\pi)$ m de alambre para cercar el terreno.

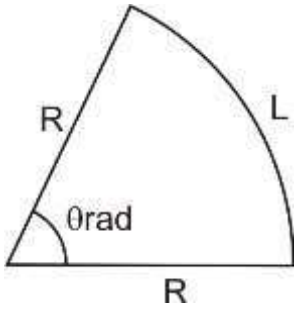
Rpta.: B

2. Sea S un sector circular tal que su ángulo central mide θ rad, el radio mide R u y la longitud de arco mide L u. Teniendo en cuenta la información dada y si $\theta R + L = \dfrac{100}{R}$, determine el área de S.

A) 32 u^2 B) 40 u^2 C) 25 u^2 D) 30 u^2 E) 28 u^2

Solución:

A partir de la información dada, se tiene:



Como $\theta R + L = \dfrac{100}{R}$, es claro que $LR = 50$

De esta manera, el área del sector circular es $25\ u^2$.

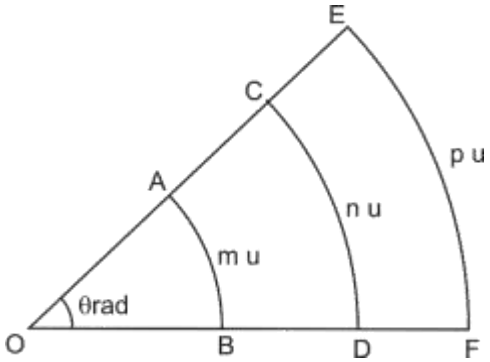
Rpta.: C

3. En la figura mostrada; AOB, COD y EOF son sectores circulares. Si $OB = a\ u$, $AC = b\ u$ y $DF = c\ u$, determine el valor de $2\left[\sqrt{\dfrac{(p-n)(n-m)}{bc}} - \dfrac{m}{a}\right]$.

A) 0 B) 2

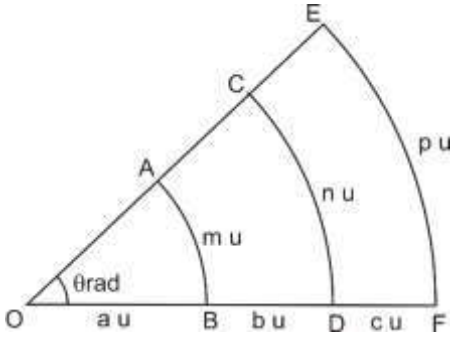
C) -2 D) -4

E) $\dfrac{1}{2}$



Solución:

A partir de la representación gráfica, se tiene:



$\theta \cdot a = m$, $\theta \cdot (a+b) = n$, $\theta \cdot (a+b+c) = p$

Luego, $\theta \cdot a + \theta \cdot b = n$

Entonces $\dfrac{n-m}{b} = \theta = \dfrac{m}{a}$

De manera análoga, se obtiene $\dfrac{p-n}{c} = \theta$

Luego, $2\left[\sqrt{\dfrac{(p-n)(n-m)}{bc}} - \dfrac{m}{a}\right] = 2\left[\sqrt{\theta^2} - \theta\right] = 0$.

Rpta.: A

4. La profesora de Trigonometría del Centro Pre Universitario de la UNMSM, le indica a sus alumnos que $S\ u^2$ es el área de un sector circular cuya medida de su ángulo central es $\left[\dfrac{a^g(2a)^m}{(3a)^m}\right]^\circ$ y la de su radio es $\dfrac{5\sqrt{17}}{17}$ u. En base a la información dada, determine el valor de S.

A) $\dfrac{3\pi}{20}$ B) $\dfrac{4\pi}{5}$ C) $\dfrac{5\pi}{9}$ D) $\dfrac{36\pi}{17}$ E) $\dfrac{5\pi}{36}$

<u>Solución</u>:

Sabemos que: $\left[\dfrac{a^g(2a)^m}{(3a)^m}\right]^\circ = \left[\dfrac{102a^m}{3a^m}\right]^\circ = 34° = \dfrac{17\pi}{90}\text{rad}$

Por lo tanto, el área del sector circular viene dado por: $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17\pi}{90}\right)\dfrac{25}{17} = \dfrac{5\pi}{36}\ u^2$.

Así, $S = \dfrac{5\pi}{36}$.

Rpta.: E

5. La puerta de la cocina de la cafetería principal de la UNMSM es de tipo vaivén. En base a ello, calcule el área de la región que determina el borde inferior de la puerta cuando gira 150^g si se sabe que dicho borde mide 1,2 m.

A) $\dfrac{27\pi}{50}\ m^2$ B) $\dfrac{9\pi}{50}\ m^2$ C) $45\pi\ m^2$ D) $\dfrac{7\pi}{25}\ m^2$ E) $\dfrac{14\pi}{9}\ m^2$

Solución:

A partir de la información, se tiene la siguiente representación gráfica, la misma que nos ayudará a resolver la situación planteada.

Como el ángulo de giro es $\alpha = 150^g = \frac{3\pi}{4}\text{rad}$

Entonces, el área de la región que determina el borde inferior de la puerta es:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)(1{,}2)^2 = \frac{27\pi}{50}\ \text{m}^2 .$$

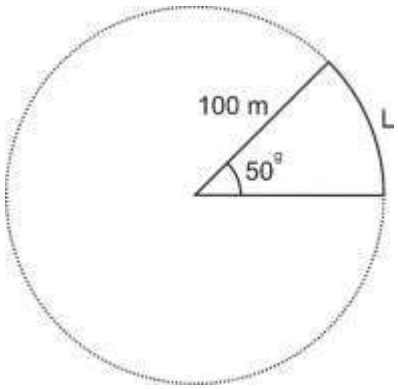
Rpta.: A

6. El profesor de Física le pide a sus alumnos que determinen la rapidez de un móvil, el cual se desplaza con movimiento uniforme sobre un arco de circunferencia de $200\ \text{m}$ de diámetro. Si el mejor alumno de la clase observa que en $20\ \text{s}$, el móvil recorre un arco cuyo ángulo central es 50^g, determine la rapidez de dicho móvil.

A) $\frac{3\pi}{5}\ \text{m/s}$ B) $\frac{5\pi}{8}\ \text{m/s}$ C) $\frac{2\pi}{5}\ \text{m/s}$ D) $\frac{5\pi}{4}\ \text{m/s}$ E) $\frac{4\pi}{5}\ \text{m/s}$

Solución:

Nos apoyaremos en una representación gráfica, para poder comprender de una mejor forma la situación que nos plantea el ejercicio:



Sabemos que $L = \frac{\pi}{4}(100) = 25\pi\ \text{m}$

Por otro lado, como el móvil se desplaza con movimiento uniforme, la rapidez viene dada por $\frac{5\pi}{4}\ \text{m/s}$.

Rpta.: D

7. Harumi observa el gráfico que le han dejado en el colegio a su hermana Cecilia en donde le indican que, AOB es un sector circular y CDB es una semicircunferencia cuyo radio mide 4 u. Además, la medida del ángulo AOB es $45°$ y el perímetro de la región sombreada es $M\text{ u}$. Si Harumi resolvió adecuadamente la tarea de su hermanita Cecilia, determine el valor de M.

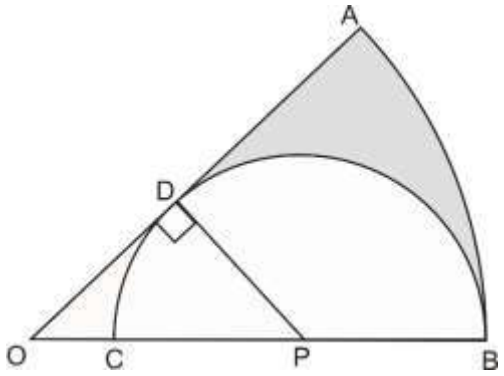
A) $\left(4-\sqrt{2}\right)\pi$

B) $4\pi+\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}-\pi$

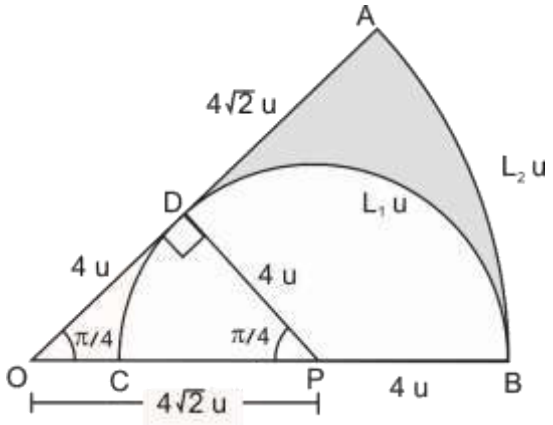
D) $8\sqrt{2}-2\pi$

E) $4\sqrt{2}+\left(4+\sqrt{2}\right)\pi$



Solución:

A partir de la gráfica y de los datos proporcionados en el enunciado, se tiene:



$$L_1=\frac{3\pi}{4}\cdot 4=3\pi$$

$$L_2=\frac{\pi}{4}\left(4+4\sqrt{2}\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)\pi$$

Por lo tanto, el perímetro de la región sombreada es: $4\sqrt{2}+\left(4+\sqrt{2}\right)\pi$ u.

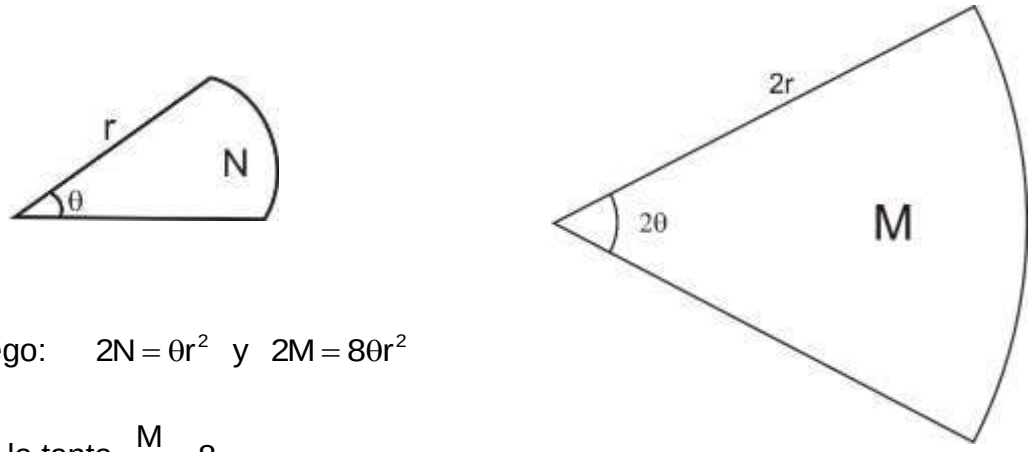
Rpta.: E

8. En uno de los ejercicios de trigonometría, Miguel observa que si se duplican las medidas del ángulo central y del radio de un sector circular se obtiene un nuevo sector de área $M\text{ u}^2$. Si el área del sector inicial es $N\text{ u}^2$, determine $\frac{M}{N}$.

A) 4 B) 16 C) 8 D) 12 E) 10

Solución:

A partir de la situación dada, se desprende la siguiente representación gráfica:

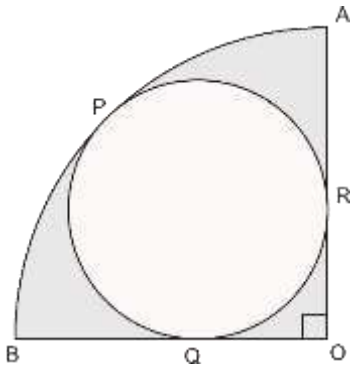


Luego: $2N = \theta r^2$ y $2M = 8\theta r^2$

Por lo tanto, $\frac{M}{N} = 8$.

Rpta.: C

9. En la figura mostrada, AOB es un sector circular cuyo radio mide 8 cm. Si P, Q y R son puntos de tangencia y $S\ u^2$ denota el área de la región sombreada, determine el valor de $\frac{S}{\pi} + 176$.



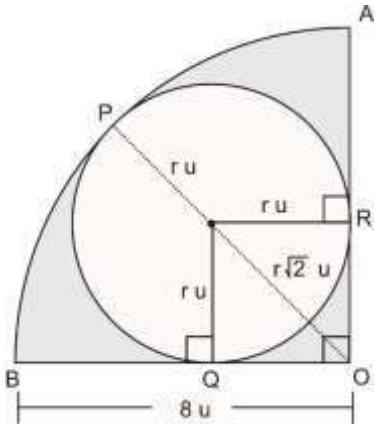
A) $82\sqrt{2}$ B) $182\sqrt{2}$

C) $128\sqrt{2}$ D) $136\sqrt{2}$

E) $\frac{152}{\sqrt{2}}$

Solución:

A partir de la representación gráfica y los datos proporcionados, se tiene:



Luego, $r\left(1+\sqrt{2}\right)=8 \quad \Rightarrow \quad r^2=64\left(3-2\sqrt{2}\right)$

Entonces, el área de la región sombreada viene dada por

$$S\ u^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)8^2-64\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi \ = \ \pi\left(128\sqrt{2}-176\right)\ u^2$$

Finalmente, $\frac{S}{\pi}+176=128\sqrt{2}$.

Rpta.: C

10. En la figura mostrada, la medida del radio de una rueda es 6 u y el diámetro de la semicircunferencia es 2148 u. Además, si se sabe que la rueda pequeña se desplaza desde A hasta B y sobre la semicircunferencia, determine la medida del ángulo θ.

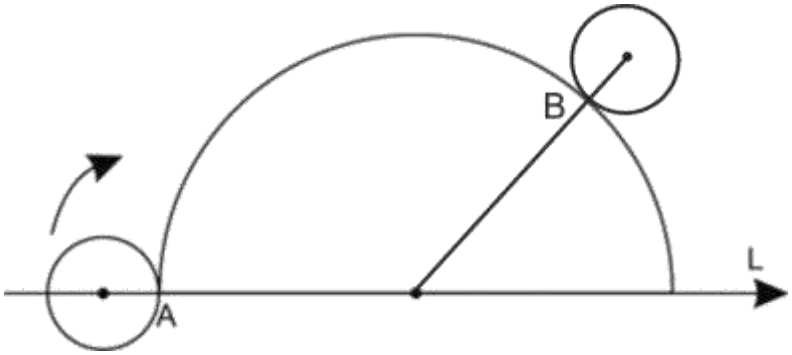
A) $\frac{2\pi}{3}$ rad

B) $\frac{\pi}{3}$ rad

C) $\frac{\pi}{4}$ rad

D) $\frac{3\pi}{4}$ rad

E) $\frac{\pi}{2}$ rad



<u>Solución</u>:

Sabemos que $n_{Vueltas}=\frac{L}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad 60=\frac{1080\cdot\theta}{2\pi(6)}$

Por lo tanto, $\theta=\frac{2\pi}{3}$ rad.

Rpta.: A

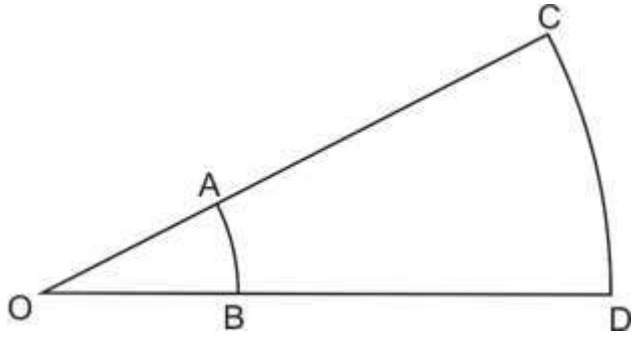
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura mostrada, AOB y COD son sectores circulares. Si $OC = 3OB$, calcule la relación entre el área del trapecio circular ABDC y el área del sector circular AOB.

A) 16 B) $\frac{1}{4}$

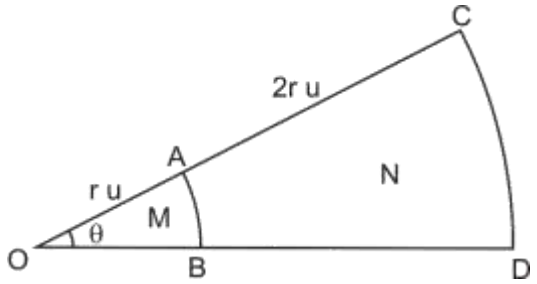
C) 4 D) $\frac{1}{8}$

E) 8



Solución:

De la representación gráfica dada y de los datos del enunciado, tenemos:



$M\ u^2 = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2$ y $N\ u^2 = \frac{1}{2}\theta \cdot 9r^2 - \frac{1}{2}\theta \cdot r^2 = 4\theta \cdot r^2$

Por lo tanto, $\frac{N}{M} = 8$.

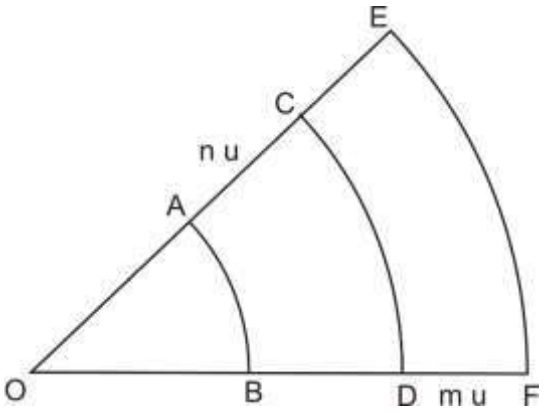
Rpta.: E

2. En la figura; AOB, COD y EOF son sectores circulares. Si $AB = m\ u$ y $EF = n\ u$, determine la longitud del arco CD en términos de m y n.

A) $\dfrac{m^2+n^2}{m+n}$ B) $\dfrac{m^2-n^2}{m+n}$

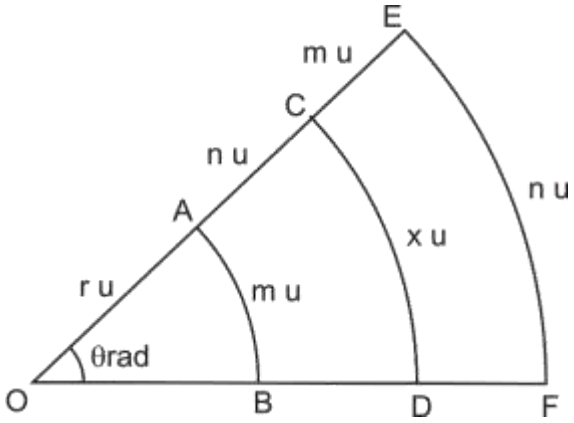
C) $\dfrac{m^2+n^2}{m-n}$ D) $\dfrac{2mn}{m+n}$

E) $\dfrac{2m^2}{m-n}$



<u>Solución</u>:

A partir de los datos proporcionados y de la representación gráfica dada, se tiene:



$\theta r = m$, $\theta(r+n) = x$, $\theta(r+n+m) = n$

De la tercera ecuación, tenemos $x + \theta \cdot m = n$ y $m + \theta \cdot n = n - \theta \cdot m$

Entonces $\theta = \dfrac{n-m}{n+m}$

Por lo tanto, reemplazamos este resultado en la segunda ecuación:

$$m + \left(\frac{n-m}{n+m}\right) \cdot n = x$$

Finalmente, se obtiene que: $x = \dfrac{m^2+n^2}{m+n}$.

Rpta.: A

3. El Sr. Sifuentes traslada todos los días a su hija Cecilia a su centro de estudios una distancia aproximada de 1,5 km a lo largo de una pista horizontal y plana. Si el diámetro de una de las llantas es de 0,6 m y N representa el número de vueltas que da dicha llanta, calcule el valor de $\frac{N\pi}{5}$.

A) $\frac{1}{10}$ B) 10 C) 7 D) 5 E) $\frac{1}{5}$

<u>Solución</u>:

Sabemos que $N_{Vueltas} = \frac{L}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad N_{Vueltas} = \frac{1500}{60\pi}$

Por lo tanto, $\frac{N\pi}{5} = 5$.

Rpta.: D

4. En la figura mostrada; AOB, OBC y OAD son sectores circulares. Si $OA = 15$ cm, determine el perímetro de la región sombreada.

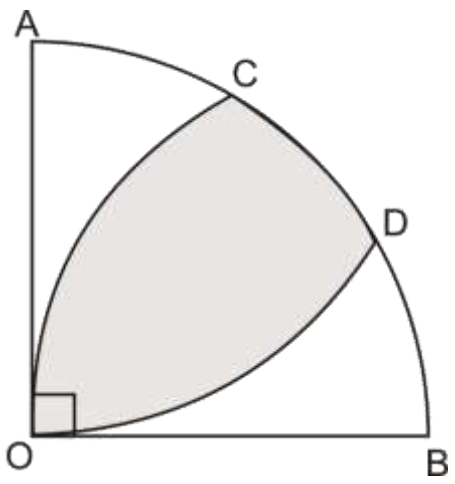
A) $10{,}5\pi$ cm

B) 10π cm

C) $12{,}5\pi$ cm

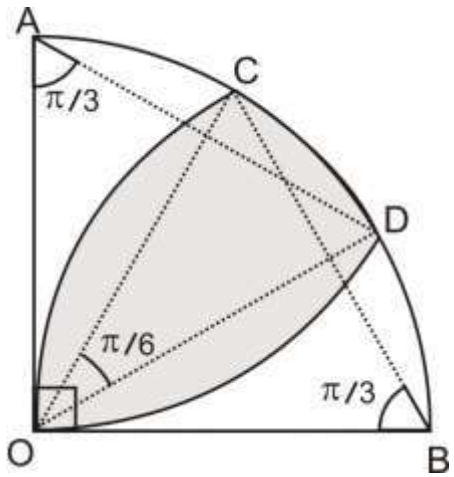
D) 12π cm

E) 15π cm



Solución:

A partir de la representación gráfica dada, se tiene que:



$OC = \frac{\pi}{3} \cdot 15 = 5\pi$, $OD = \frac{\pi}{3} \cdot 15 = 5\pi$ y

$CD = \frac{\pi}{6} \cdot 15 = \frac{5\pi}{2}$

Por lo tanto, $P_{SOM} = 10\pi + \frac{5\pi}{2} = 12{,}5\pi$ cm.

Rpta.: C

5. Un dibujante tenía como objetivo trazar un sector circular AOB de radio r u y longitud de arco 2 u. Pero este dibuja el sector circular mostrado en la figura que tiene el mismo ángulo central que el sector anterior y cuya área lo excede en $5\ u^2$. En base a la información dada, ¿cuál es la medida del ángulo central?

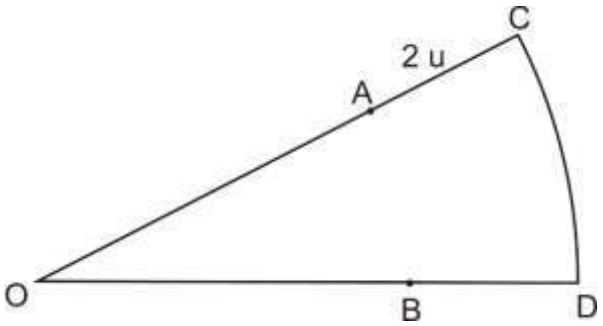
A) $\frac{\pi}{6}$ rad

B) $\frac{1}{2}$ rad

C) $\frac{\pi}{5}$ rad

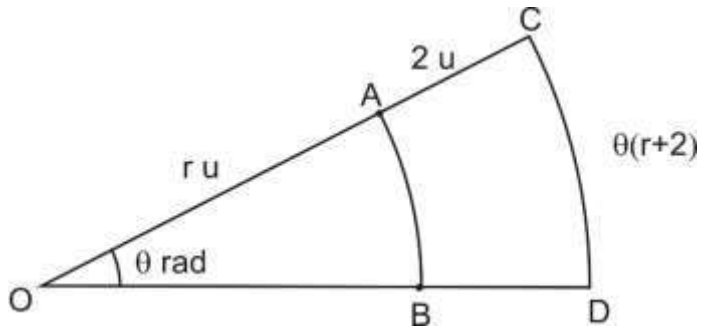
D) $\frac{1}{5}$ rad

E) 1 rad



Solución:

A partir de la información dada, se tiene la siguiente representación gráfica:



Área $_{ABDC} = 5\ u^2$ y $\theta \cdot r = 2$

Entonces $\frac{1}{2}\left[2+(r+2)\theta\right]\cdot 2 = 5$

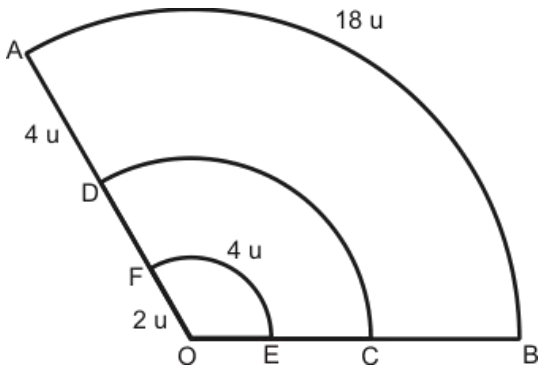
Por lo tanto, $\theta = \frac{1}{2}$ rad .

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Con la información proporcionada en la figura adjunta y considerando que; AOB, DOC y FOE son sectores circulares, calcule el área de la región del trapecio circular ABCD.



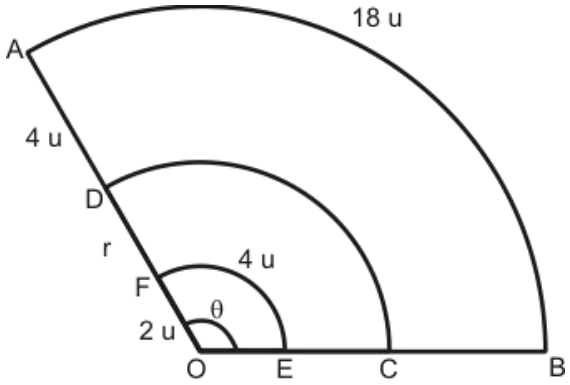
A) 22 u^2 B) 38 u^2

C) 56 u^2 D) 44 u^2

E) 88 u^2

Solución:

Sea



Sabemos $4 = 2\theta \Rightarrow \theta = 2$ rad

Luego, $(6+r)\theta = 18$

$\Rightarrow (6+r)2 = 18 \Rightarrow r = 3$

Entonces $L_{CD} = 5(2) = 10$

$\therefore \quad S_{ABCD} = \dfrac{(10+18)4}{2} = 56\ u^2$.

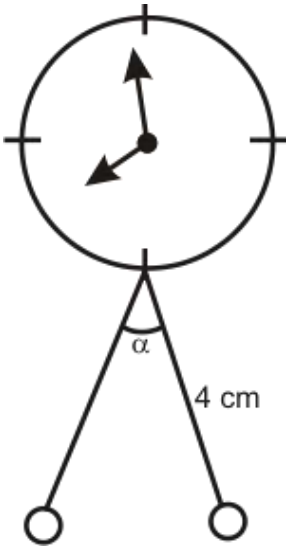
Rpta.: C

2. Si el péndulo de un reloj de pared mide $4\,\text{cm}$ y su punta recorre un arco de $5°\ 37'\ 30''$ por segundo, ¿cuántos metros recorre en un minuto el arco que describe la punta del péndulo?

A) $\dfrac{\pi}{40}$ m B) $\dfrac{15\pi}{2}$ m C) $\dfrac{\pi}{8}$ m D) $\dfrac{5\pi}{8}$ m E) $\dfrac{3\pi}{40}$ m

Solución:

De la información dada, se tiene la siguiente representación gráfica, la misma que nos ayudará a resolver la situación planteada.



Sea $\alpha = 5°37'30'' = \frac{\pi}{32}$ rad

En 1 segundo: $L = \frac{\pi}{32}.4 \text{ cm} = \frac{\pi}{8}$ cm

Entonces en 1 minuto: $L = \frac{\pi}{8}.60 = \frac{15\pi}{2}$ cm

Luego en metros: $L = \frac{15\pi}{2}.\frac{1}{100} = \frac{3\pi}{40}$ m.

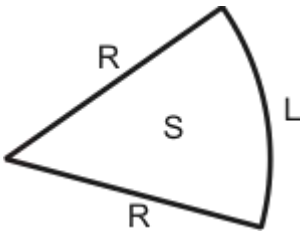
Rpta.: E

3. Un jardinero quisiera construir y cercar un parque que tenga la forma de un sector circular con un alambre de 20 m de longitud. En caso de que el jardinero pueda satisfacer su anhelo, determine el área máxima que tendría dicho parque.

A) 35 m^2 B) 50 m^2 C) 30 m^2 D) 45 m^2 E) 25 m^2

Solución:

A partir de la información dada, se tiene:

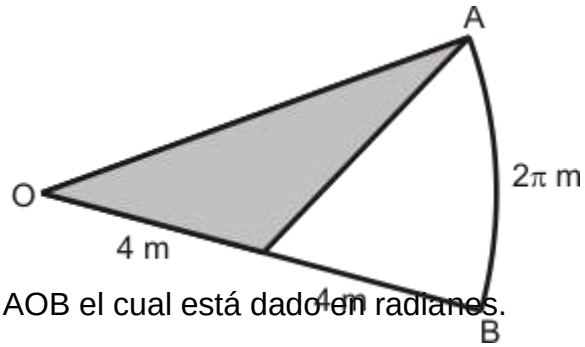


$$2R + L = 20$$
$$L = 20 - 2R.....(1)$$
$$S = \frac{LR}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{(20-2R)R}{2}$$
$$S = (10 - R)R$$
$$S = 25 - (R-5)^2 \quad \Rightarrow \quad S_{máx} = 25\,m^2 \ .$$

Rpta.: E

4. Un maestro albañil por enchapar un piso que tiene la forma de un sector circular cobra $\left(\frac{3S}{\pi}\right)$ soles por metro cuadrado, siendo el área del sector circular AOB; S metros cuadrados. Por cuestiones de presupuesto solo se pudo enchapar la parte sombreada que se muestra en la figura adjunta. Teniendo en cuenta la información proporcionada, ¿cuánto se pagará por enchapar la parte sombreada?

A) $192\sqrt{2}$ soles B) 190 soles
C) 207 soles D) $190\sqrt{2}$ soles
E) 600 soles



Solución:

Sea θ el ángulo central del sector circular AOB el cual está dado en radianes.

Luego, $2\pi = \theta(8) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{4}.8^2 = 8\pi \text{ m}^2$

Se sabe que el costo del enchapado por m^2 es : $\frac{3}{\pi}(8\pi) = 24$ soles.

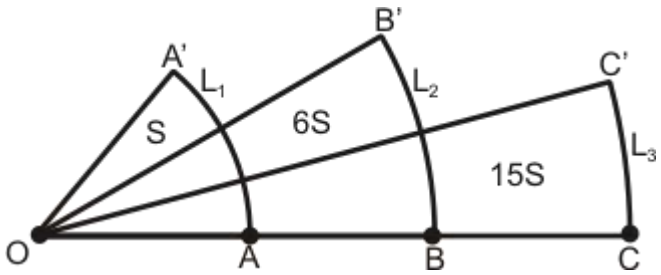
Área de la región sombreada: $8\sqrt{2}\ m^2$.

Es así que lo que se pagará por enchapar la parte sombreada es: $192\sqrt{2}$ soles.

Rpta.: A

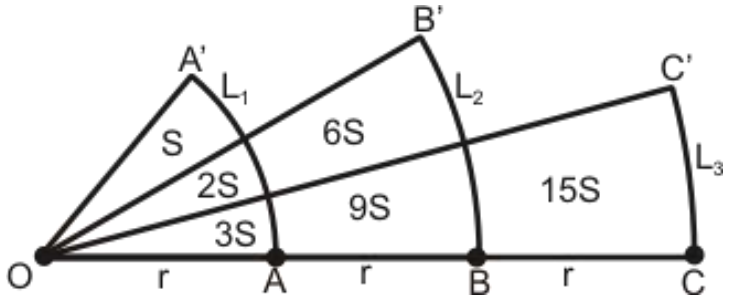
5. Tres jugadores de fútbol deben desplazarse describiendo una trayectoria curva desde los puntos A, B y C hasta los puntos A', B' y C' respectivamente, tal y como se indica en la figura adjunta, para lograr cabecear el balón en el tiro libre indirecto ejecutado por el jugador M ubicado en el punto O. Si $OA = AB = BC$ y AOA', BOB', COC' son sectores circulares, halle $\frac{L_1 + L_3}{L_1 + L_2}$.

A) 3
B) 4
C) 6
D) 2
E) $\frac{3}{2}$



Solución:

A partir de los datos proporcionados en el enunciado, se tiene:



De donde podemos notar:

$$S = \frac{L_1.r}{2} \rightarrow \frac{2S}{r} = L_1$$

$$8S = \frac{L_2.(2r)}{2} \rightarrow \frac{8S}{r} = L_2$$

$$27S = \frac{L_3(3r)}{2} \rightarrow \frac{18S}{r} = L_3$$

Luego, nos piden: $\dfrac{L_1 + L_3}{L_1 + L_2} = \dfrac{\dfrac{2S}{r} + \dfrac{18S}{r}}{\dfrac{2S}{r} + \dfrac{8S}{r}} = 2.$

Rpta.: D

6. Cuando se abre una laptop, el punto P del borde superior de la pantalla forma un arco de longitud 6π cm tal y como se muestra en la figura. Si el área de la pantalla (incluido el borde) es de 600 cm^2, calcule el ángulo formado entre la base del teclado y la pantalla.

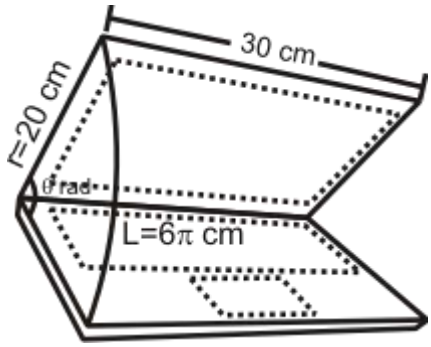
A) 58^g B) 60^g

C) 50^g D) 45^g

E) 72^g

Solución:

Sea

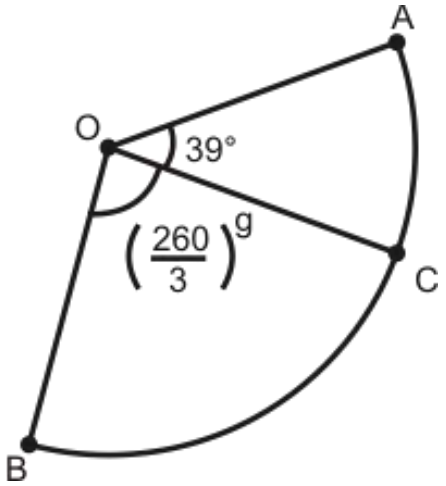


$$6\pi = \theta.20 \rightarrow \frac{6\pi}{20} = \theta$$

$$\rightarrow \theta = \frac{3\pi}{10} = 54° = 60^g$$

Rpta.: B

7. En la figura, AOB es un sector circular cuyo arco mide 39π cm. ¿En cuánto excede el perímetro del sector circular COB al del sector circular AOC?



A) 14π cm B) 10π cm

C) 11π cm D) 12π cm

E) 13π cm

Solución:

Se sabe

$$39° = \frac{13\pi}{60}\text{rad} \quad , \quad \left(\frac{260}{3}\right)^g = \frac{13\pi}{30}\text{ rad}$$

El ángulo central del sector circular mide: $\frac{13\pi}{20}$ rad

Luego, $39\pi = \frac{13}{20}\pi r \rightarrow r = 60$ cm

$L_{AC} = \frac{13\pi}{60}.60 = 13\pi$ cm

$L_{BC} = 39\pi - 13\pi = 26\pi$cm

$P_{AOC} = 120 + 13\pi$, $P_{COB} = 60 + 26\pi + 60 = 120 + 26\pi$

Exceso: $P_{COB} - P_{AOC} = 13\pi$ cm.

Rpta.: E

8. Los radios de las ruedas delantera y posterior de un tractor que se desplaza por un camino llano, miden 60 cm y 90 cm. Si la rueda delantera dio 8 vueltas más que la rueda posterior, calcule la distancia que recorrió el tractor.

A) 30,4 π m B) 28,8π m C) 20,6π m D) 16,5π m E) 15,6π m

Solución:

Sea L: distancia recorrida por el tractor.

Del dato:

$$\frac{L}{2\pi(60)} - \frac{L}{2\pi(90)} = 8 \rightarrow L = 2880\pi \text{ cm} = 28{,}8\pi \text{ m}.$$

Rpta.: B

9. Miguelito se traslada en su bicicleta de un punto A hacia un punto B, por un camino en línea recta. Si los radios de las ruedas están en la relación de 2 a 5 y el ángulo barrido por el centro de la rueda de mayor radio es 164π rad, calcule el número de vueltas que da la rueda de menor radio en ese trayecto.

A) 32,8 vueltas B) 205 vueltas C) 132 vueltas
D) 200,5 vueltas E) 185,8 vueltas

Solución:

Sabemos de la segunda rueda que $\theta = 164\pi$ rad, entonces el número de vueltas es $n_2 = 82$ vueltas.

Además, sabemos $n_1 r_1 = n_2 r_2$ entonces $n_1(2k) = 82(5k) \Rightarrow n_1 = 205$ vueltas

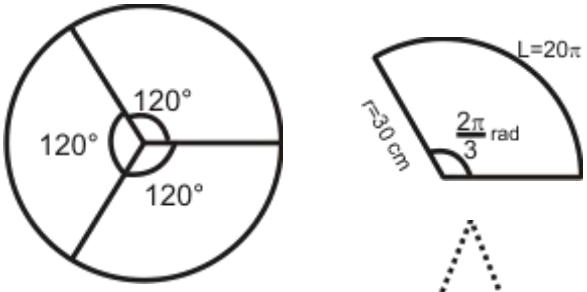
Rpta.: B

10. Una plantilla circular de cartulina, de 30 cm de radio se divide en 3 regiones equivalentes que tienen forma de sector circular. Con cada sector circular se construye la superficie lateral de un cono. Si se sabe que para construir la base del cono que tiene forma circular se necesita de su radio, calcule la longitud del radio de la base del cono resultante.

A) 25 cm B) 15 cm C) 10 cm D) 30 cm E) 20 cm

Solución:

Se divide en tres sectores equivalentes



Con cada sector, se forma un cono

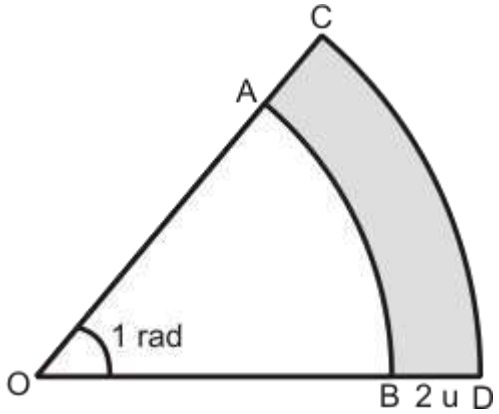
En la base del cono que tiene forma circular la longitud de la circunferencia es igual a la longitud del arco del sector circular, es decir:

$20\pi = 2\pi R \rightarrow R = 10$ cm.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura mostrada, AOB y COD son sectores circulares. Si el área de la región sombreada es la mitad del área del sector circular AOB, calcule la longitud del arco CD.

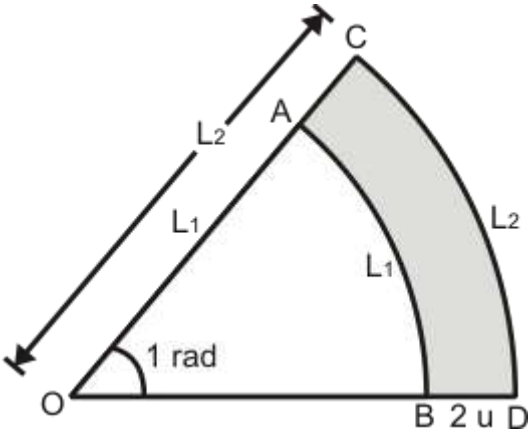


A) $4+2\sqrt{2}$ u B) $4-2\sqrt{2}$ u

C) $4+2\sqrt{6}$ u D) $6-2\sqrt{2}$ u

E) $6+2\sqrt{6}$ u

Solución:



Del enunciado tenemos:

$$S_T = \frac{1}{2}S_{AOB}$$

$$\frac{L_1+L_2}{2}.2 = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{2}\right) \quad \wedge \quad L_2 = L_1+2$$

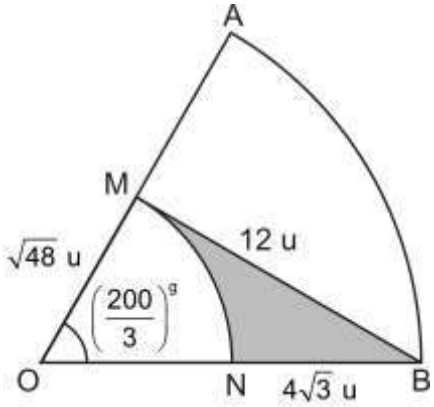
$$\frac{L_1^2}{4} = 2L_2 - 2 \quad \Rightarrow \quad (L_2-6)^2 = 24$$

$$\Rightarrow \quad L_2 = 6+2\sqrt{6} \quad \vee \quad L_2 = 6-2\sqrt{6}$$

$L_2 = 6-2\sqrt{6}$ no es posible ya que L_1 sería negativo.

Rpta.: E

2. Con los datos proporcionados en la figura adjunta, donde AOB y MON son sectores circulares, determine el área de la región sombreada.



A) $8\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ u^2 B) $3\left(8\sqrt{3}-\pi\right)$ u^2

C) $5\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$ u^2 D) $3\left(\sqrt{3}-8\pi\right)$ u^2

E) $2\left(\sqrt{3}-3\pi\right)$ u^2

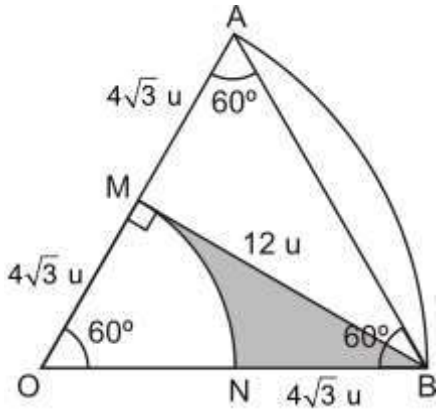
Solución:

El área de la región sombreada es el área de la región triangular MOB menos el área del sector circular MON.

$$A_{RS} = S_{MOB} - S_{MON}$$

$$A_{RS} = \frac{4\sqrt{3}.12}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\pi}{3}\left(4\sqrt{3}\right)^2$$

$$A_{RS} = 24\sqrt{3} - 8\pi$$



Rpta.: A

3. Lucerito está muy ansiosa esperando en la casa de su abuelito a su amiguita Fabiana para poder ir al cine. Por tal motivo, está continuamente mirando la hora y mientras tanto, se percata que el péndulo del reloj que tiene 84 cm de longitud se balancea y se desplaza $15°$ a cada lado respecto a la vertical. Con la información dada, determine la longitud de arco que describe.

A) 7π cm B) 12π cm C) 14π cm D) 8π cm E) 10π cm

Solución:

De la información proporcionada y como $L = \theta r$, obtenemos

$$L = 84.\frac{\pi}{6} = 14\pi \text{ cm}.$$

Rpta.: C

4. El Sr. Rodríguez es el encargado de la etapa relacionada al acabado del piso de una piscina que tiene la forma de un sector circular. Para ello, recopila información y se entera que las medidas de su arco y radio (en metros), están representadas por 2 números enteros consecutivos y cuyo semiperímetro mide 5,5 m. En base a la información proporcionada, determine la medida del ángulo central, si además se sabe que la longitud del radio es mayor.

A) 0,75 rad B) 0,9 rad C) 1,1 rad D) 0,8 rad E) 2 rad

Solución:

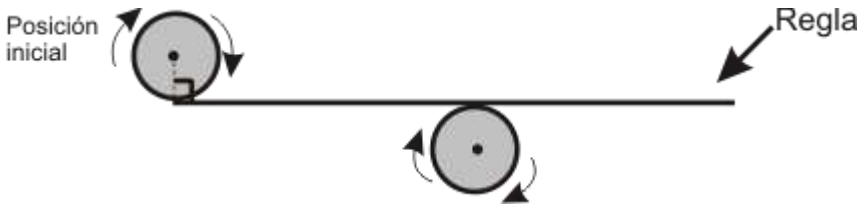
$L = a\ m \quad r = (a+1)m$

Por dato, sabemos que: Perímetro $= 11\,m$, entonces $3a + 2 = 11 \Rightarrow a = 3$

Entonces $L = 3\ m \ \wedge \ r = 4m \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3}{4} rad = 0{,}75\ rad$.

Rpta.: A

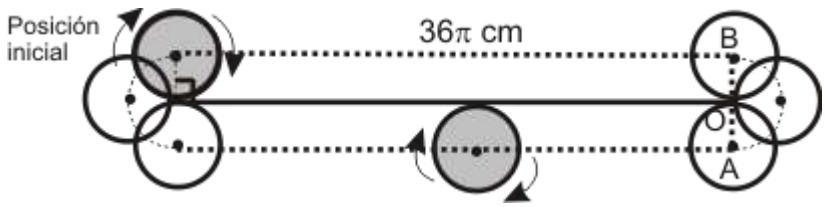
5. El mago Shazam realiza un truco que consiste en hacer rodar una pequeña llanta de radio 2 cm sobre una regla de madera, alrededor de toda la regla; es decir esta llantita primero recorre por encima y luego por debajo de la regla, tal y como se muestra en la figura. Si la longitud de la regla es 36π cm y se desprecia la altura de la regla, determine el número de vueltas que dio la llanta.



A) 13 vueltas B) 14 vueltas C) 16 vueltas

D) 18 vueltas E) 19 vueltas

Solución:



Analizando en los extremos de la regla:

$n_v = \frac{L_C}{2\pi r} \rightarrow n_v = \frac{\pi(2)}{2\pi(2)} = \frac{1}{2}$ **,** se realiza media vuelta en cada extremo.

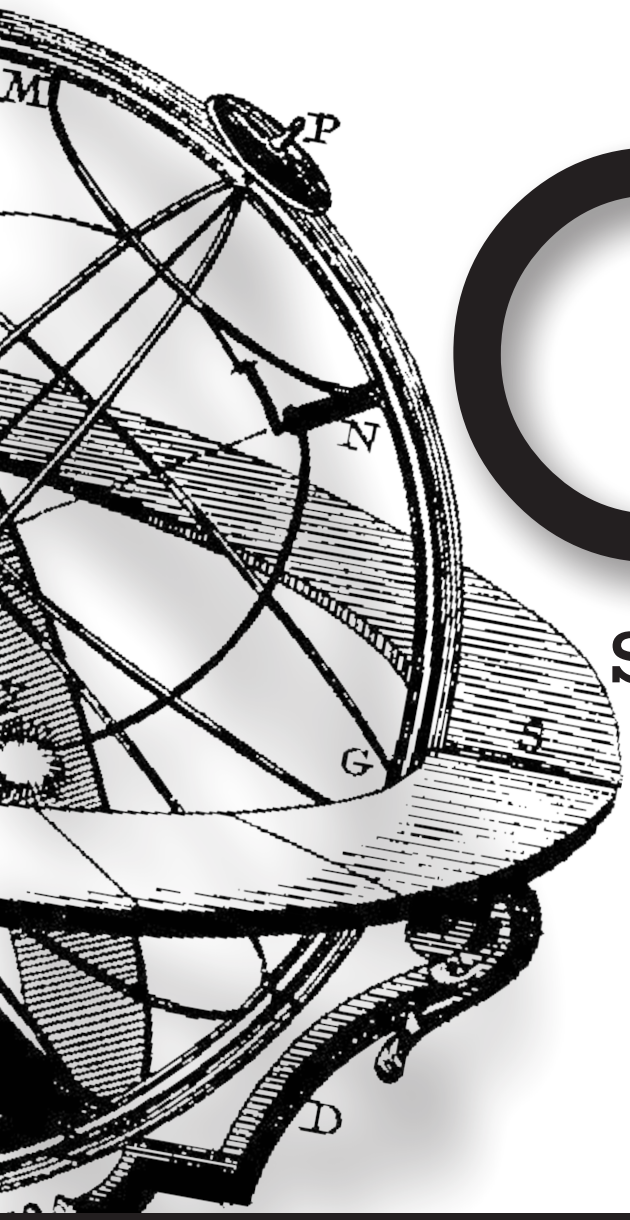
$n_v = \frac{L_C}{2\pi r} \rightarrow n_v = \frac{36\pi}{2\pi(2)} = 9$, en la parte horizontal realiza 9 vueltas

Por lo tanto, la llanta realiza 19 vueltas en total.

Rpta.: E

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



03

semana

pre SAN MARCOS

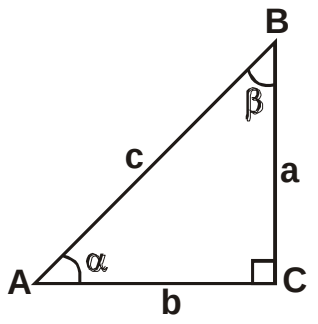
Manhattan Editores

Trigonometría

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. -

Sea el triángulo rectángulo ACB, definimos:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \;;\quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \;;$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \;;\quad \cot\alpha = \frac{b}{a} \;;$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} \;;\quad \csc\alpha = \frac{c}{a}$$

PROPIEDADES:

i) $a^2 + b^2 = c^2$

ii) $0 < \operatorname{sen}\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$

iii) $\operatorname{sen}\alpha \csc\alpha = 1$; $\cos\alpha \sec\alpha = 1$; $\tan\alpha \cot\alpha = 1$

Trigonometría

EJERCICIOS

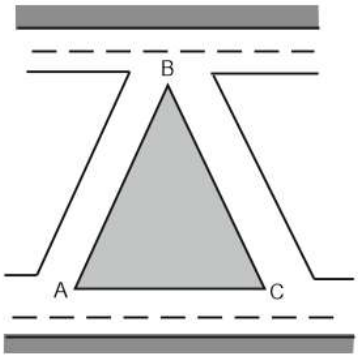
1. Según el área de zonificación de la municipalidad de Ancón, el precio por cada metro cuadrado de cualquier terreno es de 200 dólares, se pone en venta el terreno triangular ABC (que se muestra en la figura adjunta) cuyo perímetro es de 360 m. Si $AB = BC$, $\tan A = \frac{12}{5}$, halle el precio de venta de dicho terreno.

A) 1.200.000 dólares

B) 1.240.000 dólares

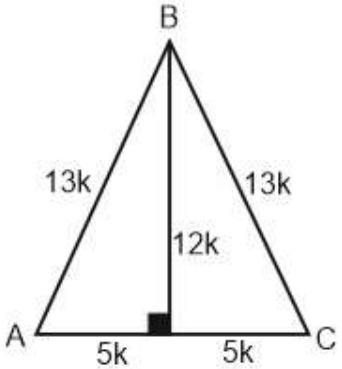
C) 1.160.000 dólares

D) 1.180.000 dólares



Solución:

Del gráfico adjunto tenemos



$\tan A = \frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad AB = 13k$

Como, $\text{Perímetro}_{ABC} = 360$ m

$\Rightarrow \; 36k = 360 \quad \Rightarrow \quad k = 10$

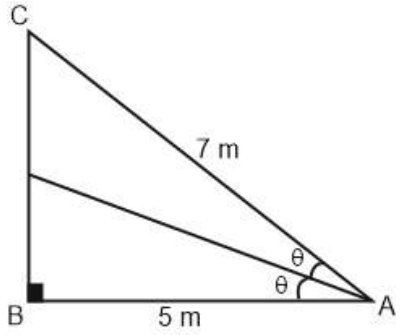
Además, $\text{área}_{ABC} = 60k^2 \text{ m}^2 \;\Rightarrow\; \text{área}_{ABC} = 6000 \text{ m}^2$

Así, $\text{Precio}_{ABC} = 200(\text{área}_{ABC})$ dólares

Por tanto, $\text{Precio}_{ABC} = 1.200.000$ dólares

Rpta.: A

2. El costo por pintar un metro cuadrado de una plancha metálica triangular ABC, (como se muestra en la figura) es $(\sqrt{6}\cot^2\theta)$ soles. Halle el costo por pintar la plancha mencionada.



A)

B)

C)

D) 180 soles

<u>Solución</u>:

Prolongamos el segmento BA, de tal modo AC = AD = 7. (Ver la figura)

De la figura $\cot\theta = \dfrac{12}{2\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \cot\theta = \sqrt{6}$

120 soles

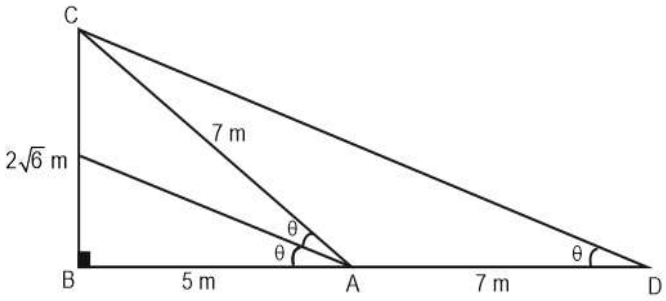
Luego,

140 soles

$\text{Precio}_{m^2} = (\sqrt{6}\cot^2\theta)$

160 soles

$\Rightarrow \text{Precio}_{m^2} = 6\sqrt{6}$ soles … (1)



Sea S el área de la plancha,

entonces $S = \dfrac{5(2\sqrt{6})}{2} \quad \Rightarrow \quad S = 5\sqrt{6}\ m^2$

Por tanto en (1), tenemos que $\text{Precio}_{ABC} = 180$ soles

Rpta.: D

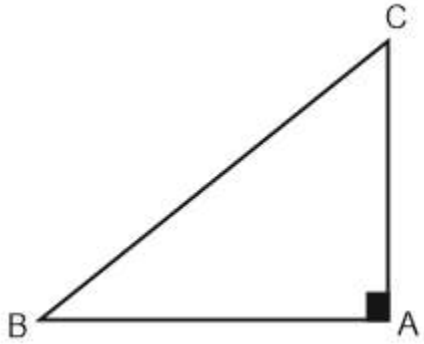
3. Un agricultor quiere cercar su terreno de forma triangular (como se muestra en la figura) con 3 hileras tensas de alambre de púas. ¿Cuántos metros de alambre se necesitará, si la suma de la cotangente y secante de los ángulos agudos del terreno es 5 y además su perímetro que está comprendido entre 1165 m y 1180 m? (Las longitudes de sus lados son números enteros).

A) 1174 m

B) 1172 m

C) 1170 m

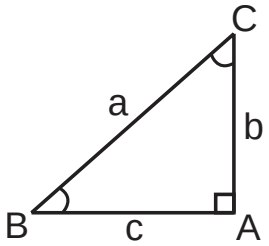
D) 1168 m



Solución:

Como $\cot C + \sec B = 5$, de la figura tenemos

$$\frac{b}{c} + \frac{a}{c} = 5 \quad \Rightarrow \quad a + b = 5c$$



Resolviendo el sistema de ecuaciones

$a + b = 5c \quad \wedge \quad c = 5(a - b)$

se tiene:

$a = 13k, \quad b = 12k, \quad c = 5k, \quad k \in \mathbb{Z}^+$

luego el perímetro del terreno es $P = (30k)$ m

Como $1165 \leq P \leq 1180 \quad \Rightarrow \quad 38{,}8... \leq k \leq 39{,}3...$

entonces, $k = 39$

Por tanto, la cantidad de alambre de púas es 1170 m.

Rpta.: C

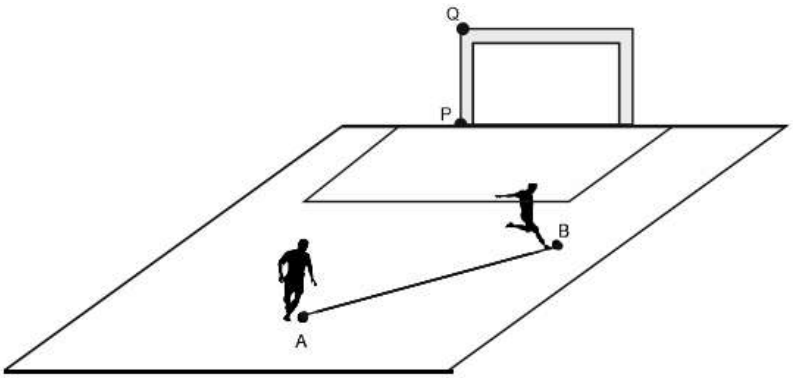
4. En la figura, se muestra una cancha de fulbito cuyo arco tiene una altura de 2 m. Miguel se encuentra ubicado inicialmente en A a 40 m de P. Luego, corre 20 m en forma rectilínea hasta ubicarse en B, donde dispara de manera rectilínea impactando en el punto Q. Halle el mínimo valor entero que toma $20\tan\theta$, donde $m\measuredangle PBQ = \theta$.

A) 2

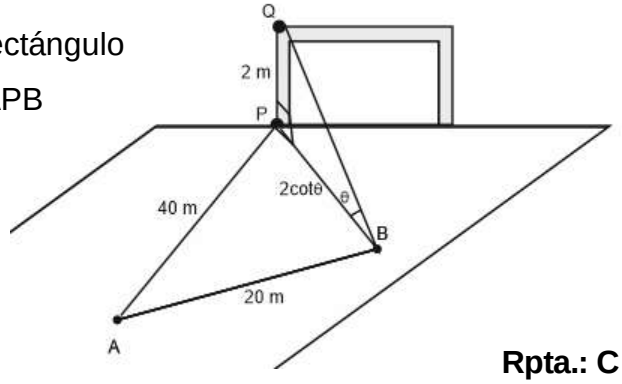
B) 1

C) 3

D) 4



Solución:



De la figura, por resolución de triángulo rectángulo

$PB = 2\cot\theta$ por existencia del triángulo APB

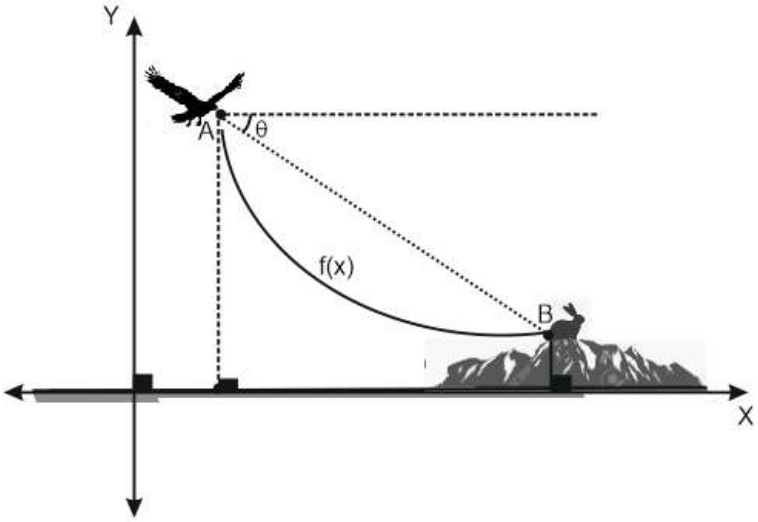
se tiene $20 < 2\cot\theta < 60$

$\Rightarrow 10 < \cot\theta < 30 \Rightarrow \frac{2}{3} < 20\tan\theta < 2$

Por tanto, $20\tan\theta_{min} = 1$

Rpta.: C

5. En la figura, se muestra el instante en el que un cóndor se encuentra a D m de altura con respecto al suelo y observa a un conejo que está a una altura d m con respecto al suelo. En ese instante se lanza sobre su presa mediante una trayectoria descrita por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, con $x > 0$, llegando hasta su presa, determine el valor de $\cot\theta$.



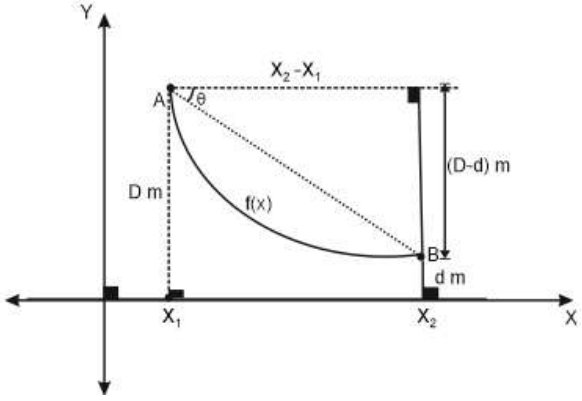
A) Dd

B) $\frac{D}{d}$

C) $\frac{D-d}{D+d}$

D) $\frac{1}{Dd}$

Solución:



De la figura tenemos

$D = \frac{1}{x_1} \quad \wedge \quad d = \frac{1}{x_2}$

Entonces

$x_1 = \frac{1}{D} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{1}{d}$

Luego, $\cot\theta = \frac{\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)}{D-d} \quad \Rightarrow \quad \cot\theta = \frac{1}{Dd}$

Rpta.: D

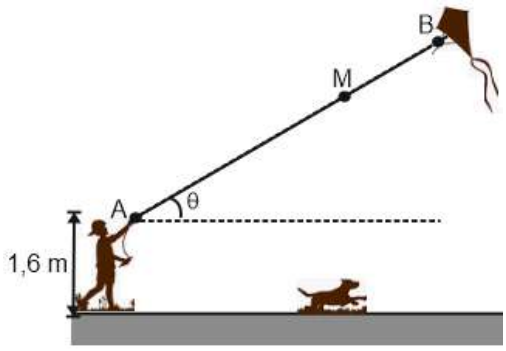
6. Luis hace volar su cometa tal como se muestra en la figura, donde M es punto de trisección de BA. El perro de Luis está ubicado en la proyección ortogonal del punto M con respecto al piso. Si $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ y la altura de la cometa en el punto B con respecto al suelo es de 4 m, halle la distancia entre Luis y su perro.

A) $2,4$ m

B) $3,6$ m

C) $1,8$ m

D) $3,2$ m



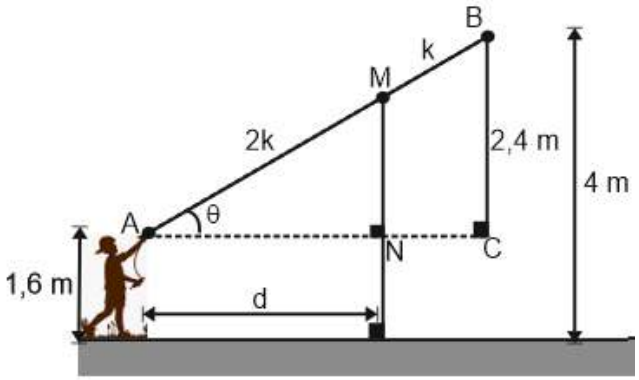
Solución:

Tenemos $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$

De la gráfica

$\tan\theta = \frac{2,4}{AC} \Rightarrow AC = 4,8$

Luego, $d = 3,2$ m



Rpta.: D

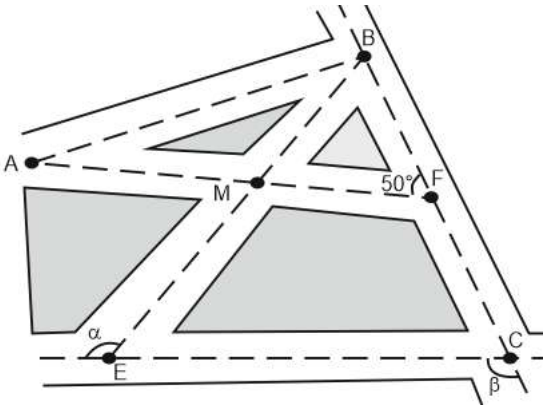
7. En la figura se muestra un croquis de una ciudad con sus avenidas, donde los tramos BF = 120 m y AM = (70sec50°)m, además $\alpha + \beta = 230°$. Si el pintado de las líneas continuas divisorias de las avenidas tienen un costo de 6cos50° soles por metro, halle el pintado del tramo AF.

A) 810 soles

B) 560 soles

C) 780 soles

D) 600 soles



Solución:

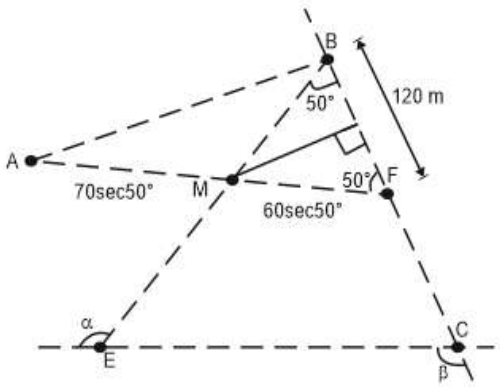
Como $\alpha+\beta=230°$ $\Rightarrow$ $130°+\measuredangle B=180°$

$\Rightarrow$ $\measuredangle B=180°$

Luego, $MF=60\sec 50°$ $\Rightarrow$ $AF=130\sec 50°$

Así, $\text{Precio}=(130\sec 50°)(6\cos 50°)$ soles.

Por tanto, $\text{Precio}=780$ soles



Rpta.: C

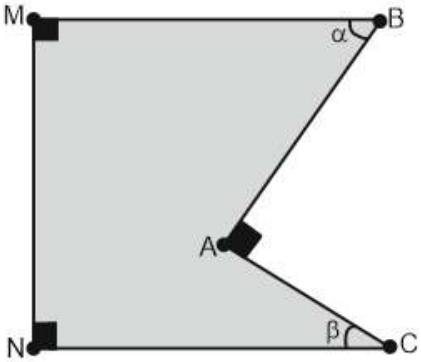
8. Juan hace un pedido al carpintero para la elaboración de una lámina cuadrangular (MBCN es un cuadrado), para el uso de una maqueta por el cual se cobra 1 sol por cada metro cuadrado. Luego de unas horas, Juan modifica el modelo de la lámina como se muestra en la figura, cuyo perímetro mide 56 m. Si $\csc\beta-\tan\alpha=\frac{1}{5}$, ¿cuánto pagó Juan por su lámina?

A) 146 soles

B) 139 soles

C) 152 soles

D) 126 soles



Solución:

Como $\csc\beta-\tan\alpha=\frac{1}{5}$, de la figura tenemos

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{1}{5} \quad\Rightarrow\quad a-c=\frac{b}{5}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$a-c=\frac{b}{5} \quad\wedge\quad 5b=a+c$$

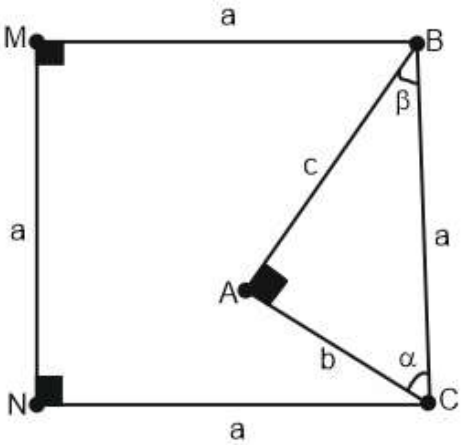
Se tiene $a=13k,\ \ b=5k,\ \ c=12k,\ \ k\in\mathbb{R}^+$.

Ahora $P=56k$ m y $\text{área}_{BAC}=30k^2$ m^2

$\Rightarrow$ k = 1, luego $\text{área}_{BAC}=30$ m^2.

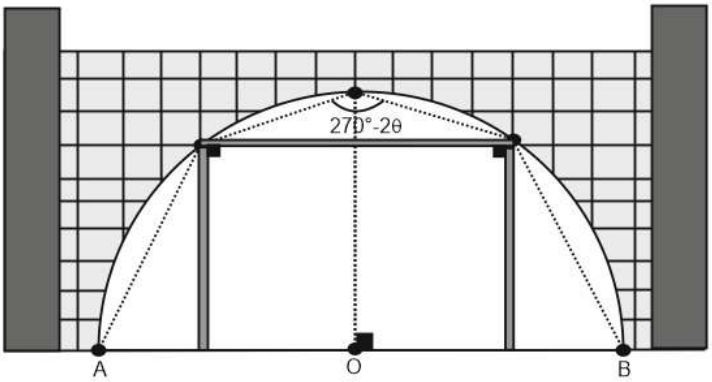
Entonces $\text{área}_{MBCA}=139$ m^2

Por tanto, Juan pagó 139 soles.



Rpta.: B

9. En la figura, se muestra la vista frontal de un túnel donde su interior tiene forma de una semicircunferencia de diámetro 12,5 m. Para el mantenimiento de dicho puente se coloca un soporte metálico (como se muestra en la figura). Si $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}$, halle la altura del soporte metálico.



A) 2,56 m

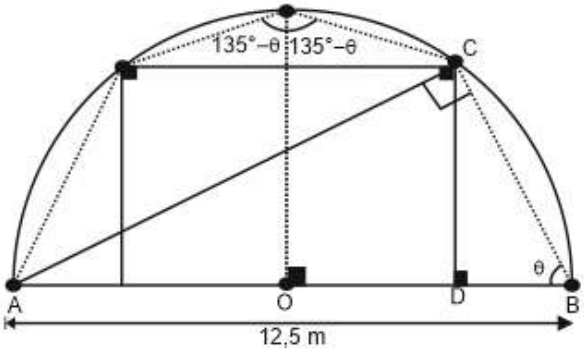
B) 3,36 m

C) 3,64 m

D) 4,16 m

Solución:

De la figura tenemos



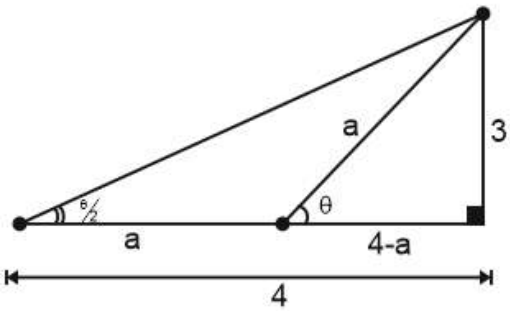
$BC=12{,}5\text{sen}\theta \quad \wedge \quad CD=12{,}5\text{sen}\theta\cos\theta$

De la figura, $a^2=(4-a)^2+9 \quad \Rightarrow \quad 8a=25$

Como $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta=\frac{24}{7}$

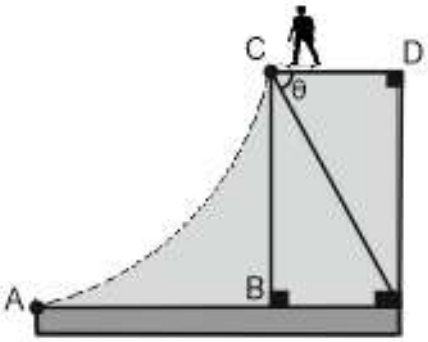
Así, $CD=12{,}5\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{7}{25}\right)$

Por tanto, 3,36 m



Rpta.: B

10. En la figura se muestra una rampa para practicar skateboard (deporte sobre una tabla con ruedas). Dicha rampa está formada por un de arco de sector circular equivalente a un sexto de circunferencia. Si $AB=2\sqrt{2}\,BC$ y $CD=L\text{ m}$, halle la longitud de la superficie de la rampa.



A) $\pi L\tan\theta$ m

B) $\pi L\text{sen}\theta$ m

C) $L\tan\theta$ m

D) $L\text{sen}\theta$ m

Solución:

De la figura $BC = L\tan\theta$ m

Entonces $AB = 2\sqrt{2}L\tan\theta$ m

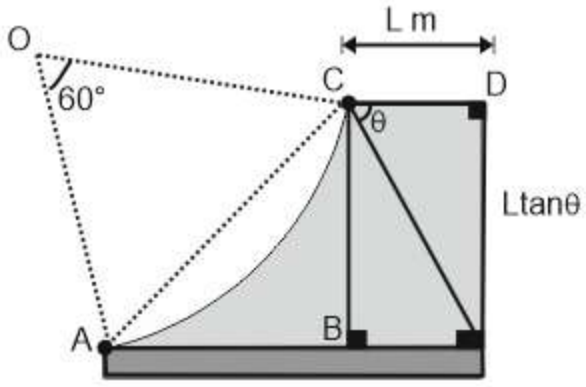
Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$AC = 3L\tan\theta$ m

Como el arco AC (es la sexta parte de una circunferencia), entonces su ángulo central mide 60° por tanto el triángulo AOC es equilátero, por tanto, el radio del sector es AC.

Por tanto, $\text{Longitud}_{AC} = (3L\tan\theta)\left(\frac{\pi}{3}\right)$ m

$\text{Longitud}_{AC} = (\pi L\tan\theta)$ m



Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

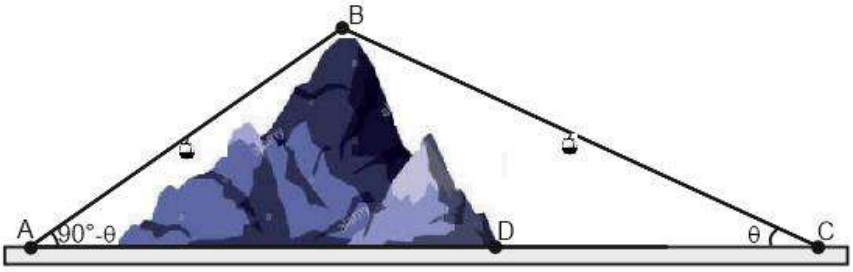
1. En la figura se muestra la vista frontal de la trayectoria de un teleférico que une dos estaciones A y C, además la distancia de la estación A con respecto a la falda del cerro ubicado en el punto D es de 6 km. Si $\text{sen}\theta = \frac{1}{3}$ y AB = DC, halle la distancia de la cima de la montaña hacia la estación C.

A) $6\sqrt{2}$ km

B) $(2\sqrt{2}+3)$ km

C) $4\sqrt{2}$ km

D) $(2\sqrt{2}+1)$ km



Solución:

Como

$\text{sen}\theta = \frac{1k}{3k} \wedge AB = DC$

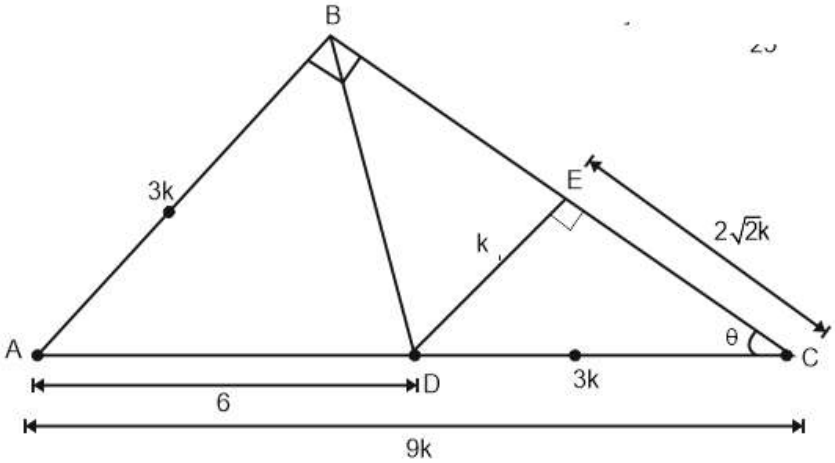
$\Rightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{9k}$

Luego, AC = 6 + 3k,

entonces k = 1

De la figura tenemos que

$BC = 6\sqrt{2}$ km



Rpta.: A

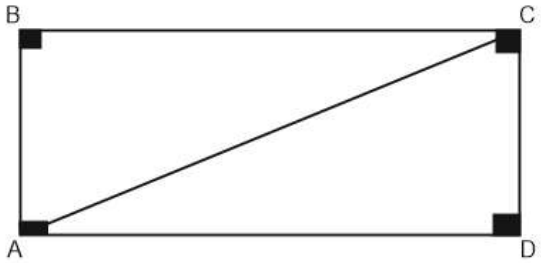
2. Un agricultor adquiere un terreno rectangular de 3400 m de perímetro, con la intención de sembrar dos cultivos: uno de papa y el otro de camote, trazando para ello una linea divisoria en la diagonal AC, tal como se aprecia en la figura adjunta. Si la tangente del mayor ángulo agudo del triángulo ADC es 2,4, ¿cuántos kilómetros mide la línea divisoria?

A) 2 km

B) 3 km

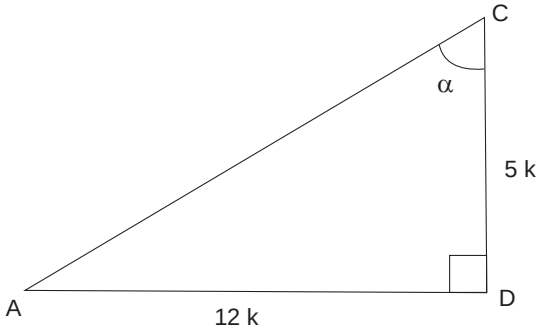
C) 3,2 km

D) 1,3 km



Solución:

Tenemos



1) $\tan\alpha = 2,4 = \dfrac{12}{5}$

$\Rightarrow CD = 5K \quad , \quad AD = 12K$

2) Pitágoras en ΔACD:

$\Rightarrow AC = 13K$

3) Perímetro del terreno: $2(12k) + 2(5k) = 3400$

$34K = 3400 \Rightarrow K = 100$

$\therefore AC = 13K = 1300\,m = 1,3$ km

Rpta.: D

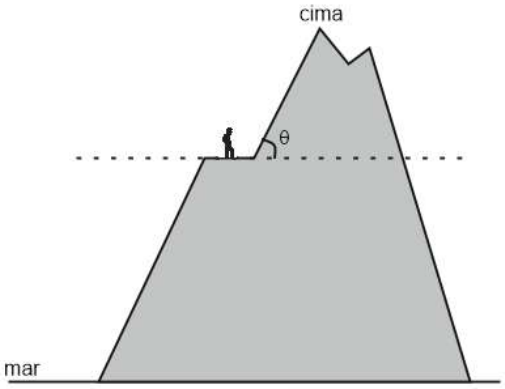
3. Un alpinista en Huaraz - Perú se encuentra en una montaña a 3064 msnm, ubicado a solo 1248 metros de la cima de la montaña la cual tiene un ángulo de inclinación θ (como se muestra en la figura). Si va en línea recta hacia la misma cima y $\sec\theta = \dfrac{13}{5}$, ¿a qué altitud se encuentra la cima de la montaña?

A) 4134 msnm

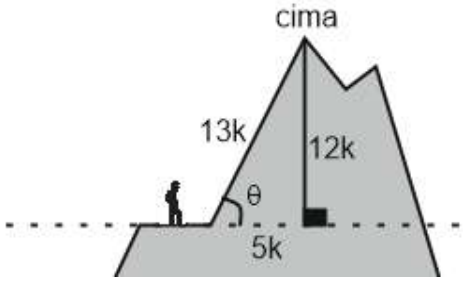
B) 4000 msnm

C) 3860 msnm

D) 4216 msnm



Solución:



En la figura tenemos

$13k = 1248 \quad \Rightarrow \quad k = 96$

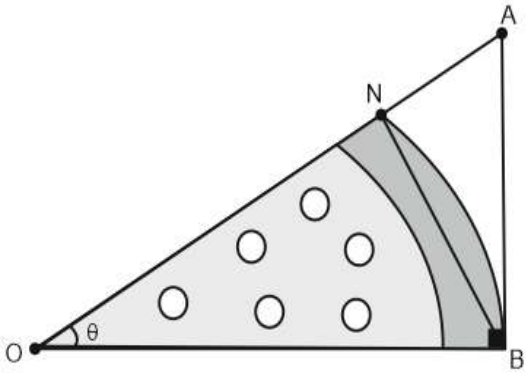
Así, $\text{Altura} = 12k \quad \Rightarrow \quad \text{Altura} = 1152$

Por tanto, $\text{Altitud} = 1152 + 3064$

$\text{Altitud} = 4216 \text{ msnm}$

Rpta.: D

4. En la pizzería "LINDA ITALIA" por su aniversario se elaboran regalos para sus clientes, cada regalo tiene como presentación una cajita triangular ABO (figura adjunta) y en el interior de cada cajita contiene una tajada de pizza (sector circular NOB). Si se coloca una cinta NB en la cajita triangular ABO de longitud $\frac{24\sqrt{26}}{13}$ cm y $\cos\theta = \frac{12}{13}$, halle el perímetro de la cajita.



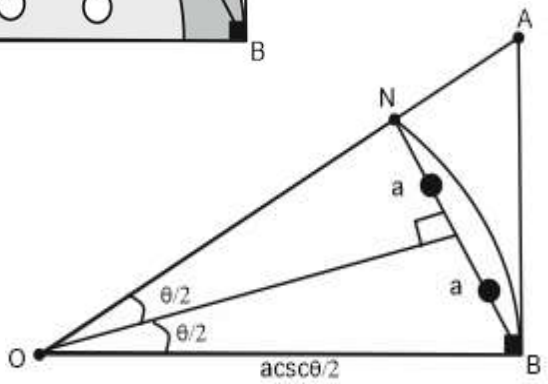
A) 30 cm

B) 45 cm

C) 60 cm

D) 75 cm

Solución:

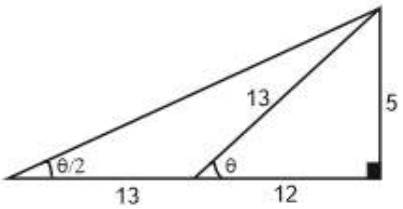


Tenemos que

$\cos\theta = \frac{12}{13}$ y $2a = \frac{24\sqrt{26}}{13}$ cm

Entonces $a = \frac{12\sqrt{26}}{13}$ cm

$\left(\frac{12\sqrt{26}}{13}\right)\sqrt{26} = 12k \quad \Rightarrow \quad k = 2$



Entonces como

$\text{Perímetro}_{ABO} = 30k$

Por tanto, $\text{Perímetro}_{ABO} = 60$ cm

Rpta.: C

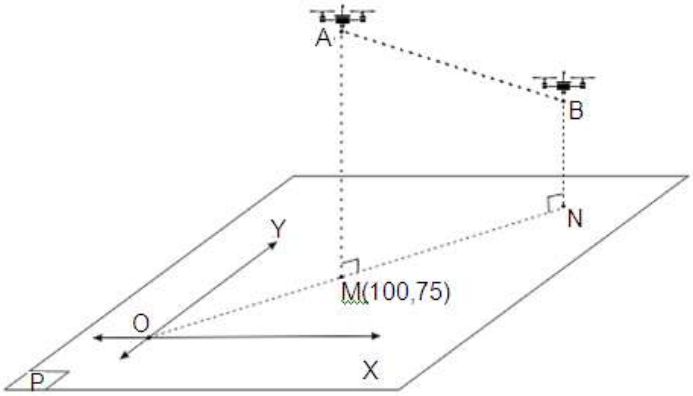
5. En la figura se muestra, un dron ubicado en el punto A, que vuela a una altura de 150 m perpendicular al plano P. En ese instante un vigía ubicado en O observa que el dron desciende en línea rectilínea y oblicua con un ángulo de inclinación de $90° - \theta$ respecto a la horizontal, cuando se encuentra en B a 86 m de altura lanza un objeto verticalmente hacia el plano P. Si $\cos\theta = 0,8$, ¿a qué distancia se encuentra el objeto del pie de la persona?

A) 178 m

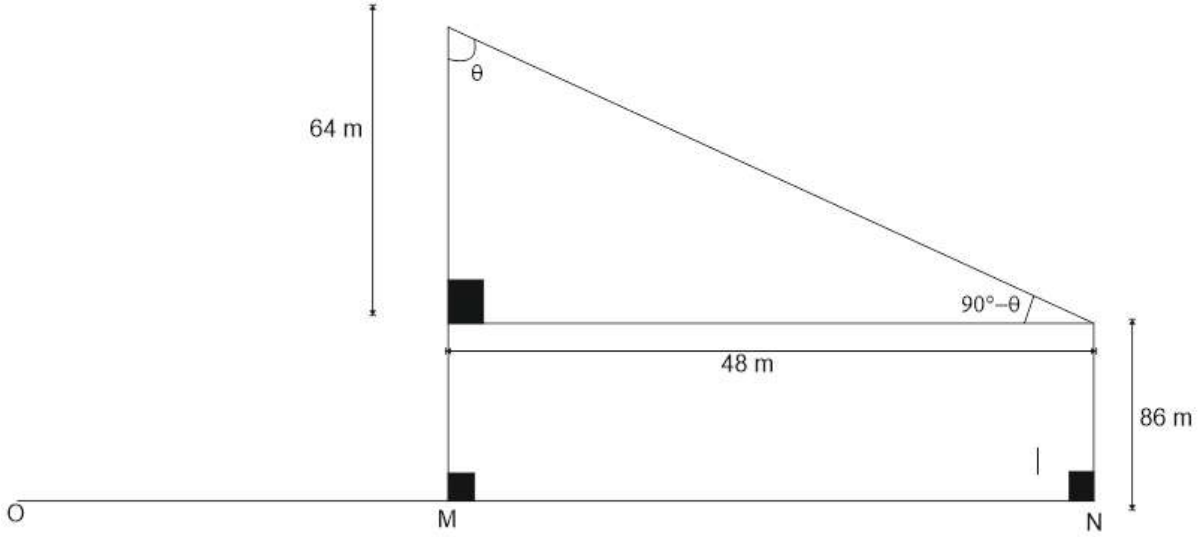
B) 186 m

C) 173 m

D) 164 m



Solución:



Vemos que $\text{dist}(O,M) = 125$

De la figura, $\text{dist}(O,N) = \text{dist}(O,M) + \text{dist}(M,N)$

Por tanto, $\text{dist}(O,N) = 173$ m

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

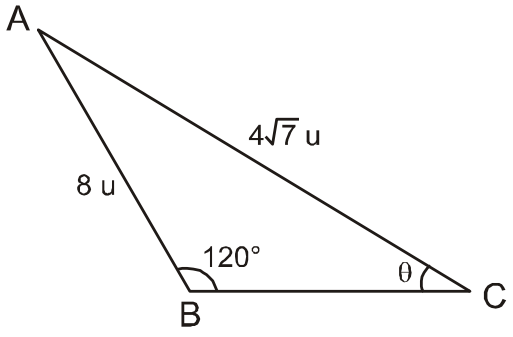
1. Dos caminos se cortan en un punto B, formando un ángulo de 120°. En un punto A sobre un camino está un edificio a 8u de B, halle $\sec\theta$.

A) $4\sqrt{3}$

B) 4

C) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

D) $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$



Solución:

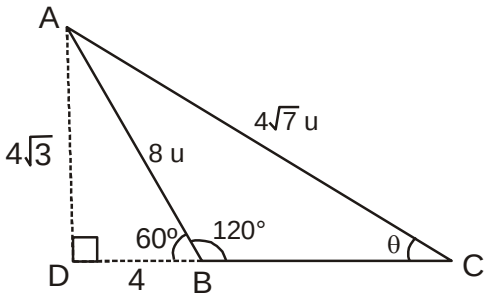
Por el teorema de Pitágoras:

$(DC)^2 = \left(4\sqrt{7}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2$

$(DC)^2 = 16(4)$

$\Rightarrow$ DC = 8 y $\sec\theta = \dfrac{4\sqrt{7}}{8}$

$\Rightarrow \sec\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$



Rpta.: C

2. Un chofer en estado de ebriedad choca su taxi con un poste de luz quedando este inclinado como se observa en la figura. Si la parte alta del poste se encuentra a 7,2 m del suelo y el poste mide 9m, ¿cuál es la sombra que proyectaría el poste cuando el sol se encuentra en su posición más alta?

A) 5.4 m

B) 3.6 m

C) 4.8 m

D) 5 m

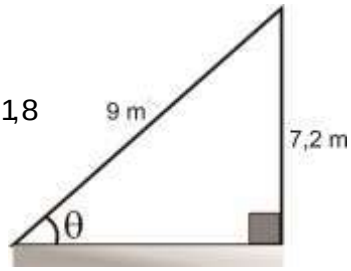
Solución:

Sea θ el ángulo formado entre el poste y el suelo

$\text{sen}\theta = \frac{7,2}{9} = \frac{4}{5}$

La sombra que proyectaría sería = 3k siendo $4k = 7,2 \rightarrow k = 1,8$

Sombra = 3(1,8) = 5,4 m.



Rpta.: A

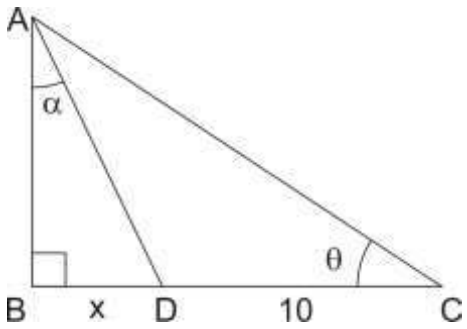
3. En el triángulo rectángulo ABC, mostrado en la figura, $\cot\alpha = 2$ y $\cot\theta = 3$. Determine x.

A) 2u

B) 3u

C) 4u

D) 5u



Solución:

$\cot\alpha = \frac{AB}{x} = 2 \Rightarrow AB = 2x$

$\cot\theta = \frac{x+10}{AB} = 3 \Rightarrow AB = \frac{1}{3}(x+10)$

Entonces

$\frac{1}{3}(x+10) = 2x \Rightarrow x = 2$

Rpta.: A

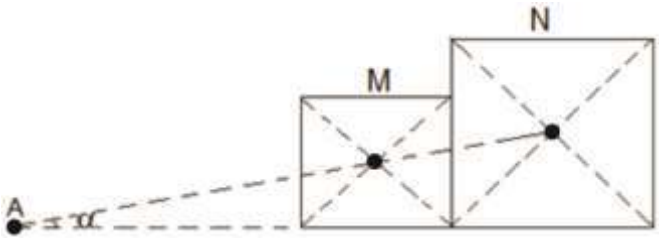
4. Desde el punto A, un topógrafo con ayuda de un teodolito nota que un terreno (figura adjunta) tiene la forma de dos cuadrados juntos (M y N) y que sus perímetros están en relación de 2 a 3. Si cercar el cuadrado M cuesta $\sec\alpha$ miles de soles ¿cuánto costará (aproximadamente) cercar el cuadrado N?

A) S/. $300\sqrt{26}$

B) S/. $150\sqrt{22}$

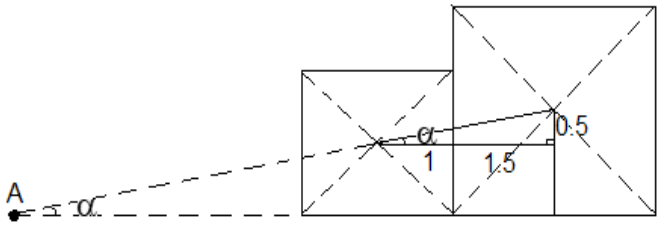
C) S/. $300\sqrt{22}$

D) S/. $300\sqrt{22}$



Solución:

$$\frac{\text{Perímetro M}}{\text{Perímetro N}} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$



Lado cuadrado M=2u

Lado cuadrado N=3u(en la figura)

En la Figura

$\sec\alpha = \dfrac{\sqrt{26}}{5}$ miles de soles

$\sec\alpha = 200\sqrt{26}$ soles,

$$\frac{\text{Perímetro M}}{\text{Perímetro N}} = \frac{2}{3} = \frac{200\sqrt{26}}{\text{costo N}}$$

$\therefore$ Costo N $= 300\sqrt{26}$ soles.

Rpta.: A

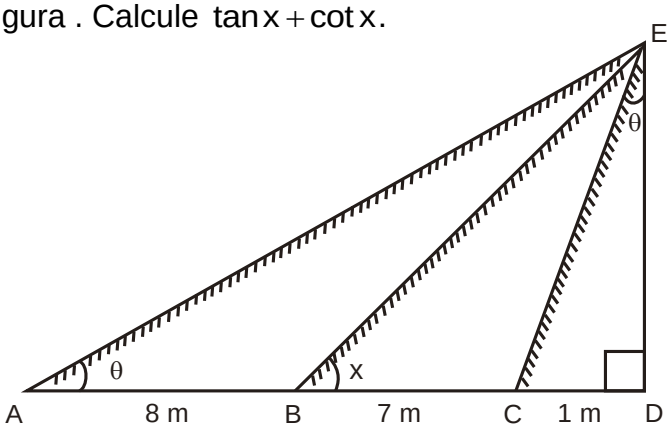
5. Pedro, Carlos y Miguel se encuentran en los puntos A, B y C, respectivamente. Ellos quieren llegar al punto E para esto se desplazan por 3 caminos AE, BE y CE, tal como se muestra en la figura . Calcule $\tan x + \cot x$.

A) 2.4

B) 2.5

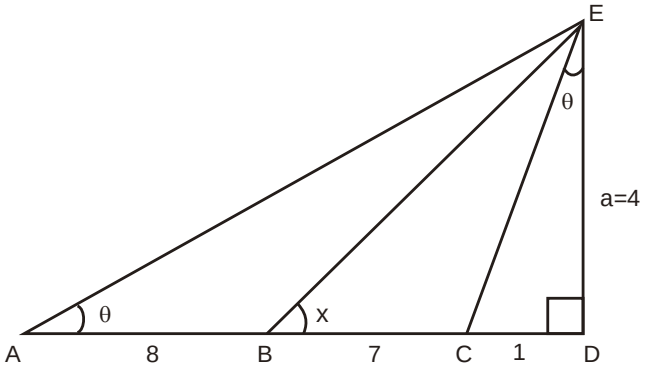
C) 2.15

D) 3



Solución:

De la figura:



$\tan\theta = \dfrac{a}{16}$ (1)

$\tan\theta = \dfrac{1}{a}$ (2)

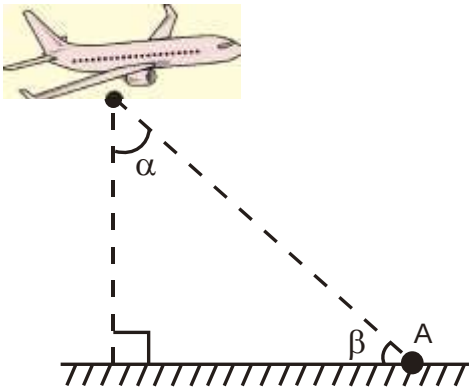
Igualando

$\dfrac{a}{16} = \dfrac{1}{a} \quad \rightarrow \quad a = 4$

Se pide $\tan x + \cot x = \dfrac{4}{8} + \dfrac{8}{4} \quad \therefore \quad \tan x + \cot x = 2{,}5.$

Rpta.: B

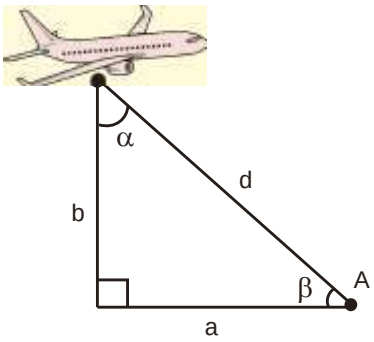
6. Un avión que vuela a 4km de altitud se aproxima al aeropuesto ubicado en el punto A, según se indica en la figura. Si $\tan\alpha = 4\tan\beta$, ¿a qué distancia del aeropuerto se encuentra el avión en ese instante?



A) 12 km B) $2\sqrt{3}$ km

C) $4\sqrt{5}$ km D) $3\sqrt{3}$ km

Solución:



1) $\tan\alpha = 4\tan\beta \;\Rightarrow\; \dfrac{a}{b} = 4\left(\dfrac{b}{a}\right) \;\Rightarrow\; a^2 = 4b^2$

2) Pitágoras: $d^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; d^2 = 4b^2 + b^2 \;\Rightarrow\; d^2 = 5b^2$

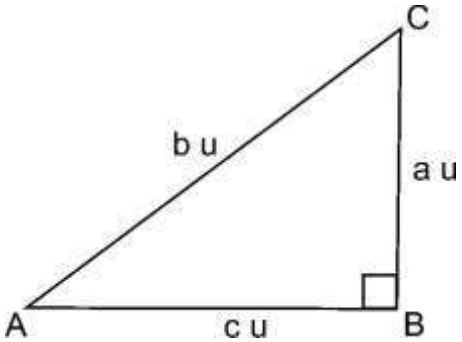
$\Rightarrow\; d = \sqrt{5}\,b \;\Rightarrow\; d = 4\sqrt{5}$ km.

Rpta.: C

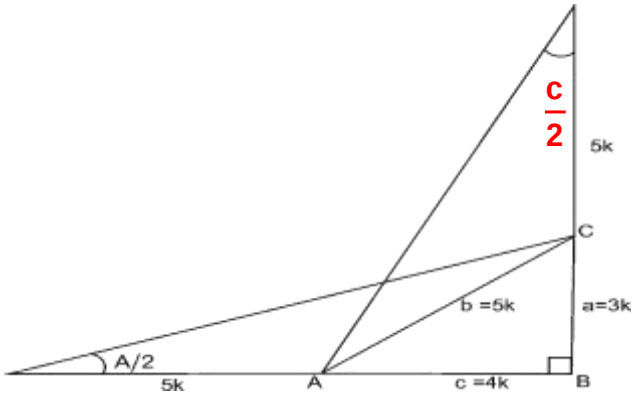
7. Se tiene una rampa en forma de un triángulo ABC. De la figura se construyen otras dos rampas con ángulos $\frac{A}{2}$ y $\frac{C}{2}$ tal que $\sec A - \cot C = \frac{1}{2}$. Halle $\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right)$.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{3}$

C) 3 D) $\frac{7}{3}$



Solución:



$$\sec A - \cot C = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{c} - \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(b-a) = c$$

$$\Rightarrow 4(b-a)^2 = b^2 - a^2$$

$$\Rightarrow 4b - 4a = b + a$$

$$\Rightarrow 3b = 5a \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{5k}{3k}$$

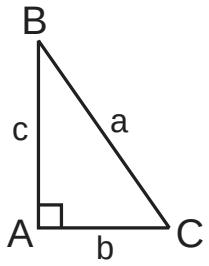
$$\therefore \tan\left(\frac{A}{2}\right) + \cot\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{3k}{9k} + \frac{8k}{4k} = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

Rpta.: D

8. El costo por metro cuadrado de un terreno de forma triangular recto es de 85 dólares Si la suma de la tangente de uno de los ángulos agudos con la cosecante del otro ángulo agudo es $\frac{3}{2}$, ¿cuál será el costo del terreno si su área está comprendida entre 269 m^2 y 290 m^2?

A) \$ 23 238 B) \$ 24 500 C) \$ 22 950 D) \$ 18 500

Solución:



$$\text{tgC} + \text{cscB} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} + \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a + 2c = 3b$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$a^2 = b^2 + c^2$

$2a + 2c = 3b$

$\Rightarrow \left(\dfrac{3b-2c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9b^2 - 12bc = 4b^2$

$\Rightarrow ab - 12c = 4b \Rightarrow 5b = 12c \Rightarrow b = \dfrac{12}{5}c$

$hallando\ a:\ a = \dfrac{13}{5}c$

$luego: a = \dfrac{13}{5}c,\ b = \dfrac{12}{5}c,\ \ c = c,\ \ c \in R\ (solución\ múltiple)$

$si\ \ c = 15\ m \Rightarrow a = 39\ m,\ \ b = 36\ m.$

$Área:\ A = \dfrac{1}{2}(36)(15\ m^2) = 270\ m^2$

$\text{Cos}to: 270 \times 85\ dólares = 22\ 950\ dólares$

Rpta.: C

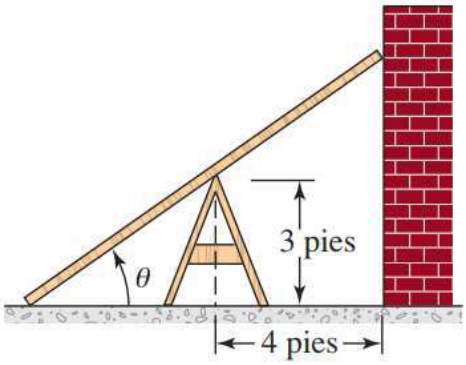
9. Como se ve en la **FIGURA**, una tabla está sostenida por un caballete para que uno de sus extremos descanse en el piso y el otro contra un muro. Exprese la longitud de la tabla en términos de θ.

A) $(4\sec\theta + 3\csc\theta)$pies

B) $(3\sec\theta + 4\csc\theta)$pies

C) $(\sec\theta + 3\csc\theta)$pies

D) $(4\sec\theta + \csc\theta)$pies



Solución:

En la horizontal se tiene: $4 + 3\cot\theta$

L es la longitud de la escalera

$$\frac{L}{4 + 3\text{ctg}\theta} = \sec\theta$$

$$L = (4\sec\theta + 3\csc\theta)\text{pies}$$

Rpta.: A

10. Al hallar el área de un triángulo acutángulo en función de unos de sus ángulos resulta $\left(\dfrac{1+6\cos\alpha+8\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)u^2$, calcule el menor valor entero de dicha área.

A) $15\,u^2$ B) $16\,u^2$ C) $14\,u^2$ D) $17\,u^2$

Solución:

$$E=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{6\cos\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{8\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$E=\sec^2\alpha+6\sec\alpha+8$$
$$E=\left(\sec^2\alpha+6\sec\alpha+3^2\right)-1$$
$$E=\left(\sec\alpha+3\right)^2-1$$

Por ser α agudo, entonces, $\sec\alpha>1$,

luego $\sec\alpha+3>4\Rightarrow\left(\sec\alpha+3\right)^2>16$

$$\Rightarrow\left(\sec\alpha+3\right)^2-1>15$$
$$\Rightarrow E>15$$

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se tiene que tg A + tg B = $\dfrac{5}{2}$.

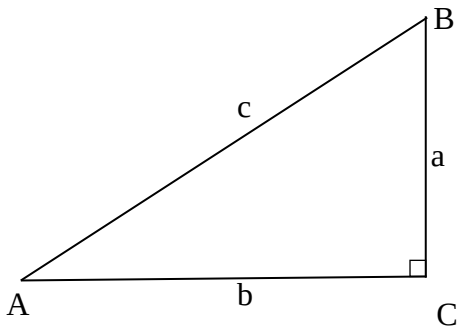
Calcule $80ab\left(\dfrac{\text{sen}A+\text{sen}B}{a+b}\right)^2$.

A) 30 B) 32 C) 30 D) 22

Solución:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{c^2}{ab}=\frac{5}{2}$$

$$80ab\left(\frac{a+b}{c(a+b)}\right)^2=\frac{80ab}{c^2}=32$$



$$80ab\left(\frac{senA+senB}{a+b}\right)^2=32$$

Rpta.: B

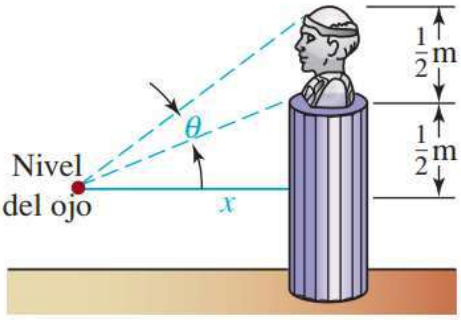
2. Una estatua se coloca sobre un pedestal, como se representa en la figura. Halle $\frac{\sqrt{(4x^2+1)(x^2+1)}}{x}$.

A) $sen\theta$

B) $\csc\theta$

C) $\sec\theta$

D) $1+sen\theta$



<u>Solución</u>:

A partir de los datos proporcionados y de la representación gráfica dada, se tiene:

<u>Por áreas y pitágoras :</u>

$$\frac{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}\sqrt{(x^2+1)}}{2}sen\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)$$

resulta

$$\frac{\sqrt{(4x^2+1)(x^2+1)}}{x}=\csc\theta$$

Rpta.: B

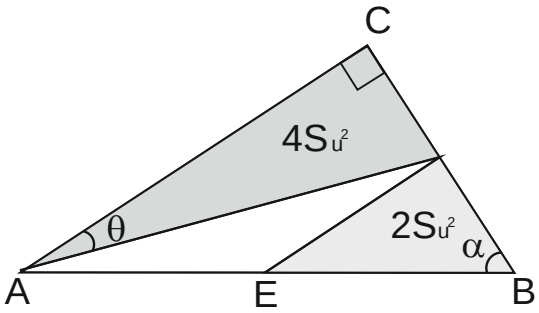
3. Se desea construir unas banderitas en una hoja de papel, tal como se muestra en la figura. Si el precio de cada banderita está dado por la expresión $\tan\theta\,.\tan\alpha$ en soles. Halle dicho precio, si E es punto medio de $\overline{AB}$.

A) 50 céntimos

B) 1,50 soles

C) 2 soles

D) 1,30 sol



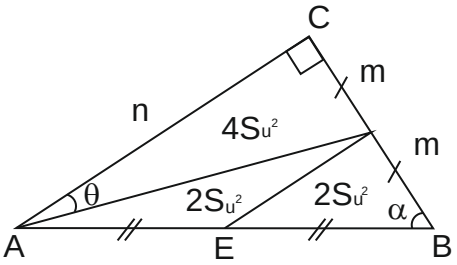
Solución:

Del gráfico,

$\tan\theta = \dfrac{m}{n}$,

$\tan\alpha = \dfrac{n}{2m}$

Por lo tanto, $\tan\theta \ \tan\alpha = \dfrac{m}{n}.\dfrac{n}{2m} = \dfrac{1}{2}$



Rpta.: A

4. Los brazos de un compás miden 12 cm y forman un ángulo de 50°.¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse en esa abertura?

A) $(12\text{sen}25°)$ cm

B) $(12\cos 50°)$ cm

C) $(12\cos 25°)$ cm

D) $(24\cos 25°)$ cm

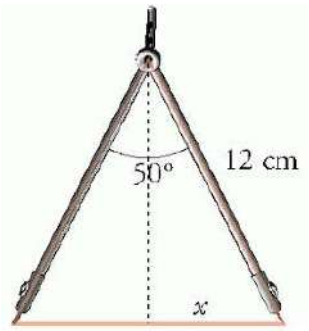
Solución:

Nos piden hallar el radio de la circunferencia

De la figura

$\text{sen}25° = \dfrac{x}{12}$

$\therefore x = 12\text{sen}25°$



Rpta.: A

5. En una de las orillas de un río se encuentra un hotel de altura 48 m, en la azotea se ubica una antena de radio de altura 16 m. Si desde un punto A en la orilla opuesta frente al edificio se observa la antena con un ángulo igual que si se observase solo la séptima parte de la altura del hotel; determine la distancia del pie del edificio al punto A.

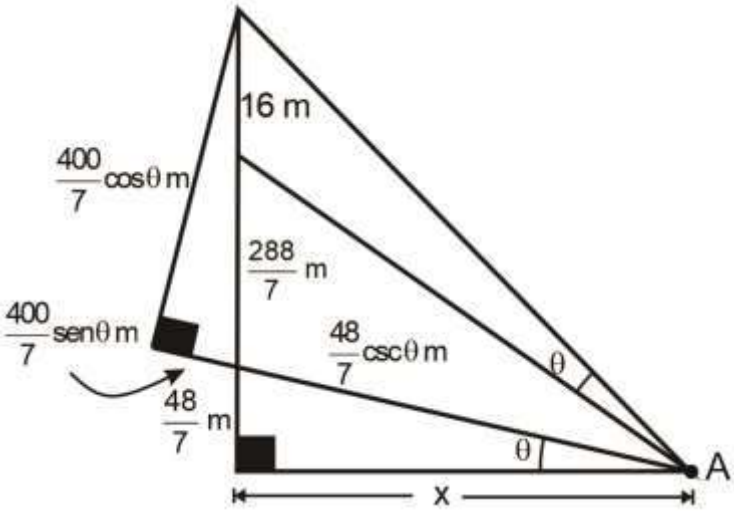
A) 48 m

B) 32 m

C) 64 m

D) 56 m

Solución:



Del enunciado:

$$x = \frac{48}{7}\text{ctg}\theta = 48\,\text{ctg}(\alpha+\theta)$$

$$\Rightarrow \text{ctg}(\alpha+\theta) = \frac{1}{7}\text{ctg}\theta$$

Luego:

$$\frac{\frac{48}{7}\csc\theta + \frac{400}{7}\text{sen}\theta}{\frac{400}{7}\cos\theta} = \frac{1}{7}\text{ctg}\theta$$

$$\frac{3}{25}\left(\frac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\text{sen}\theta\cos\theta}\right) + \text{tg}\theta = \frac{1}{7}\text{ctg}\theta$$

$$\frac{3}{25}(\text{tg}\theta + \text{ctg}\theta) + \text{tg}\theta = \frac{1}{7}\text{ctg}\theta$$

$$\text{ctg}\theta = 7$$

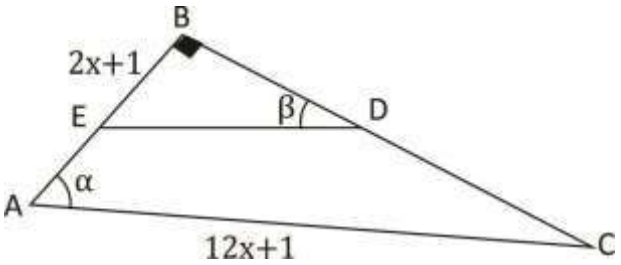
$$\therefore\ x = 48\text{ m}$$

Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

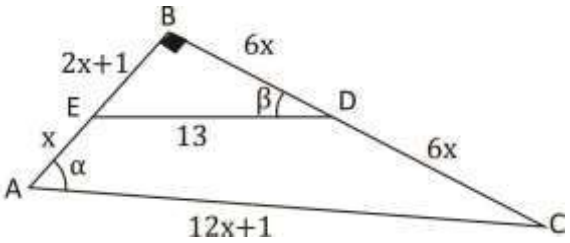
1. En el gráfico, 6AE =BD = DC = 6x. Calcule cosα + cscβ.



A) $\frac{72}{15}$ B) $\frac{72}{25}$ C) $\frac{65}{13}$

D) $\frac{75}{13}$ E) $\frac{71}{23}$

Solución:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$(12x+1)^2 = (3x+1)^2 + (12x)^2$$

$$144x^2 + 24x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 + 144x^2$$

$$18x = 9x^2$$

$$9x^2 - 18x$$

$$x(9x-18) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\cos\alpha + \csc\beta = \frac{7}{25} + \frac{13}{5} = \frac{72}{25}$$

Rpta.: B

2. En el triángulo ABC de la figura, se tiene que $3\text{sen}A \cdot \text{sen}B - \cos A = 0$. Determine el valor de $\sqrt{2}$ (tgA + cscB).

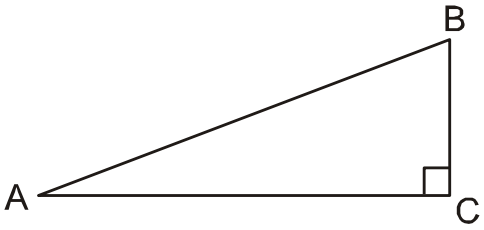
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

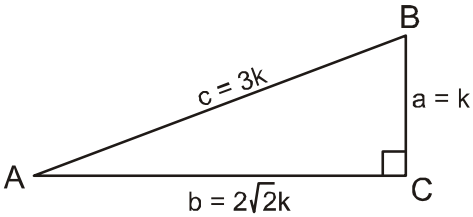


Solución:

1° De la condición

$3\text{sen}A \cdot \text{sen}B - \cos A = 0$

$3\text{sen}A - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}A = \dfrac{1}{3} = \dfrac{k}{3k}$



2° Usando el teorema de Pitágoras

$b^2 = 9k^2 - k^2 \Rightarrow b = 2\sqrt{2}k$

3° Finalmente $\sqrt{2}$ (tg A + csc B) = $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right) = 2$

Rpta.: A

3. En la figura, se muestra un poste sujetado a tierra por un cable tenso. Si $\dfrac{\text{sen}\,A}{\text{tg}\,C} = \left(\dfrac{\text{sen}\,C}{\csc A} + \dfrac{\cos C}{\sec A}\right)\csc C$, halle $\sec C$.

A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ B) 2 C) $\dfrac{3}{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) 4

Solución:

A partir del enunciado, se tiene lo siguiente:

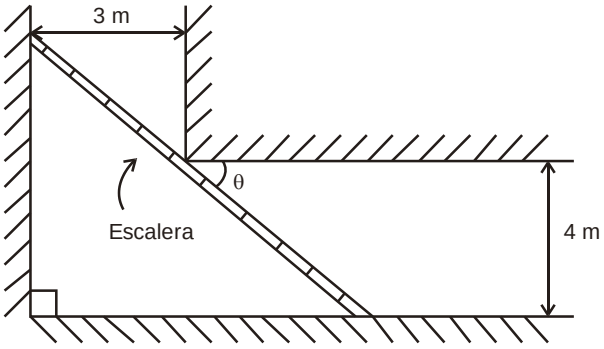
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}=\left(\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}\right)\frac{b}{c} \quad\rightarrow\quad a=2c \quad\rightarrow\quad b=\sqrt{5}\,c$$

Luego,

$$\sec C=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Rpta.: A

4. En la figura mostrada, exprese L en función de θ. Si L es la longitud de la escalera.



A) $(3\sec\theta+4\csc\theta)$m

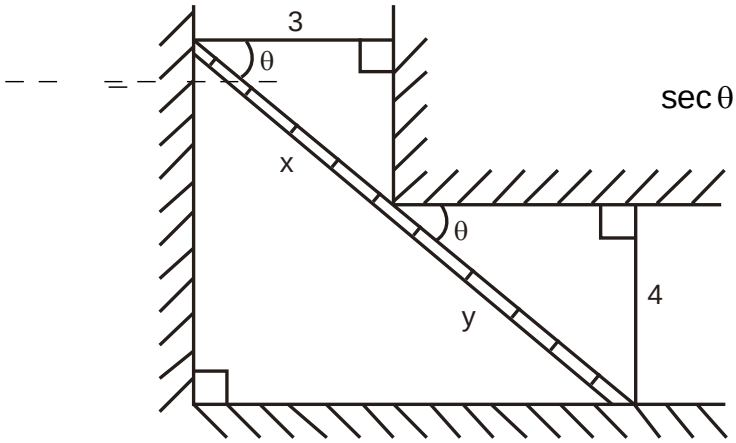
B) $(3\csc\theta+4\cos\theta)$m

C) $(3tg\theta+4ctg\theta)$m

D) $(3\cos\theta+4tg\theta)$m

E) $(3sen\theta+4\cos\theta)$m

Solución:



$$\sec\theta=\frac{x}{3} \quad\rightarrow\quad x=3\sec\theta \quad ...(1)$$

$$\csc\theta=\frac{y}{4} \quad\rightarrow\quad y=4\csc\theta \quad ...(2)$$

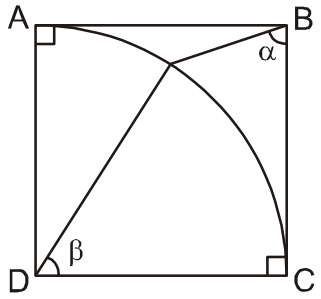
Luego, $L=x+y$

Reemplazando (1) y (2)

$L=(3\sec\theta+4\csc\theta)$m.

Rpta.: A

5. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado 15u. Si secβ = 1,5, halle tgα.



A) $\dfrac{3-2\sqrt{5}}{5}$

B) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

C) $\dfrac{3-2\sqrt{5}}{4}$

D) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}$

E) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$

Solución:

DA = DE (son radios)

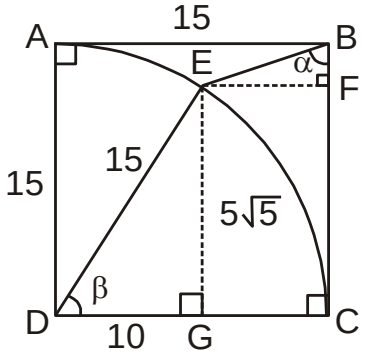
En el triángulo DGE:

$$\sec\beta = \frac{DE}{DG} = \frac{15}{DG} = 1{,}5 \Rightarrow DG = 10$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$(EG)^2 = 15^2 - 10^2 \Rightarrow EG = 5\sqrt{5}$$

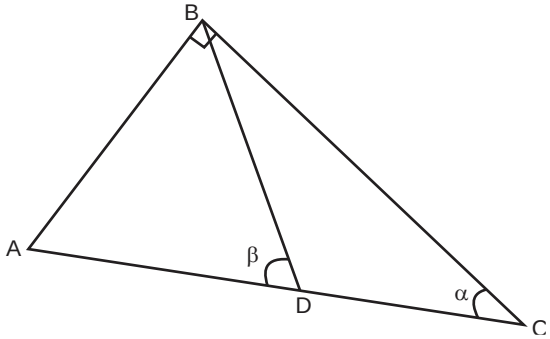
$$tg\,\alpha = \frac{EF}{BF} = \frac{GC}{BF} = \frac{DC-DG}{BC-FC}$$



$$\text{tg} = \frac{15-10}{15-5\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \quad \text{i.e.} \quad \text{tg} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

Rpta.: B

6. En la figura, los puntos A, B, C y D representan cuatro ciudades situadas a la misma altura respecto del nivel del mar y D colineal con A y C. Si las distancias entre las ciudades D y C es el doble que entre las ciudades A y B y AB=BD, calcule $\text{sen}\alpha(1+\cos\beta)$.



A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{10}{7}$ E) 3

Solución:

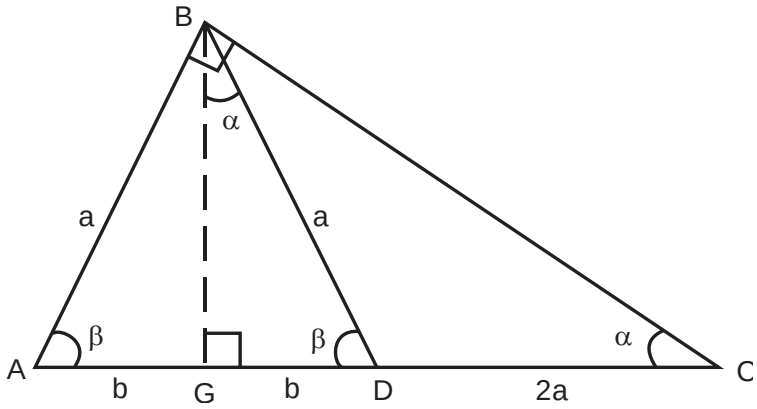
En ΔBGD:

$$\cos\beta = \frac{b}{a}$$

En ΔABC:

$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{2a+2b}$$

$$\text{sen}\alpha(1+\cos\beta)$$



$$\frac{a}{2(a+b)}\left[1+\frac{b}{a}\right] = \frac{a}{2(a+b)}\left(\frac{a+b}{a}\right) = \frac{1}{2}.$$

Rpta.: C

7. En la figura, $\text{ctg}\alpha = 25\text{ctg}\beta$, determine el valor de $\sqrt{26}\,(\text{sen}\alpha + 3\text{sen}\beta + \sqrt{26}\,\text{tg}\beta)$.

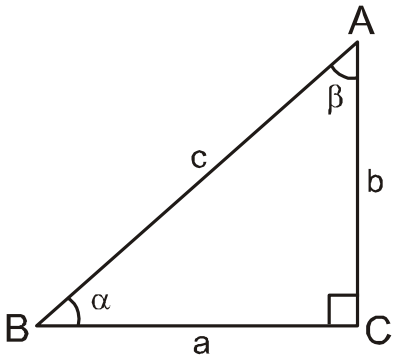
A) 146

B) 148

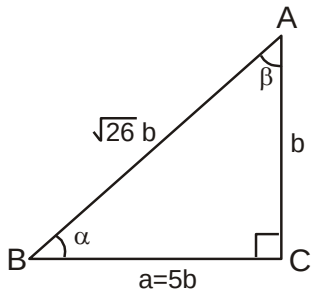
C) 145

D) 137

E) 128



Solución:



1º $\frac{a}{b} = 25\,\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad a = 5b$

2º Por Pitágoras $c = \sqrt{26}\ b$

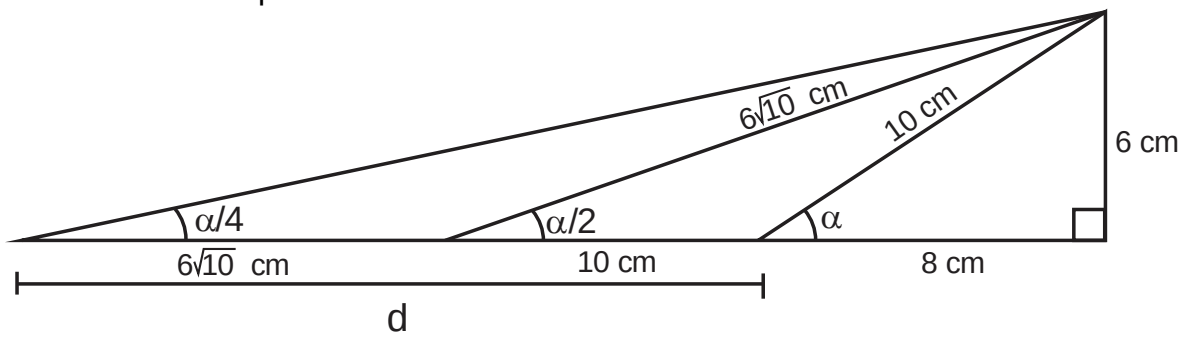
3º Finalmente $\sqrt{26}\ \left(\frac{1}{\sqrt{26}} + 3\,.\,\frac{5}{\sqrt{26}} + \sqrt{26}\ .\ 5\right) = 146$

Rpta.: A

8. Se ha construido una rampa en la entrada de un hospital para un escalón de 6 cm de alto. Esta rampa tiene 8 cm de base, pero ante el reclamo de los pacientes de tener mucha pendiente, ¿cuánto habría que aumentar a la longitud de la base para que el ángulo de inclinación sea la cuarta parte de la primera rampa?

A) $2\left(3\sqrt{10}+5\right)$ cm. B) $6\left(\sqrt{10}+3\right)$ cm. C) $6\left(\sqrt{10}+2\right)$ cm.
D) $3\left(2\sqrt{10}+8\right)$ cm. E) $3\left(2\sqrt{5}+6\right)$ cm.

Solución:
Con los datos del problema:



Reemplazando

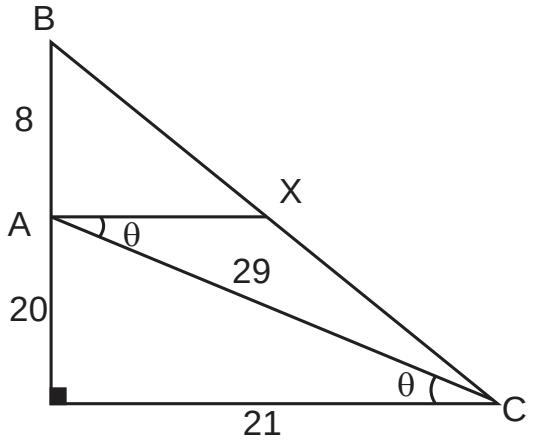
$$d = 6\sqrt{10} + 10 = 2\left(3\sqrt{10}+5\right)\ \text{cm.}$$

Rpta.: A

9. Desde una ciudad A, parten al mismo tiempo una moto y un auto con velocidades constantes de 8 Km/h y 29 Km/h respectivamente, en dirección norte y $E\theta S$, donde $\cos\theta = \frac{21}{29}$. Después de transcurrida una hora, halle la distancia que separa a dichos vehículos.

A) 39 Km B) 35 Km C) 42 Km D) 24 Km E) 49 Km

Solución:



De la figura tenemos $AB = 8$ y $AC = 29$

Como $\cos\theta = \frac{21}{29}$

Entonces AD=20

Luego, por Teor. Pitágoras

$x^2 = 21^2 + 28^2$,

Por tanto, $x = 35$ Km

Rpta.:B

10. En la figura AN = NC. Determinar el valor de $\sec\omega \cdot \csc\omega \cdot tg\,\theta$.

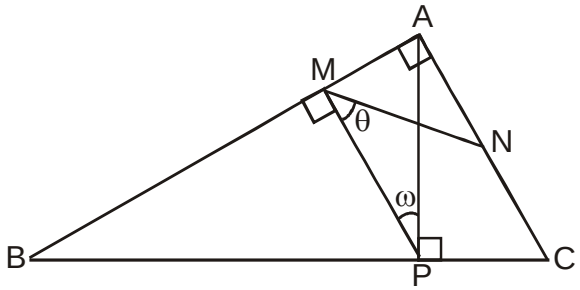
A) 1

B) $\frac{3}{2}$

C) 4

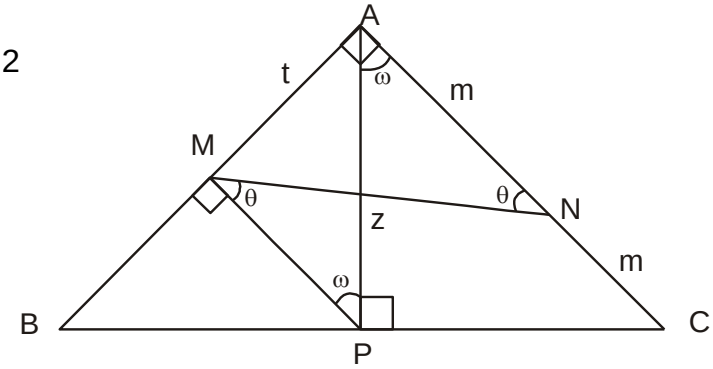
D) $\frac{1}{4}$

E) 2



Solución:

$$\sec\omega \cdot \csc\omega \cdot tg\,\theta = \left(\frac{2m}{z}\right)\left(\frac{z}{t}\right)\left(\frac{t}{m}\right) = 2$$



Rpta.: E

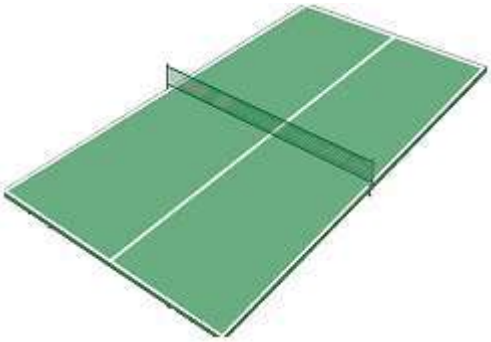
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura, se muestra una mesa rectangular de ping pong de 9 pies x 5 pies. Halle la tangente del mayor ángulo mitad que forman las diagonales de dicha mesa.

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{5}{2}$

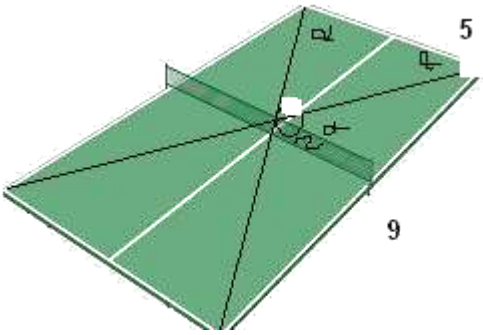
C) 2 D) $\frac{9}{5}$

E) $\frac{5}{8}$



Solución:

De la figura $tg\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = tg\alpha = \frac{9}{5}$



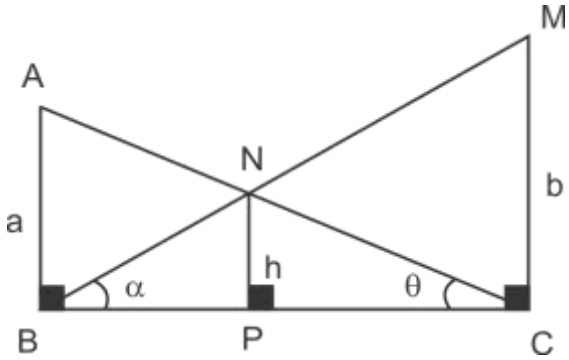
Rpta.: D

2. En la figura mostrada, halle $a.ctg\theta - b.ctg\alpha + \frac{ab}{a+b}$.

A) $\frac{1}{h}$ B) $\frac{1}{h^2}$

C) h D) 2h

E) $\sqrt{h}$



Solución:

$$a.ctg\theta = b.ctg\alpha \quad y \quad \frac{ab}{a+b} = h$$

$$\Rightarrow a.ctg\theta - b.ctg\alpha + \frac{ab}{a+b} = h$$

Rpta.: C

3. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, se cumple que $\frac{\text{Cos}B}{1-\text{Cos}A} = 4$; calcule $ctgA + \csc A$.

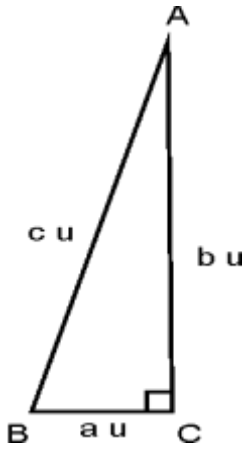
A) 6 B) 5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Solución:

$$\frac{\text{Cos}B}{1-\text{Cos}A} = 4 \Rightarrow \frac{\frac{a}{c}}{1-\frac{b}{c}} = 4 \Rightarrow a + 4b = 4c \Rightarrow c - b = \frac{a}{4}$$

$$c^2 - b^2 = a^2 \Rightarrow (c+b).\frac{a}{4} = a^2 \Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = 4$$

$$\Rightarrow \csc A + ctgA = 4$$



Rpta.: E

4. Los lados de un triángulo rectángulo ABC (recto en C), miden $(2+r)$cm, 2cm y $(2-r)$cm (r>0). Evalúe la expresión $ctg\left(\frac{A}{2}\right) + \sqrt{5}sen\left(\frac{A}{2}\right)$, donde A es el mayor ángulo agudo.

A) 2 B) 3 C) 2,5 D) 3,5 E) 1,5

Solución:

De Pitágoras

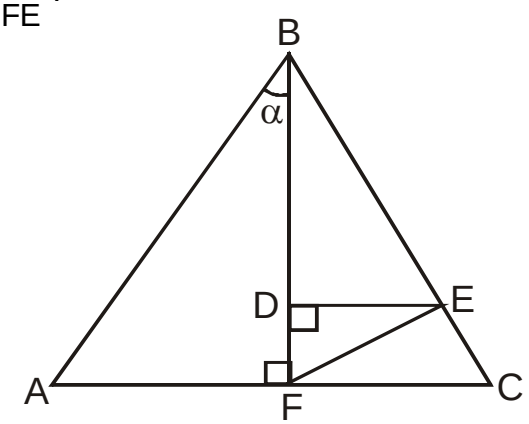
$(2+r)^2 = 2^2 + (2-r)^2 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$, luego AB=$\frac{5}{2}$, AC=$\frac{3}{2}$

y DC=4 y BD=$2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \text{ctg}\left(\frac{A}{2}\right) + \sqrt{5}\text{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = 2 + \left(\frac{2}{2\sqrt{5}}\right) = 3$

Rpta.: B

5. En la figura, AF = FC y BF = BE, hallar $\frac{DE}{FE}$.

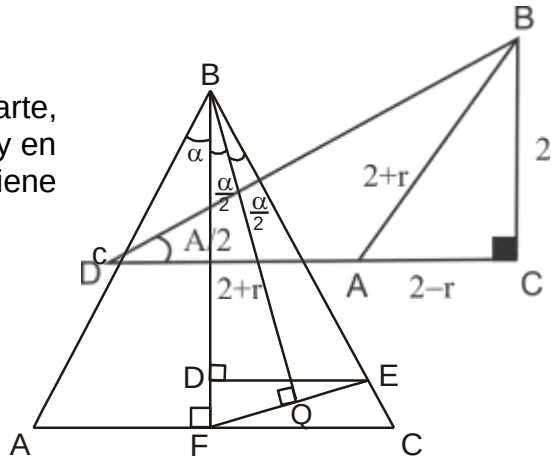


A) $\frac{\text{tg}\alpha}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$ B) $\frac{\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

C) $\frac{\text{sen}\alpha}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}}$ D) $\frac{\sec\alpha}{2\sec\frac{\alpha}{2}}$

E) $\frac{\csc\alpha}{2\csc\frac{\alpha}{2}}$

Solución:



Por ser AF = FC, BF es bisectriz. Por otra parte, como BF = BE el triángulo BFE es isósceles y en consecuencia BQ es bisectriz. Luego, se tiene que:

1° BF = c cos = BE
DE = c cos sen

2º FE = 2c cos sen $\frac{\alpha}{2}$

3º $\frac{DE}{FE} = \frac{c\cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha}{2c\cos\alpha \cdot \text{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{sen}\alpha}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}}$

Rpta.: C

Trigonometría

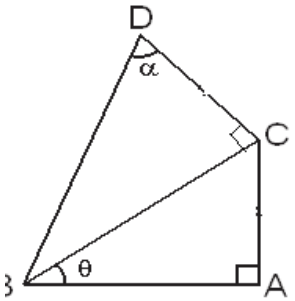
EJERCICIOS

1. De acuerdo a la figura, si $\text{tg}\alpha = \frac{9}{7}$ y AC=CD , calcule $\sqrt{2}\text{tg}\theta$.

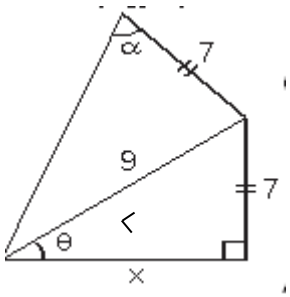
A) 2,35 B) 2,25

C) 1,75 D) 1,25

E) 2



Solución:



En la figura

$x^2 = 7^2 + 9^2$

$x = 4\sqrt{2}$

$\sqrt{2}\,\text{tg}\theta = 1{,}75$

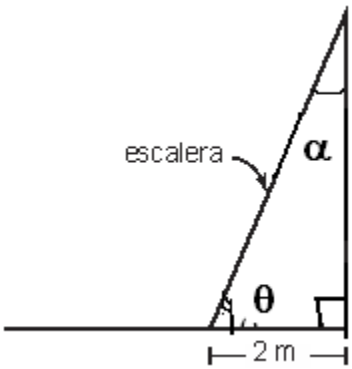
Rpta.: C

2. En la figura se muestra una escalera apoyada sobre una pared. Si $\sec\theta.\cos\alpha = 3\text{tg}\alpha.\text{tg}\theta$, halle la longitud de la escalera.

A) $2\sqrt{10}$ m B) $\sqrt{20}$ m

C) $4\sqrt{10}$ m D) $5\sqrt{10}$ m

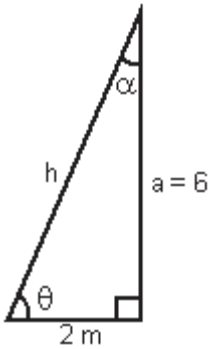
E) $4\sqrt{5}$ m



Solución:

$$\sec\theta\cos\alpha = 3\text{tg}\alpha\text{tg}\theta \Rightarrow \frac{h}{2}.\frac{a}{h} = 3.\frac{2}{a}.\frac{a}{2} \Rightarrow a = 6$$

$$h^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{10}$$



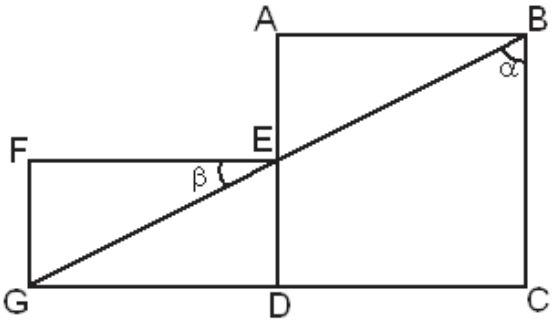
Rpta.: A

3. En la figura ABCD es un cuadrado. Si FGDE es un rectángulo y E es punto medio de $\overline{AD}$, halle $\text{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\text{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$

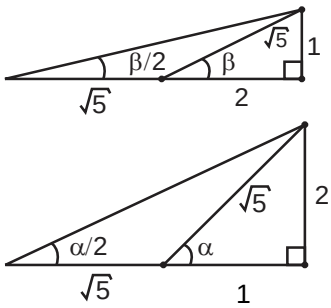
C) $\frac{1}{9}$ D) $-\frac{1}{6}$

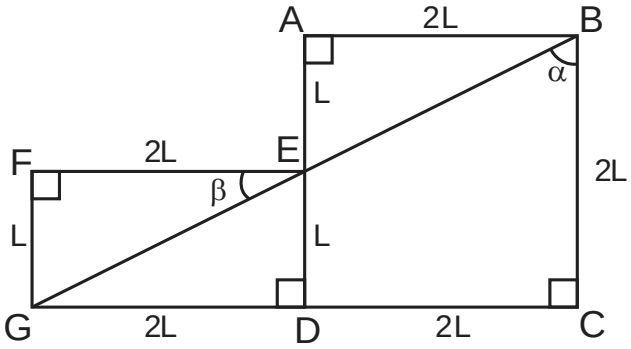
E) 2



Solución:
De la figura:

$\text{tg}\alpha = 2$ $\text{tg}\beta = \frac{1}{2}$





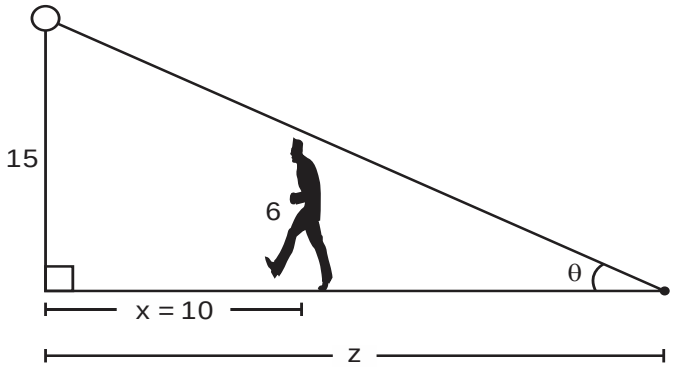
$$\text{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}.\text{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Rpta.: A

4. Un hombre de 6 pies de altura camina con una rapidez de 5pies/s, alejándose de una farola de 15 pies de altura, cuando el hombre está a 10 pies de la farola ¿con que rapidez se mueve el extremo de su sombra?

A) 5pies/s B) $\frac{25}{3}\text{pies/s}$ C) 25pies/s D) $\frac{35}{3}\text{pies/s}$ E) $\frac{25}{2}\text{pies/s}$

Solución:



Para el hombre: 10=5t entonces t =2seg

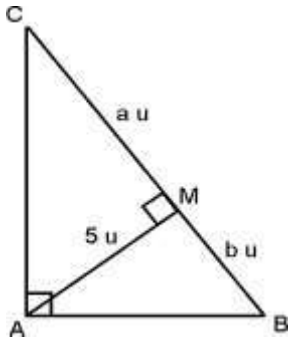
Para la sombra z=2v

$$\text{tg}\theta = \frac{15}{z} = \frac{6}{z-10} \Rightarrow z = \frac{50}{3}\text{pies}$$

$$v = \frac{\frac{50}{3}}{2} \Rightarrow v = \left(25/3\right)\frac{\text{pies}}{\text{seg}}$$

Rpta.:B

5. En el triángulo BAC se cumple que $30\text{sen}(90° - C).\text{csc}B = 28\text{csc}B - 5$. Calcule el valor de $\frac{16b}{a} + ab$.



A) B) 34

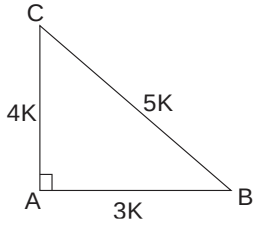
C) 5 D) 16

E) 9

Solución:

Se tiene

$5 + 30\text{sen}B.\text{csc}B = 28\text{csc}B$

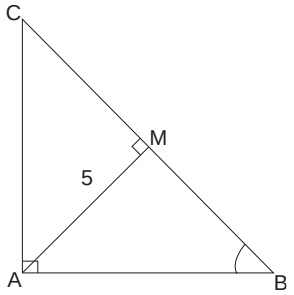


$35 = 28\text{csc}B$

$\text{csc}B = \frac{5}{4}$

Hallando BM:

$\text{tg}B = \frac{4}{3} = \frac{5}{BM} \Rightarrow BM = \frac{15}{4}$



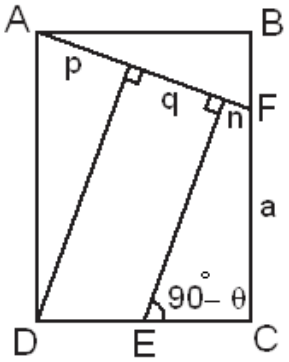
Hallando MC

$\text{tg}C = \frac{3}{4} = \frac{5}{MC} \Rightarrow MC = \frac{20}{3}$

$\therefore \frac{16b}{a} + ab = 9 + 25 = 34$

Rpta.: B

6. En la figura se muestra el plano de un mercado de forma rectangular. Si AD=2DC, halle el valor de $\frac{2\csc\theta - \sec\theta}{2\sec\theta\csc\theta}$.

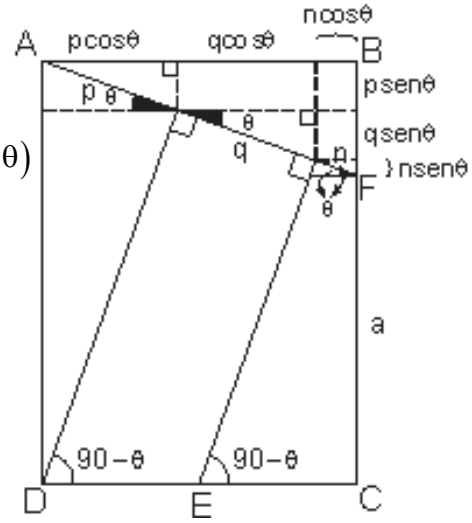


A) $\left(\frac{a}{p+q+n}\right)$ B) $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{p+q+n}\right)$

C) $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p+q+n}\right)$ D) $\frac{1}{4}\left(\frac{a}{p+q+n}\right)$

E) $\left(\frac{2a}{p+q+n}\right)$

Solución:



$AD = 2DC$

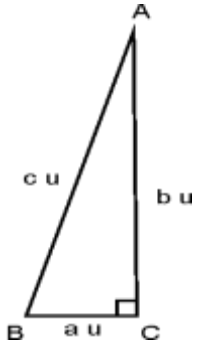
$a + psen\theta + qsen\theta + nsen\theta = 2(p\cos\theta + q\cos\theta + n\cos\theta)$

$$\frac{a}{p+q+n} = \frac{2}{\sec\theta} - \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{p+q+n}\right) = \frac{2\csc\theta - \sec\theta}{2\sec\theta\csc\theta}$$

Rpta.: B

7. En el triángulo ACB de la figura se cumple que $3a - c = 4b - 4c$. Halle el valor de la expresión $\sec\left(90° - \frac{B}{2}\right) + 8\sec A$

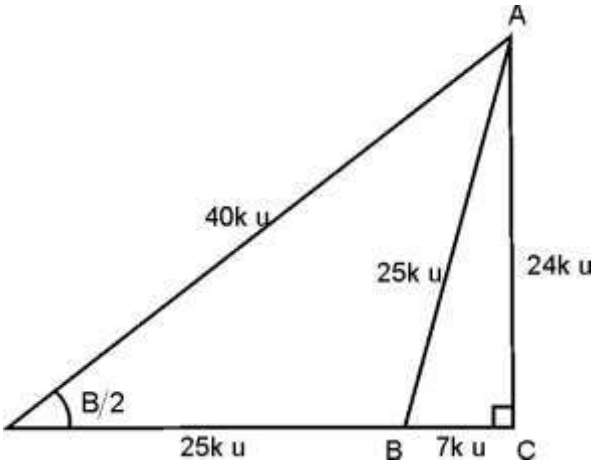


A) 8 B) 12

C) 15 D) 20

E) 10

Solución:



Tenemos $a^2 + b^2 = c^2$ y $a + c = \frac{4b}{3}$,

entonces

$$(c+a)^2 = \frac{16b^2}{9} \Rightarrow (c+a)^2 = \frac{16}{9}(c^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow c + a = \frac{16}{9}(c-a) \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{25k}{7k}$$

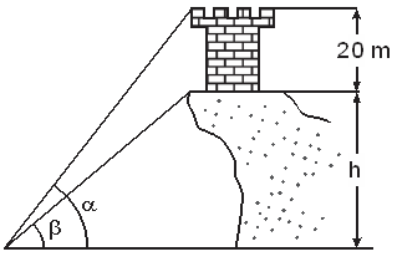
Luego

$$\csc\frac{B}{2} + 8\sec A = \frac{40}{24} + 8\left(\frac{25}{24}\right)$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{25}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

Rpta.: E

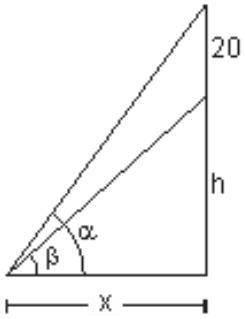
8. Una torre está a borde de un acantilado, tal como se observa en la figura. Si $4\cos 10°.\sec\left(\frac{100^g}{9}\right).\text{tg}\alpha = 9$ y $\text{ctg}20°\text{tg}\beta\text{tg}20°=2$. Calcule la altura del acantilado.



A) 165 m B) 163 m

C) 162 m D) 150 m

E) 160 m



Solución:

$4\cos 10°.\csc 80°.\text{tg}\alpha = 9$

$\Rightarrow \text{tg}\alpha=\frac{9}{4} \Rightarrow \text{tg}\alpha=\frac{9}{4} = \frac{20+h}{x}$...(1)

$\text{tg}70°\text{tg}\beta\text{tg}20°=2 \Rightarrow \text{tg}\beta=2 \Rightarrow \text{tg}\beta=2=\frac{h}{x}$...(2)

dividiendo $\frac{9}{8} = \frac{20+h}{h} \Rightarrow h=160m$

Rpta.: E

9. Elvis y Carlos parten de un punto A en direcciones $E(\theta - x)N$ y Este respectivamente. Luego de un tiempo Elvis se encuentra en el punto P al norte de Carlos, momento en el cual Carlos decide cambiar de rumbo, dirigiéndose a $E\theta N$ para encontrarse ambos en el punto B. Si AP=PB, halle $\text{tg}x$.

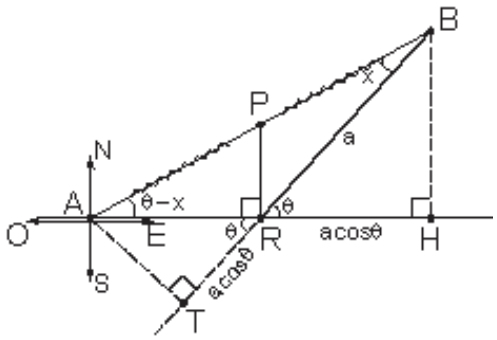
A) $\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$ B) $\frac{\text{sen}\theta+\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$ C) $\frac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$

D) $\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}$ E) $\frac{\text{sen}\theta}{1+\cos^2\theta}$

Solución:

$AT = a\,sen\theta\cos\theta$ y $RT = a\cos^2\theta \Rightarrow BT = a\left(1+\cos^2\theta\right)$

$tgx = \dfrac{sen\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta}$



Rpta.: A

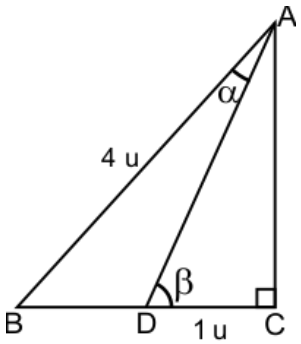
10. En la figura, si $\sqrt{3}tg\beta = 6$, halle el valor de la expresión

$sen\left(90° + \alpha - \beta\right)\sqrt{13}\cos\beta + \sqrt{3}ctg\alpha$.

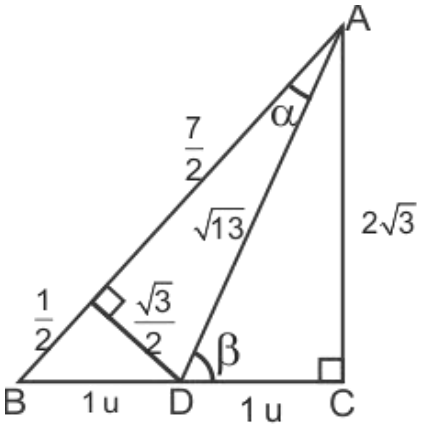
A) $\dfrac{9}{2}$ B) 8

C) $\dfrac{15}{2}$ D) 4

E) 6



Solución:



$tg\beta = 2\sqrt{3}$

$sen\left(90° + \alpha - \beta\right)\sqrt{13}\cos\beta + \sqrt{3}ctg\alpha = \dfrac{1}{2} + 7 = \dfrac{15}{2}$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Las medidas de los lados de un terreno en forma de triángulo rectángulo T son a metros, b metros y c metros siendo a, b, c números pares consecutivos. Calcular $ctg(\frac{\alpha}{2})$, si α es el mayor ángulo agudo de T.

A) $\dfrac{3}{2}$ B) 2 C) $\dfrac{5}{4}$ D) $\dfrac{5}{2}$ E) $\dfrac{4}{3}$

Solución:

De la condición: $a = x,\ b = x + 2$ y $c = x + 4$.

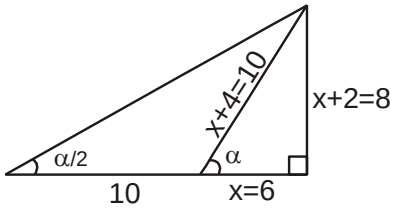
Luego usando el teorema de Pitágoras

$(x + 4)^2 = (x + 2)^2 + x^2$

$(x - 6)(x + 2) = 0$

$x = 6$

$\Rightarrow ctg(\frac{\alpha}{2}) = \frac{16}{8} = 2$



Rpta.: B

2. En la figura, el área de la región limitado por el rectángulo ABCD es $32\ cm^2$. Si $2tg\alpha = tg45°$ y ED=10 cm, halle el menor perímetro del rectángulo ABCD.

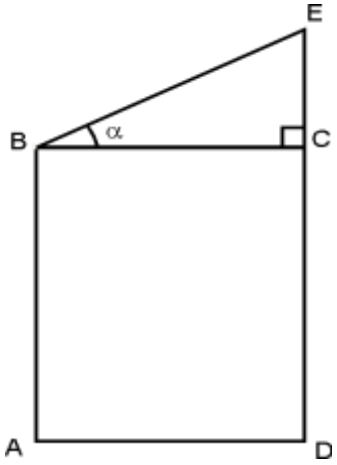
A) 22,8 cm

B) $\frac{68}{3}$ cm

C) 30 cm

D) 36 cm

E) 24 cm



Solución:

Si $BC = x$ cm, $CD = y$ cm entonces $EC = 10 - y$

$tg\alpha = \frac{1}{2} = \frac{10 - y}{x}$

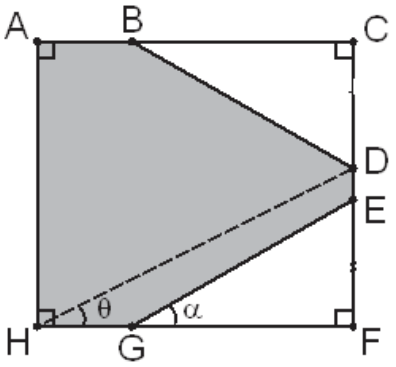
$$\left.\begin{array}{l} 20 - 2y = x \\ xy = 32 \end{array}\right\}$$

$(20 - 2y)y = 32 \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow y = 8,\ x = 4 \vee y = 2,\ x = 16$

Perímetro menor del rectángulo es 8+8+4+4=24 cm

Rpta.: E

3. La región sombreada muestra una vista de un inyector hidráulico. Si $HG = \frac{HF}{3}$, CD=EF, $\text{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ y $AH = 5DE = 40\text{cm}$, determine $\text{ctg}\theta$.



A) B) 1,5

C) 1,6 D) 2,5

E) 3,5

<u>Solución</u>:

AH=40, DE=8 entonces CD=EF=16

. $\text{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{2}{3} = \frac{EF}{GF} \Rightarrow GF = 24$

.HF=3AB y AB=HG entonces HG=12

Por lo tanto $\text{ctg}\theta = \frac{36}{24} = 1{,}5$

Rpta.: B

4. Dado un triángulo ABC, recto en A, calcule el valor de $\left(b^2 - a^2\right)^{\frac{(\sec C + \csc B)^2}{1+\text{tg}^2 C}}$.

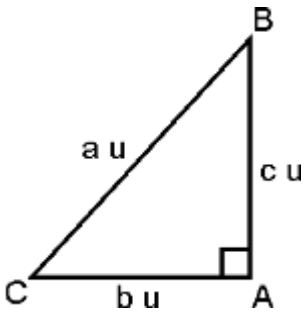
A) c^4

B) $-c^4$

C) 1

D) 2

E) c^8



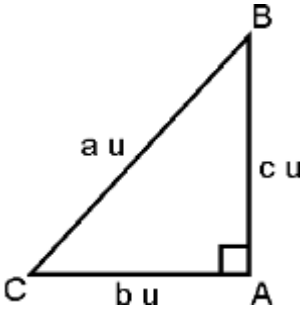
Solución:

$$E=\frac{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\right)^2}{1}$$

$$E=\frac{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2a}{b}\right)^2}{1};\text{T.P.}: a^2=b^2+c^2$$

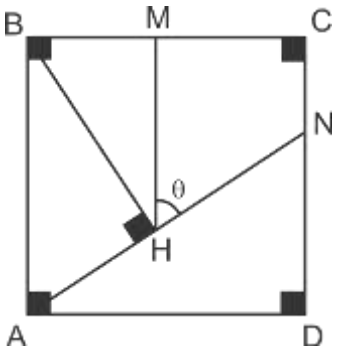
$$E=4$$

$$\left(b^2-a^2\right)^{\frac{(\sec C+\csc B)^2}{1+tg^2C}}=\left(b^2-a^2\right)^4=c^8$$



Rpta.: E

5. En la figura ABCD es un cuadrado. Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y CN=au , ND=bu, halle $\left(\frac{\text{sen}\theta-\cos\theta}{\cos\theta}\right)(a+b)$.



A) $\frac{b}{a+b}$ B) $\frac{a}{a+b}$

C) a D) b

E) $a+b$

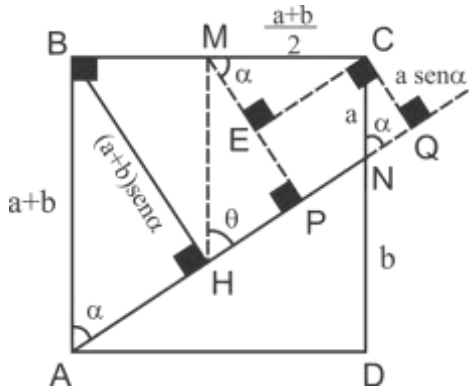
Solución:

En el trapecio MBCQ

$$\overline{MP}=\frac{\overline{CQ}+\overline{BH}}{2}=\left(\frac{2a+b}{2}\right)\text{sen}\alpha$$

$$HP=PQ=EC=\left(\frac{a+b}{2}\right)\text{sen}\alpha$$

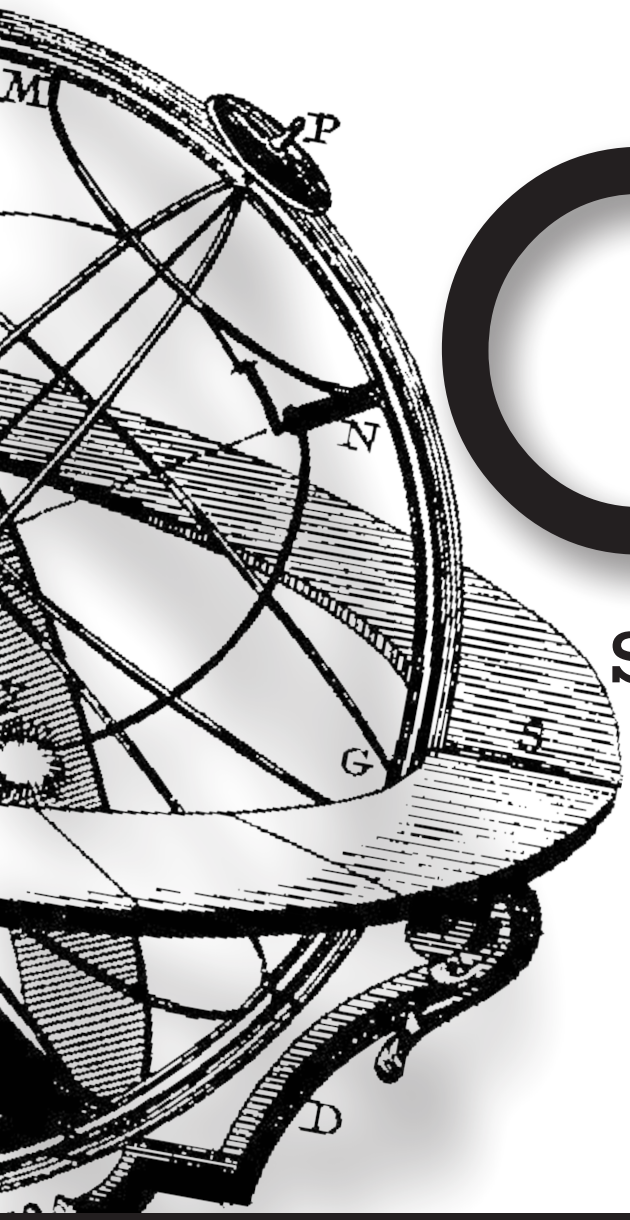
$$\Rightarrow tg\theta=\frac{MP}{HP}=\frac{2a+b}{a+b}\Rightarrow(a+b)(tg\theta-1)=a$$



Rpta.: C

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



04

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

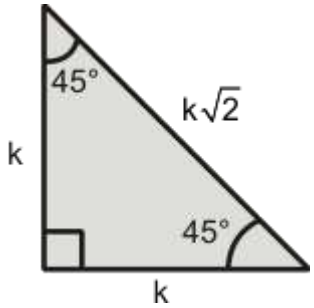
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS II

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

$$\alpha+\beta=90° \;\Leftrightarrow\; RT(\alpha)=CO-RT(\beta)$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES.

2.1. *Razones trigonométricas del ángulo de **45°***

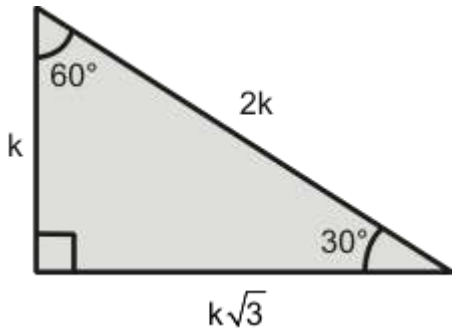


$$\text{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$

$$\tan 45° = 1 = \cot 45°$$

$$\sec 45° = \sqrt{2} = \csc 45°$$

2.2. *Razones trigonométricas de los ángulos de **30°** y **60°***

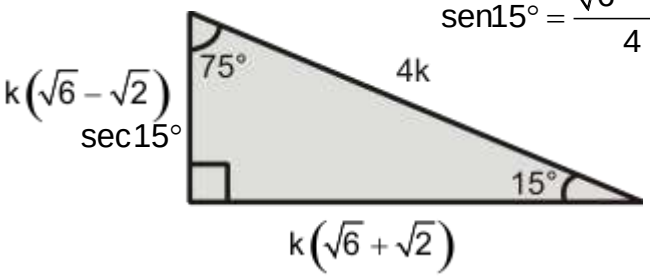


$$\text{sen}30° = \frac{1}{2} = \cos 60°$$

$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \cot 60°$$

$$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \csc 60°$$

2.3. *Razones trigonométricas de los ángulos de **75°** y **15°***



$$\text{sen}15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75°$$

$$\tan 15° = 2-\sqrt{3} = \cot 75°$$

3. ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

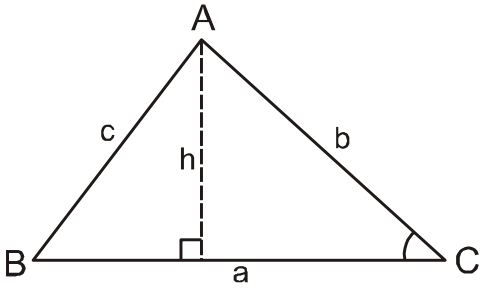
3.1. *Área en función de dos lados y el ángulo comprendido*

Determinando una altura del triángulo ABC

Si $\text{sen}C = \dfrac{h}{b}$, entonces $h = b\,\text{sen}C$

luego,

$S = \dfrac{ab\,\text{sen}C}{2}$ es el área de la región triangular ABC.



3.2. *Área del triángulo en función de sus lados*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, \text{ donde } \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

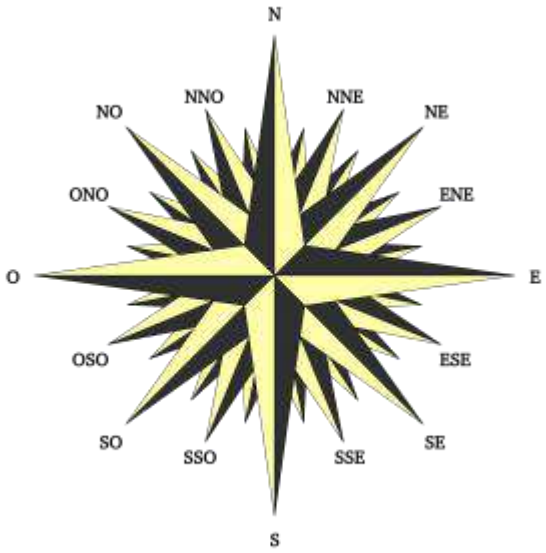
4. ÁNGULOS HORIZONTALES

Son aquellos ángulos que están contenidos en un plano horizontal.

***La Rosa Naútica*,** conocida también como la Rosa de los Vientos, es un gráfico que contiene 32 direcciones notables.

Direcciones Principales: Norte (N), Sur (S), Este (E) y Oeste (O).

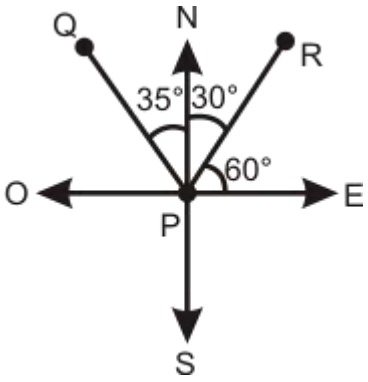
Direcciones Secundarias: Noreste(NE), Noroeste (NO),Sureste (SE) y Suroeste (SO).



4.1 ***Rumbo:*** Es la posición que tiene un punto con respecto a la línea NORTE-SUR; tomando como referente el ángulo agudo.

Ejemplo: El rumbo de Q respecto a P es de 35° al Oeste del Norte (N35°O).

4.2 ***Dirección:*** Es la trayectoria que sigue un determinado punto.



Ejemplo: La dirección de R respecto a P es de 30° al Este del Norte ó 60° al Norte del Este (N30°E ó E60°N).

Nota: El rumbo N35°O puede ser considerado dirección, pero la dirección E60°N no puede ser considerado rumbo.

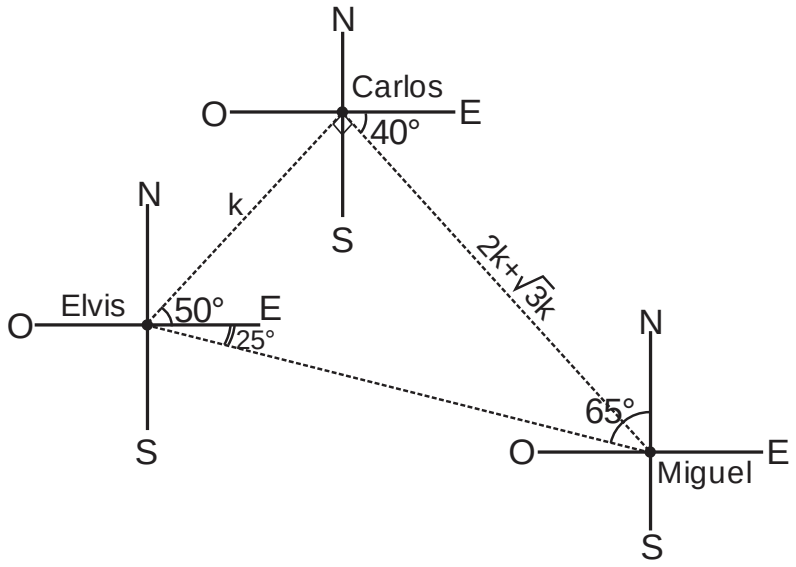
Trigonometría

EJERCICIOS

1. En un partido de fulbito Elvis corre con la pelota de Oeste a Este. En un instante se detiene y observa Carlos en la dirección E50°N y realiza un pase en esa dirección de $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m, A su vez Carlos ubica a Miguel en la dirección E40°S y realiza un pase hacia él en esa misma dirección ¿A qué distancia se encuentra Elvis de Carlos, si Miguel observa a Elvis en la dirección N65°O?

A) 16m
B) 18 m
C) $16\sqrt{2+\sqrt{3}}$ m
D) $8\sqrt{2+\sqrt{3}}$ m

Solución:



De la figura se concluye que se forma un triángulo rectángulo de 15°y 75°.

La distancia de Elvis a Carlos es $d = 2k\sqrt{2+\sqrt{3}}$ m

Como $k = 8\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m reemplazamos en la distancia anterior:

$\therefore d = 2\times 8\sqrt{2-\sqrt{3}}\times\sqrt{2+\sqrt{3}} = 16$ m

Rpta.: A

2. Un poste de teléfono de 30 m de longitud está inclinado 15° con respecto a la vertical. Si el poste estuviera de forma vertical (sin inclinación) ¿en cuánto aumentaría la altura de la parte superior de dicho poste ?

A) $15(4+\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m

B) $7.5(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m

C) $15(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ m

D) $7.5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m

Solución:

x : aumento de h

En ΔABC

$\text{sen}75° = \dfrac{h}{30} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 30\text{sen}75°$

como la altura vertical

es $x+h$, entonces

$30\text{sen}75° + x = 30$

$\Rightarrow x = 30 - 30\text{sen}75° \approx 1.02222521$

$\Rightarrow x = 30 - 30\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

$x = 7.5(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})$ m ≈ 1.02222521

Rpta.: B

3. El Sr. Ruiz posee un terreno que tiene forma de triángulo rectángulo. Si el área de dicho terreno dado por la expresión $\dfrac{5+6\sqrt{2}\,\text{sen}(90°-\alpha)}{5}$ ha, donde α es el mayor ángulo agudo del triángulo que representa el terreno, determine la máxima cantidad entera de hectáreas que podría vender el Sr. Ruiz.

A) 2 ha B) 1 ha C) 3 ha D) 4 ha

Solución:

Del enunciado:

$$\text{Área} = \frac{5+6\sqrt{2}\cos\alpha}{5}\ \text{ha}$$

Del dato:

$$45° < \alpha < 90°$$

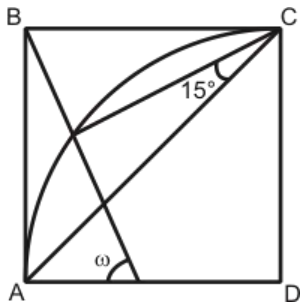
$$0 < \cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad 1\,\text{ha} < \text{Área} < \frac{11}{5}\ \text{ha}$$

$\therefore$ Máxima cantidad entera de hectáreas $= 2$ ha

Rpta.: A

4. La figura muestra el plano de los corredores de un mercado, siendo $\text{sen}\omega = \cos\phi$. Calcular $\beta + 6°$, si β es un ángulo ideal para colocar las cámaras de seguridad. ABCD es un cuadrado, además $\tan^2\phi + 5\sqrt{3} - 5 = \tan\beta$.

A) 73°
B) 82°
C) 81°
D) 77°



$\tan^2\phi + 5\sqrt{3} - 5 = \tan\beta$

Solución:

$\text{sen}\omega = \cos\phi \rightarrow \omega + \phi = 90°$

$m < HCA = 30° \Rightarrow HC = \sqrt{3}, EC = 2$

Luego $BH = 2 - \sqrt{3}$.

$\tan\phi = 2 - \sqrt{3}$

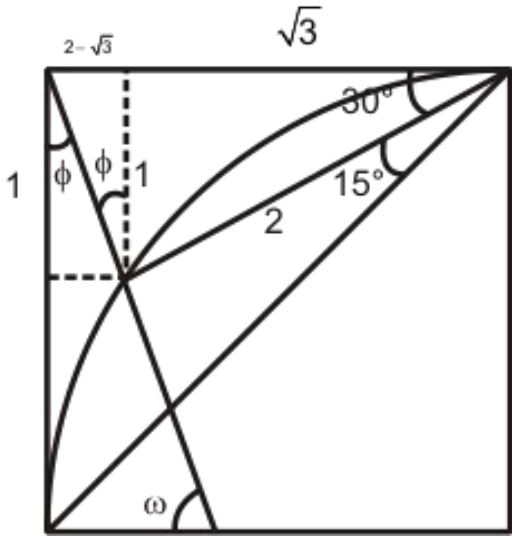
Entonces

Si $\tan^2\phi + 5\sqrt{3} - 5 = \tan\beta$

Tenemos que $\tan\beta = 2 + \sqrt{3}$

$\beta = 75°$

Luego: $\beta + 6° = 81°$

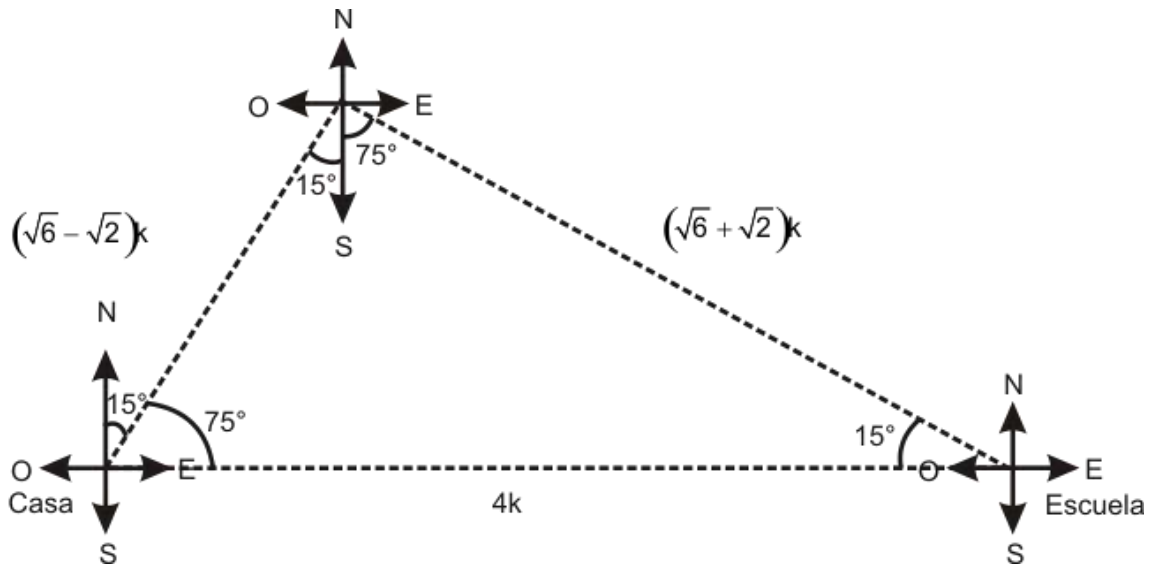


Rpta.: C

5. Thiago parte de su casa caminando en la dirección N15°E, luego cambia de dirección al S75°E, llegando de este modo a su Escuela que se sitúa al Este de su casa. Si el recorrido total de Thiago es de $200\sqrt{6}$ m ¿Qué distancia hay entre la casa de Thiago y su Escuela?

A) 500 m B) 800 m C) 600 m D) 400 m

Solución:



De la figura, el recorrido total de Thiago es: $2\sqrt{6}k = 200\sqrt{6} \rightarrow k = 100$.

La distancia entre la casa de Thiago y la escuela es de 400 m.

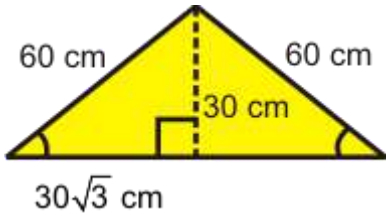
Rpta.: D

6. Luis desea construir un cartel de forma triangular, donde dos de sus lados midan 60 cm. Si uno de sus ángulos iguales es 30°, determine el área de dicho cartel.

A) $900\sqrt{3}$ cm^2 B) $400\sqrt{3}$ cm^2 C) $500\sqrt{3}$ cm^2 D) $600\sqrt{3}$ cm^2

Solución:

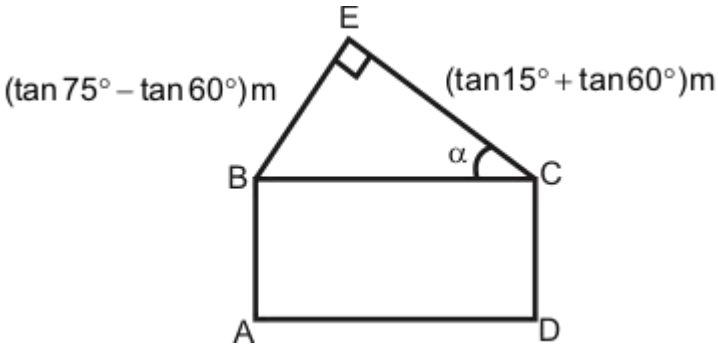
El Cartel sería de esta forma:



Luego el área del cartel sería de $900\sqrt{3}$ cm^2.

Rpta.: A

7. En la figura se representa la fachada de una casa, determine el área del muro representado por la región rectangular ABCD, si uno de sus lados mide $\tan\left(\frac{4\alpha}{3}\right)$ m



A) $2\sqrt{6}$ m^2 B) $2\sqrt{3}$ m^2 C) $2\sqrt{5}$ m^2 D) $\sqrt{6}$ m^2

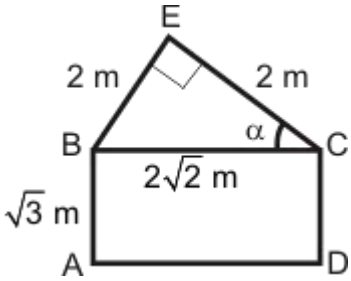
Solución:

$\tan 75° - \tan 60° = 2$

$\tan 15° + \tan 60° = 2$

Entonces $\alpha = 45°$

$\tan\left(\frac{4\alpha}{3}\right) = \tan 60° = \sqrt{3}$

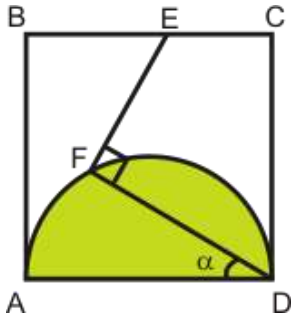


Rpta.: A

8. La siguiente figura representa una plaza cuadrangular ABCD, dentro de ella hay una zona verde representada por la semicircunferencia AFD, Tres amigos Eduardo, Daniel y Amelia ubicados en los puntos E, D y A, se dirigen a su encuentro en el punto F si $BE = 1\,\text{hm}$, y $EC = (\sqrt{3} - 1)$ hm. Determine la mínima longitud que debe recorrer Amelia para llegar al punto de encuentro.

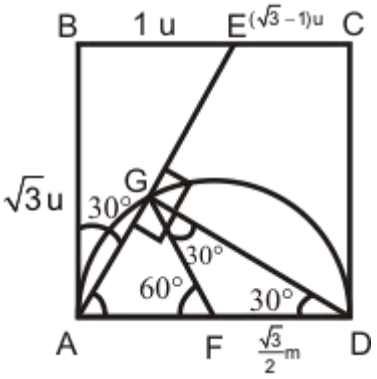
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$



Solución:

De la figura como el triángulo AGF es equilátero entonces: $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Rpta.: A

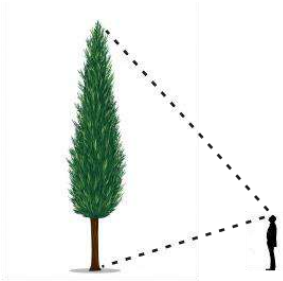
9. Thiago observa la parte más alta de un árbol con un ángulo de elevación de 75°, luego observa la base de este con un ángulo de depresión de 15°. Si Thiago comienza a caminar en línea recta hacia el árbol que mide 20 m de alto con una velocidad de $2.5\ m/s$ ¿En cuánto tiempo Thiago llega hasta el árbol?

A) 2 s

B) 1,5 s

C) 2,5 s

D) 1 s

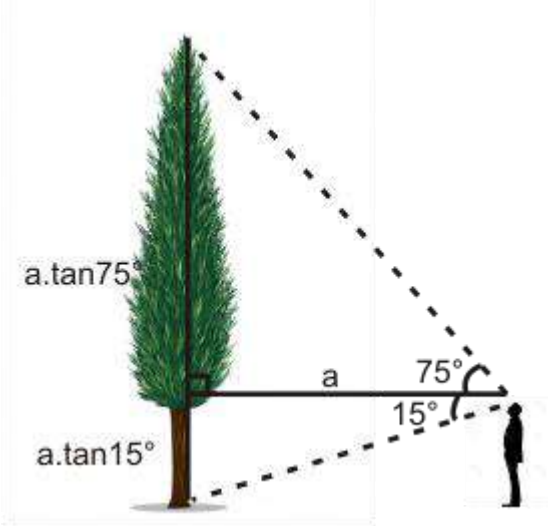


Solución:

La altura del árbol es:

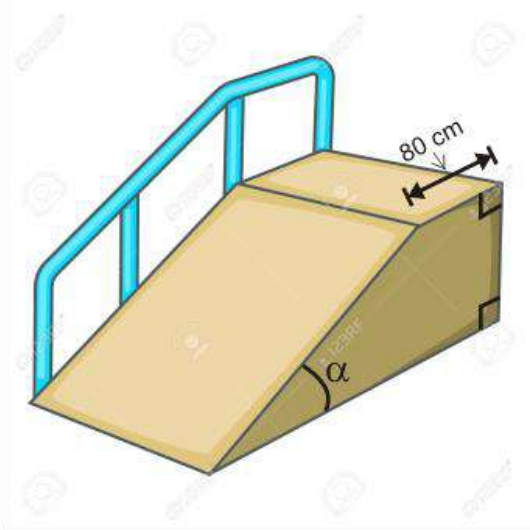
$h = a\tan 75° + a\tan 15° = 4a = 20 \rightarrow a = 5$

Como la $e = v.t$ y la velocidad de Thiago es de 2.5 m/s entonces se demorará 2 segundos en llegar al árbol.



Rpta.: A

10. Un ingeniero diseña una rampa como se representa en la figura, que se construirá con planchas de metal, la pendiente de la rampa está determinada por el ángulo α, cuya medida es 60°.



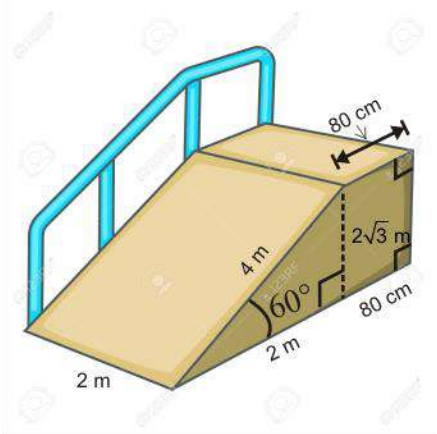
Si el largo de la base de la rampa mide 2.8 metros y el ancho es 2 m ¿cuántos metros cuadrados de la plancha inclinada de metal se necesita para construir la rampa?

A) $8\,m^2$ B) $6\,m^2$

C) $5\,m^2$ D) $12\,m^2$

Solución:

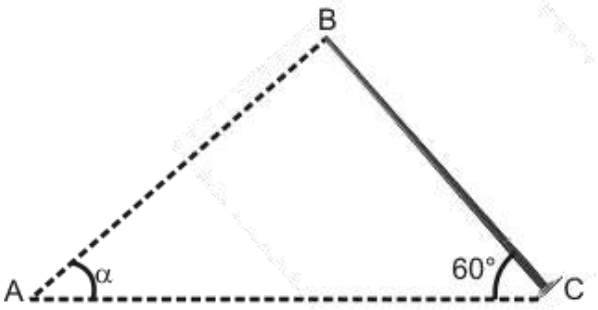
De la figura mostrada tenemos que el área de la plancha inclinada es de 8 m^2.



Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

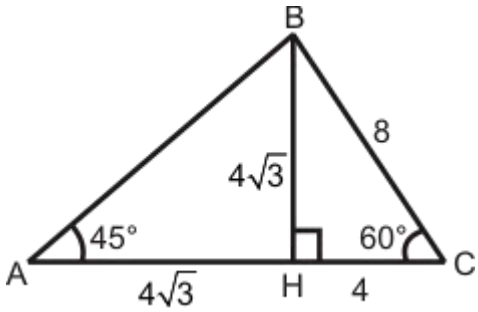
1. En la figura BC representa un poste inclinado de 8 m, que está a punto de caerse. Desde el punto A Luka observa la parte más alta del poste con un ángulo de elevación de 45° ¿A qué distancia de Luka cae la parte superior del poste?



A) $4(\sqrt{3}-1)$ m B) $2(2\sqrt{3}-1)$ m C) $2(\sqrt{3}-1)$m D) $3(\sqrt{3}-1)$m

Solución:

Si el poste teniendo como punto fijo al vértice C, en la figura, como 8 metros son ocupados por el poste desde C sobre AC, el resto es la distancia que que habría entre Luka y la parte superior del poste.



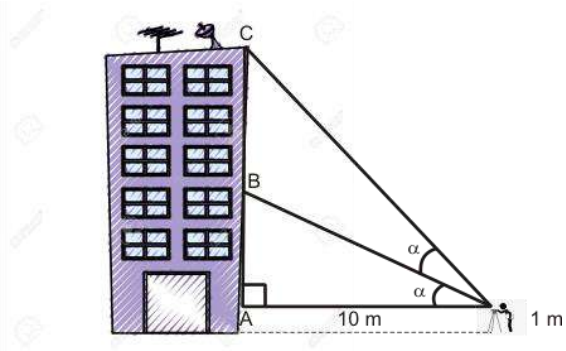
Como la distancia entre los puntos A y C, es $\left(4\sqrt{3}+4\right)$ m

Entonces la distancia entre Luka y la parte superior del poste es $\left(4\sqrt{3}-4\right)$ m.

Rpta.: A

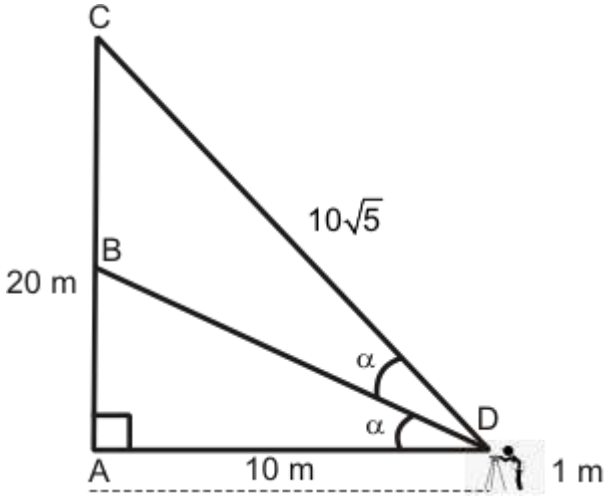
2. En la figura se representa a un ingeniero observando la parte más alta del edificio con un ángulo de elevación 2α, luego observa un punto del segundo piso del edificio, donde se colocará una cámara de vigilancia con un ángulo de elevación α. Si el edificio mide 21 m, ¿a qué altura respecto al suelo se encuentra la cámara?

A) $(5\sqrt{5}-4)$ m
B) $5(\sqrt{5}-1)$ m
C) $(5\sqrt{5}-3)$ m
D) $3(\sqrt{5}-2)$ m

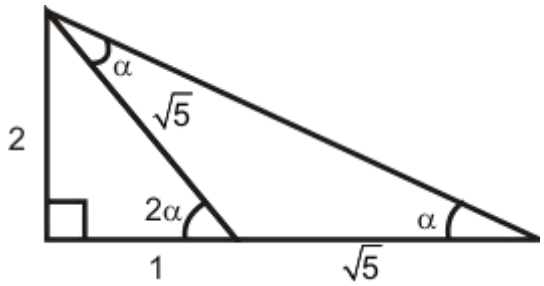


Solución:

En la figura llega a visualizar un triángulo rectángulo



Notamos que el triángulo ABD es semejante al triángulo de abajo, luego:



$$\tan\alpha = \frac{AB}{10} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \rightarrow AB = \frac{20}{\sqrt{5}+1} = 5\left(\sqrt{5}-1\right)\text{ m}$$

Entonces la cámara se encuentra a una altura de $\left(5\sqrt{5}-4\right)$ m.

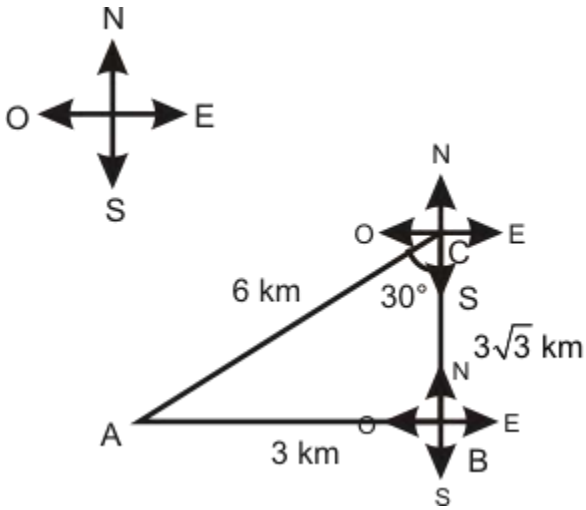
Rpta.: A

3. Un excursionista, que se encuentra alojado en el hotel donde su ubicación está representado por el punto A, desea dirigirse a un pueblo llamado Ingenio donde su ubicación está representado por el punto C, Se sabe que el hotel está a 3 kilómetros hacia el Oeste de otro pueblo ubicado en el punto B, éste último se encuentra al Sur de Ingenio, que está a 6 kilómetros del hotel, ¿Cuál es la distancia entre los pueblos y en qué dirección se encuentra el hotel respecto al el excursionista cuando llegue a Ingenio?

A) $2\sqrt{3}$ km, N30°E
B) $3\sqrt{3}$ km, O60°S
C) $\sqrt{3}$ km, N30°O
D) $5\sqrt{3}$ km, S30°O

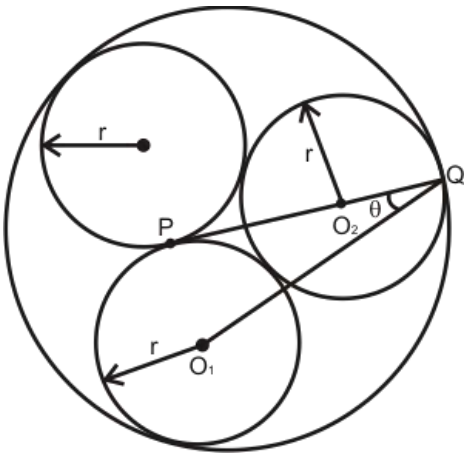
<u>Solución</u>:

Deacuerdo a los datos obtenidos, obtenemos un triángulo rectángulo de 30° y 60°, donde la distancia entre los pueblos es de $3\sqrt{3}$ km y la dirección del Hotel respecto al excursionista cuando llegue a Ingenio es O60°S.



Rpta.: B

4. La figura muestra la sección transversal de un conductor trifásico. Calcule $\cot\theta$; siendo O_1 y O_2 centros; P y Q son puntos de tangencia.



A) $\sqrt{3}/3$

B) $\sqrt{3}$

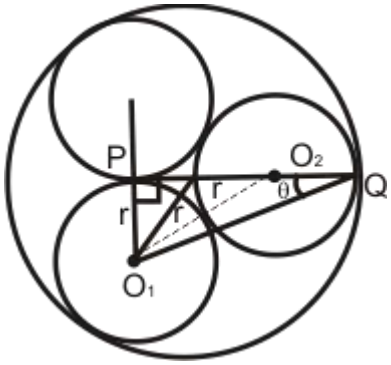
C) $\sqrt{3}+1$

D) $\sqrt{3}-1$

<u>Solución</u>:

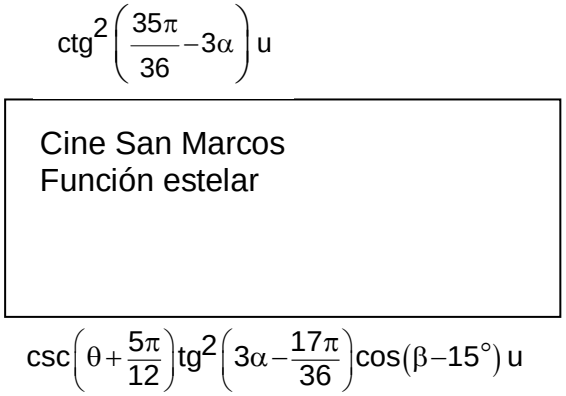
Uniendo los centros O_1 y O_2, tenemos un triángulo notable de 30° y 60°, luego $PO_2=\sqrt{3}r$,

luego $\cot\theta=\sqrt{3}+1$



Rpta.: C

5. Las entradas para una función cinematográfica se imprimen en forma rectangular, tal como se aprecia en la figura, costando cada una de ellas $25\text{tg}(\theta+\beta+15^\circ)$ soles.
Si al cine San Marcos asistieron 50 personas y todos los angulos considerados son agudos, ¿cuánto dinero se recaudo?



A) 2500 soles

B) 3000 soles

C) 1250 soles

D) 1020 soles

Solución:

1) Desde que el boleto es rectangular se tiene que

$$\text{ctg}^2\left(\frac{35\pi}{36}-3\alpha\right)=\csc\left(\theta+\frac{5\pi}{12}\right)\text{tg}^2\left(3\alpha-\frac{17\pi}{36}\right)\cos(\beta-15^\circ)$$

Como $\left(\frac{35\pi}{36}-3\alpha\right)+\left(3\alpha-\frac{17\pi}{36}\right)=\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \text{ctg}^2\left(\frac{35\pi}{36}-3\alpha\right)=\text{tg}^2\left(3\alpha-\frac{17\pi}{36}\right)$

$$\Rightarrow\quad \csc\left(\theta+\frac{5\pi}{12}\right)\cos(\beta-15^\circ)=1 \quad\Rightarrow\quad \text{sen}\left(\theta+\frac{5\pi}{12}\right)=\cos(\beta-15^\circ)$$

Como los ángulos son agudos: $\theta+\frac{5\pi}{12}+\beta-15^\circ=90^\circ \quad\Rightarrow\quad \theta+\beta=30^\circ$

2) Costo de la entrada: $25\text{tg}(\theta+\beta+15^\circ)=25\text{tg}45^\circ=25$

$\Rightarrow$ Recaudación $=25(50)=1250$ soles.

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Un pájaro que está posado en el suelo se encuentra al Sur de un árbol de altura $2\sqrt{6}$ m y al SE de otro árbol de altura 9 m que se encuentra al Oeste del anterior. Si la trayectoria lineal de vuelo del pájaro hacia la cima de la copa del árbol pequeño con su vertical forman un ángulo de $60°$, calcule la longitud de la menor trayectoria en vuelo que debe realizar el pájaro para ubicarse en la copa del árbol más alto.

A) 15 m B) 12 m C) 16 m D) 18 m

Solución:

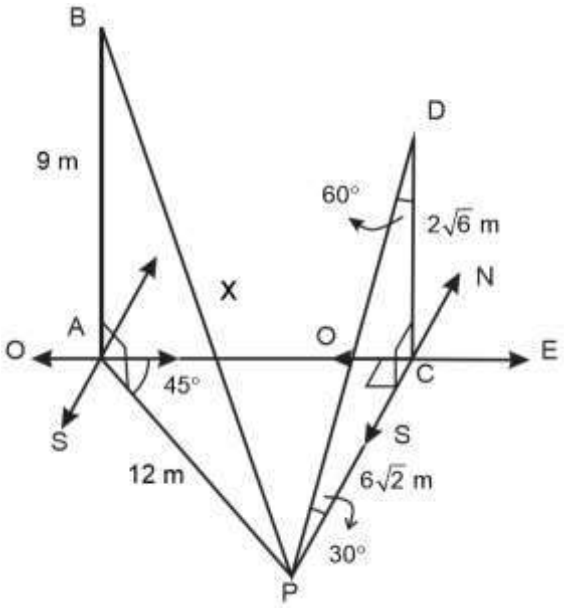
Del gráfico:

$PC = 6\sqrt{2}$ m; $AP = 12$ m

Debemos hallar BP

$6\sqrt{2}$ m

$\therefore$ $BP = 15$ m



Rpta.: A

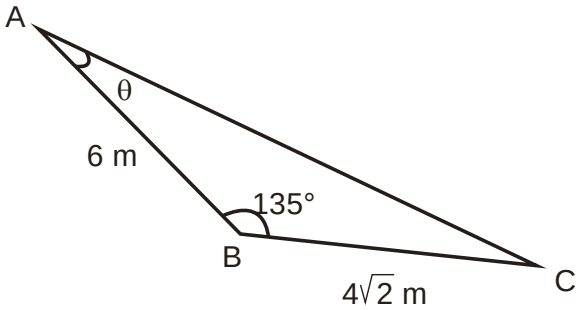
2. El costo por pintar un metro cuadrado de una plancha de forma triangular, como en la figura, es $\left(25\tan^2\theta + 8\right)$ soles. Halle el costo por pintar la plancha mencionada.

A) 110 soles

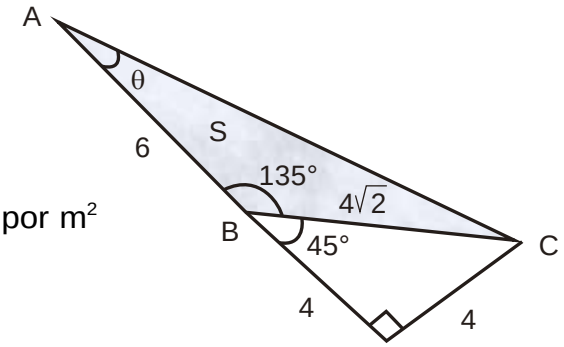
B) 120 soles

C) 135 soles

D) 144 soles



Solución:



De la figura: $\tan\theta = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Luego:

$$E = \left(25\tan^2\theta + 8\right) = \left(25\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 8\right) = 12 \text{ soles por m}^2$$

Sea S el área de la plancha

$$S = \frac{6(4)}{2} \rightarrow S = 12 \text{ m}^2$$

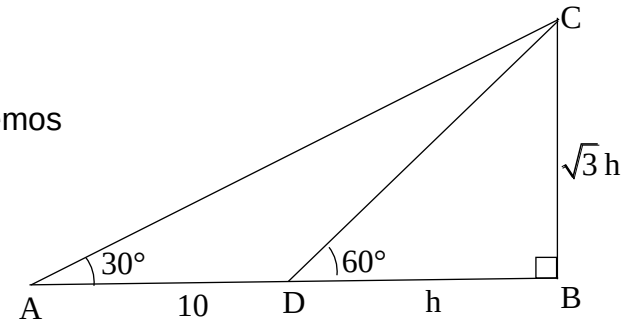
Finalmente, el costo por pintar la plancha es 144 soles.

Rpta.: D

3. Un turista se dirige hacia un mirador y observa su parte más alta con un ángulo de elevación de 30°. Si al avanzar 10 metros en la misma dirección el ángulo de elevación se duplica, halle la altura del mirador.

A) $5\sqrt{3}$ m B) $10\sqrt{3}$ m C) 15 m D) $3\sqrt{5}$ m

Solución:



Aplicando las R.T. de 30° y 60°, tenemos

AB=3h

10+h=3h

h=5 m.

$\therefore$ BC=$5\sqrt{3}$ m

Rpta.: A

4. En un triángulo rectángulo, la tangente de uno de los ángulos agudos es el triple de la tangente de su complemento. Calcular el coseno del mayor ángulo agudo.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{6}$

Solución:

Si α y β son los ángulos agudos del triángulo rectángulo

$\alpha+\beta=90^o$

Para ángulos complementarios: $\tan\beta=\cot\alpha$

En la información del problema: $\tan\alpha=3\tan\beta$

$\tan\alpha=3\cot\alpha=\dfrac{3}{\tan\alpha}=\tan^2\alpha=3\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{3}$

Los ángulos agudos son: $\alpha=60^o$ y $\beta=30^o$

Para el ángulo mayor: $\cos(60^0)=\dfrac{1}{2}$

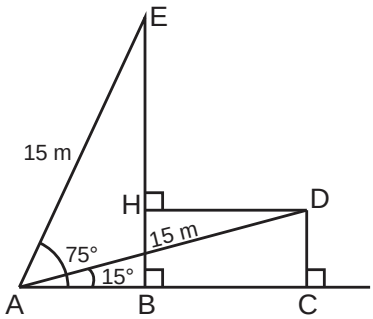
Rpta: A

5. Un poste de luz de 15 m de longitud está inclinado 15° respecto a la horizontal alcanzando su extremo superior una determinada altura. ¿Cuánto aumentaría dicha altura si el poste estuviera inclinado 75°?

A) $\dfrac{15}{2}\sqrt{2}\,m$ B) $7\sqrt{2}\,m$ C) $12\sqrt{2}\,m$ D) $8\sqrt{2}\,m$

Solución:

El gráfico adjunto ilustra las posiciones del poste



Altura inicial

DC = 15sen15°

Altura final

EB = 15sen75°

Aumento de altura:

EH = 15sen75° – 15sen15°

= 15(sen75° – sen15°)

$= 15\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$=\dfrac{15}{2}\sqrt{2}\,m$

Rpta.: A

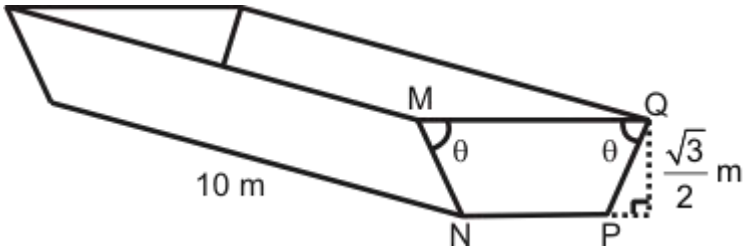
6. Por la intensa lluvia el Ingeniero Don Hugo desea construir una canaleta (figura adjunta) para colocarla en la azotea de su casa. Si la canaleta debe tener una capacidad máxima para almacenar $\frac{15\sqrt{3}R}{2}$ m^3 de agua y $MN = NP = PQ = R$ m, determine la medida del ángulo θ, que debería usar Don Hugo.

A) 30°

B) 15°

C) 45°

D) 60°



Solución:

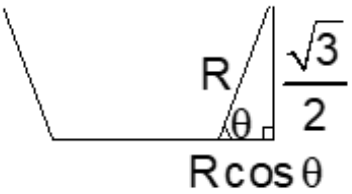
$$\text{Volumen} = \left(\frac{2R + 2R\cos\theta}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}(10)$$

$$\frac{15}{2}\sqrt{3}R = R(1+\cos\theta)\frac{\sqrt{3}}{2}(10)$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60°$$



Rpta.: D

7. Un barco navega a $16\sqrt{2}$ millas/hora. En ese instante se observan directamente hacia el oeste los restos de un naufragio y hacia el este una torre de observación. El barco navega en la dirección NO. Después de una hora el barco se encuentra al norte del naufragio y a O30°N con respecto a la torre de observación. Halle la distancia del barco y la torre de observación en el instante inicial.

A) $16\left(\sqrt{3}-1\right)$ millas

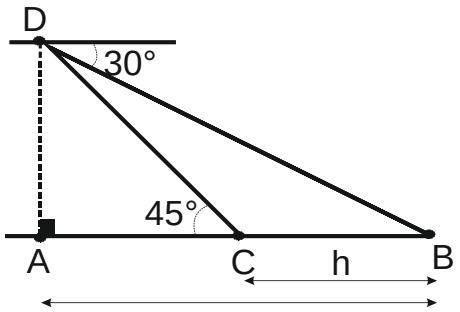
B) $16\sqrt{3}$ millas

C) $32\sqrt{3}$ millas

D) $32\left(\sqrt{3}-1\right)$ millas

Solución:

A: El naufragio y B: La torre de observación
En la figura tenemos que



$CD = 16\sqrt{2}$ millas

$AC = 16$ millas

$AB = 16\sqrt{3}$ millas

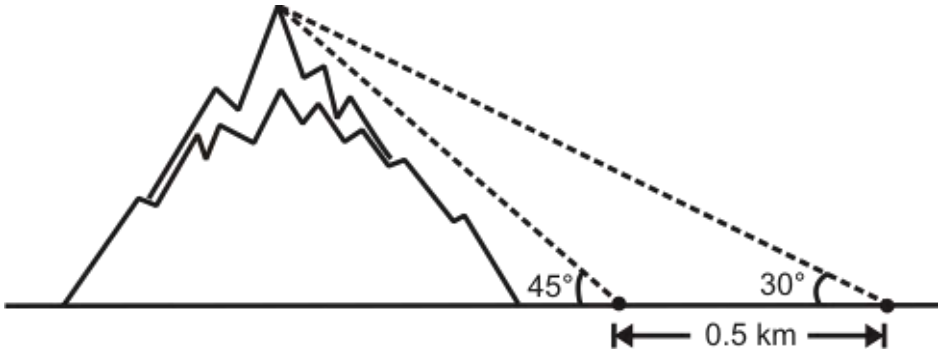
Luego $h = AB - AC$

$\therefore h = 16\left(\sqrt{3}-1\right)$ millas

Por tanto, la distancia es $16\left(\sqrt{3}-1\right)$ millas

Rpta.: A

8. En la figura se representan las medidas de dos ángulos de elevación, dirigidas a la parte más alta de una montaña. Si los puntos donde se realizaron las medidas, se encuentran distanciados medio kilómetro, calcule la altura de la montaña.



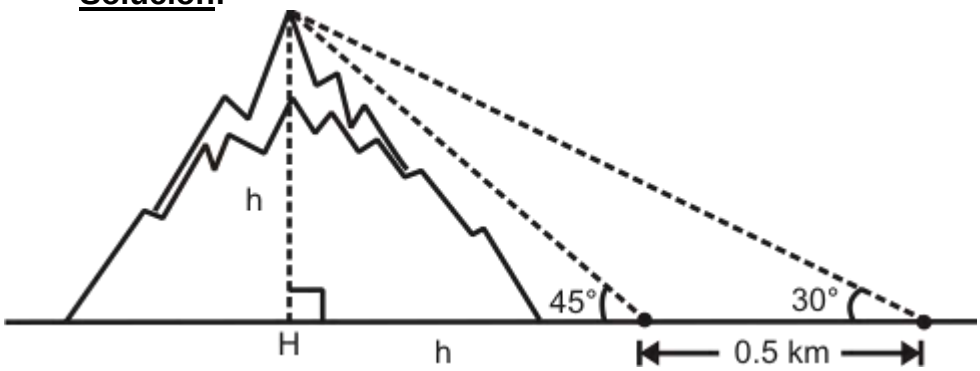
A) $\dfrac{(\tan 75° - 1)}{4}$ km

B) $\dfrac{\left(\sqrt{2} + \tan 45°\right)}{4}$ km

C) $\dfrac{(\tan 60° + 1)}{4}$ km

D) $\dfrac{\left(\sqrt{5} + \tan 45°\right)}{4}$ km

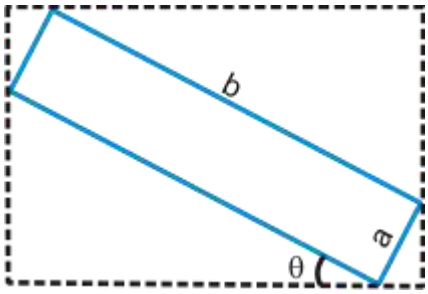
Solución:



$$\tan 60° = \frac{h+\frac{1}{2}}{h} \rightarrow \sqrt{3} = 1+\frac{1}{2h} \rightarrow \frac{1}{h} = 2\left(\sqrt{3}-1\right) \rightarrow h = \frac{1}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

Rpta.: C

9. En la figura se representa un rectángulo de ancho $a = 1\,\text{cm}$ y largo $b = 5\,\text{cm}$. Si se circunscribe un rectángulo de área 18 cm^2 alrededor del primero, determine el valor de $\text{sen}\theta\cos\theta$.



A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

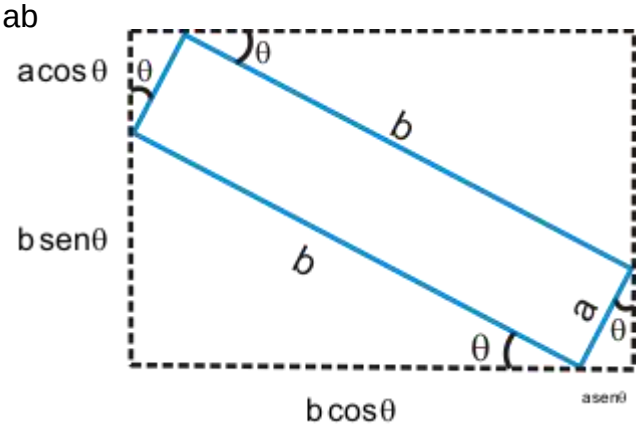
Solución:

$\text{Área} = 18 = b^2\text{sen}\theta\cos\theta + a^2\text{sen}\theta\cos\theta + ab$

$18 = 25\text{sen}\theta\cos\theta + \text{sen}\theta\cos\theta + 5$

$13 = 26\text{sen}\theta\cos\theta$

$\frac{1}{2} = \text{sen}\theta\cos\theta$



Rpta.: C

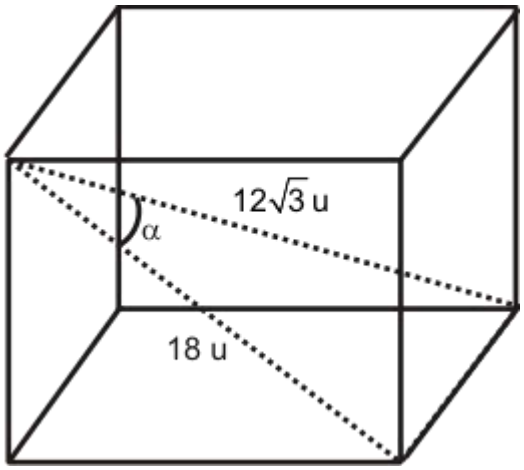
10. En una caja rectangular, se traza la diagonal de una de sus caras y se une mediante una cuerda una de sus diagonales formando un ángulo α, como se representan en la figura. Si la altura de la caja es $6\sqrt{2}\tan(\alpha+30°)$ u, determine el volumen de la caja.

A) $342\sqrt{6}$ u^3

B) $628\sqrt{3}$ u^3

C) $648\sqrt{6}$ u^3

D) $348\sqrt{3}$ u^3

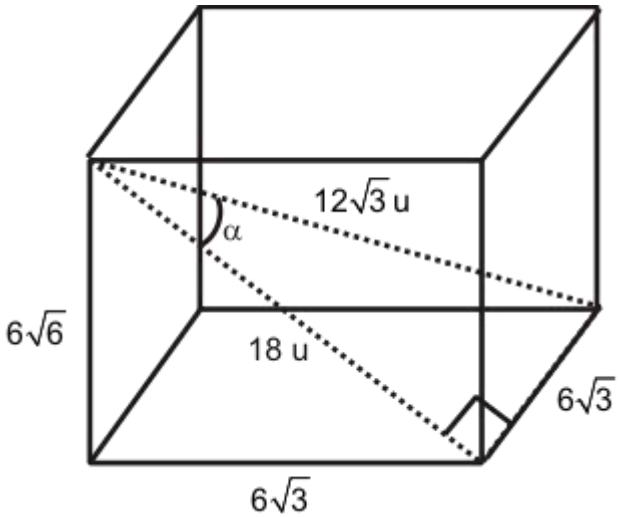


<u>Solución</u>:

$\alpha = 30° \rightarrow 6\sqrt{2}\tan(\alpha+30°) = 6\sqrt{6}$, luego por el teorema de Pitágoras la base de la caja tiene forma cuadrada cuyo lado mide $6\sqrt{3}$ u.

Luego el volumen de la caja es:

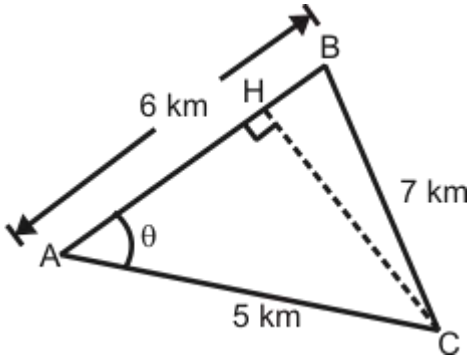
$V = 6\sqrt{6}.6\sqrt{3}.6\sqrt{3} = 648\sqrt{6}$



Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura se representan, el plano de un terreno triangular, que necesita ser dividido por una cerca representada por $\overline{CH}$. Calcule la longitud de la cerca.



A) $2\sqrt{6}$ km B) $2\sqrt{3}$ km C) $\sqrt{6}$ km D) $2\sqrt{7}$ km

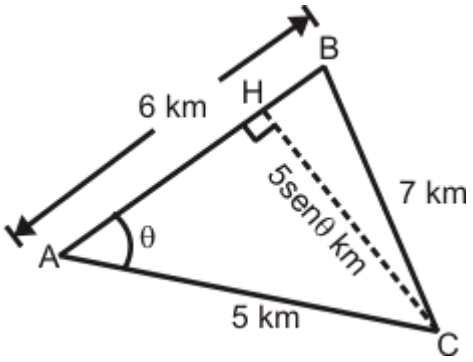
Solución:

$p=(6+7+5)/2=9$ **,** luego el área del triángulo se puede expresar como:

$$S=\sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)}=6\sqrt{6}$$

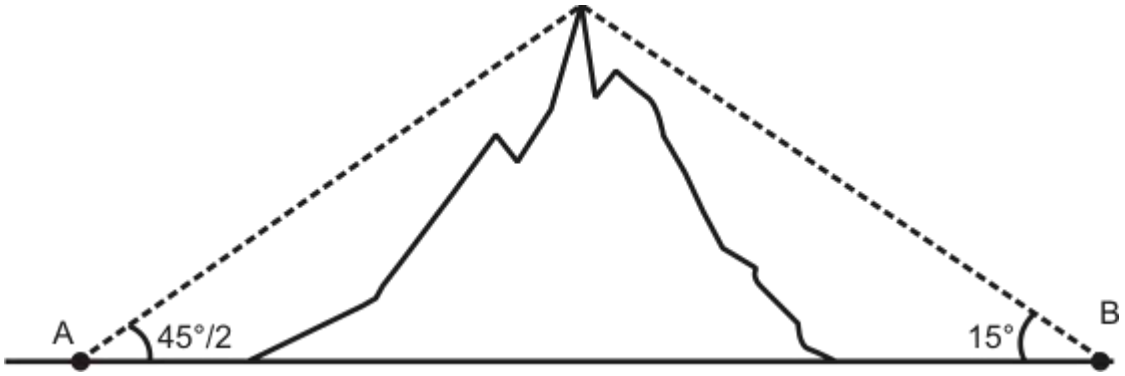
Pero también,

$$S=\frac{5.6.\text{sen}\theta}{2}=6\sqrt{6}\rightarrow 5\text{sen}\theta=2\sqrt{6}$$



Rpta.: A

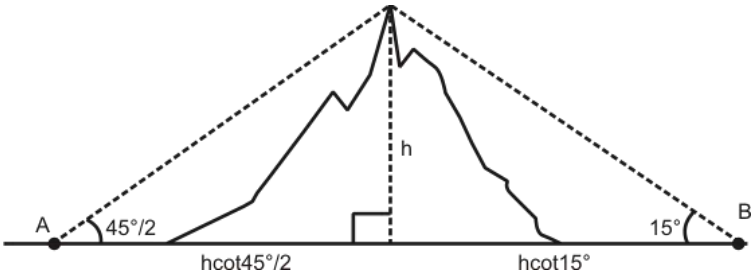
2. Dos pueblos A y B, se encuentra distanciados de $\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ km. Si de ellos se observa la parte más alta de la montaña como indica la figura, determine la altura de la montaña.



A) 1300 m B) 1200 m C) 1500 m D) 1600 m

Solución:

$h\cot 15° = h\tan 75° = h(2+\sqrt{3})$
$h\cot(45°/2) = h(1+\sqrt{2})$



Luego del dato del enunciado, y de la figura:

$$d = \frac{3}{2}\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \text{ y } d = h(2+\sqrt{3}+1+\sqrt{2}) = h(3+\sqrt{3}+\sqrt{2}) \rightarrow h = \frac{3}{2}$$

Rpta.: C

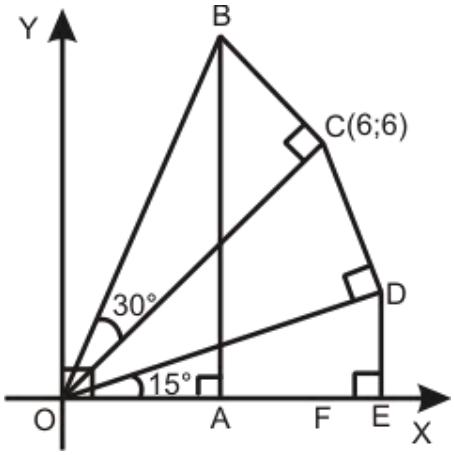
3. Si r es la razón en la que se encuentran las longitudes de los segmentos AB y DE, calcule $\left(2-\sqrt{3}\right)r$.

A) 4/3

B) 5/3

C) 2/5

D) 5/7

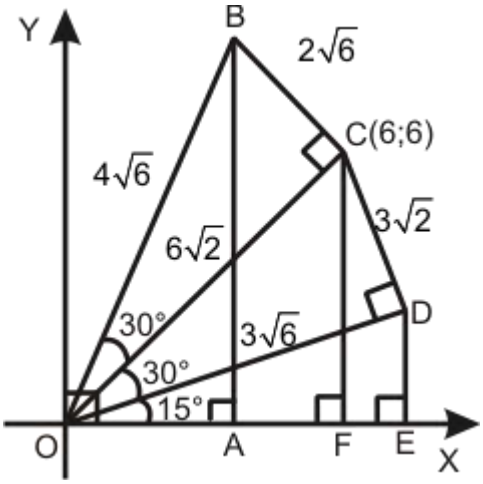


Solución:

De la figura, $AB = 4\sqrt{6}.\text{sen}75°$ y $DE = 3\sqrt{6}.\text{sen}15°$.
Luego:

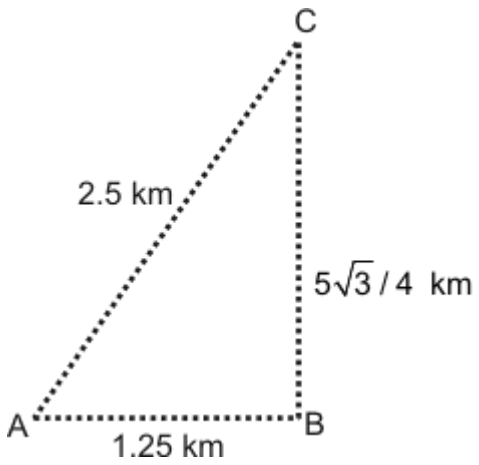
$$\frac{AB}{DE} = \frac{4\sqrt{6}.\text{sen}75°}{3\sqrt{6}\cos 75°} = \frac{4}{3}\text{tg}75° = \frac{4}{3}(2+\sqrt{3})$$

$$\frac{4}{3}(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = \frac{4}{3}$$



Rpta.: A

4. En la figura se representa parte del mapa de un excursionista, que se encuentra en el punto A. Él desea dirigirse al punto C. Se sabe que el punto A está a 1.25 kilómetros hacia el oeste del punto B. Éste último se encuentra a $5\sqrt{3}/4$ kilómetros del punto C. Además el punto C está a 2.5 kilómetros del punto A. ¿Cuál es el rumbo que debe tomar el excursionista cuando esté de regreso ?

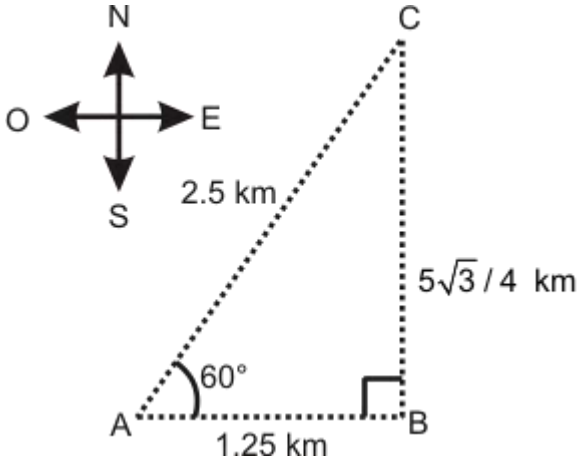


A) N30°E B) O60°S
C) N30°O D) S30°O

<u>Solución</u>:

De la figura triangular se observa que los lados corresponden al de un triángulo rectángulo de 30° y 60°. Esto quiere decir que C está al norte de B.

Luego el rumbo que debe tomar para el regreso el excursionista es S30°O para ir del punto C al punto A.



Rpta.: D

5. Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en A, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones en el orden indicado.

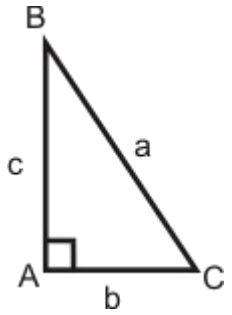
i. Si la razón entre los catetos opuesto a B y el adyacente a C es igual 1, entonces el ángulo B mide 45°.

ii. Si la hipotenusa es al cateto adyacente B como 2 es a 1, entonces el ángulo B mide 60°.

iii. Si $\tan B = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ entonces $\text{sen}2B = \dfrac{1}{2}$.

A) FVF B) FVV C) FFF D) VFV

Solución:



i. **Falso**, pues el cateto opuesto a B es también el cateto adyacente a C, por lo tanto la razón siempre es 1, luego el ángulo B puede ser diferente a 45°.

ii. **Verdadero**, pues $\frac{a}{c}=\frac{2}{1}\rightarrow \csc C=2\rightarrow C=30°\rightarrow B=60°$.

iii. **Verdadero**, pues si $\tan B=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\rightarrow B=15°\rightarrow \text{sen}2B=\text{sen}30°=\frac{1}{2}$.

Rpta..: A

Trigonometría

EJERCICIOS DE LA SEMANA Nº 4

1. Si $tg\alpha = \left(3 + tg75° - \sqrt{3}\right)\cos 70^{\circ}.\csc 20° - 3\cos 75^{\circ}.\csc 15^{\circ}$ y $tg\alpha = \csc\theta$ $(\alpha, \theta$ son agudos$)$, calcule $\cos\theta$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{3}$

Solución:

$.tg\alpha = 5sen20^{\circ}.\csc 20^{\circ} - 3\cos 75^{\circ}.\csc 15^{\circ}$

$\Rightarrow tg\alpha = 5.1 - 3\cos 75^{\circ}.\sec 75^{\circ} = 5 - 3.1 = 2$

$\Rightarrow tg\alpha = 2$

$\Rightarrow .\csc\theta = 2 \Rightarrow cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

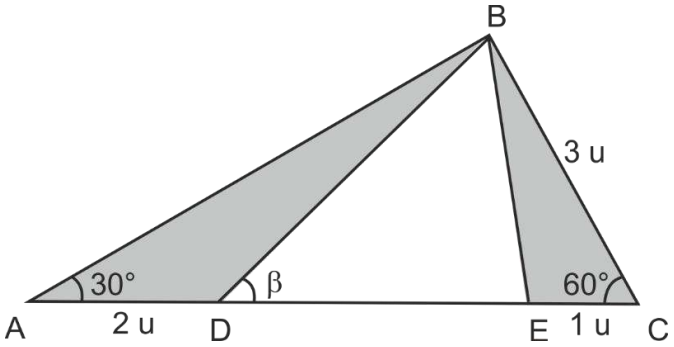
Rpta.: B

2. De la figura mostrada, halle la longitud del segmento DB.

A) $\frac{3}{2}$ u B) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ u

C) $\sqrt{13}$ u D) $2\sqrt{13}$ u

E) $\sqrt{3}$ u



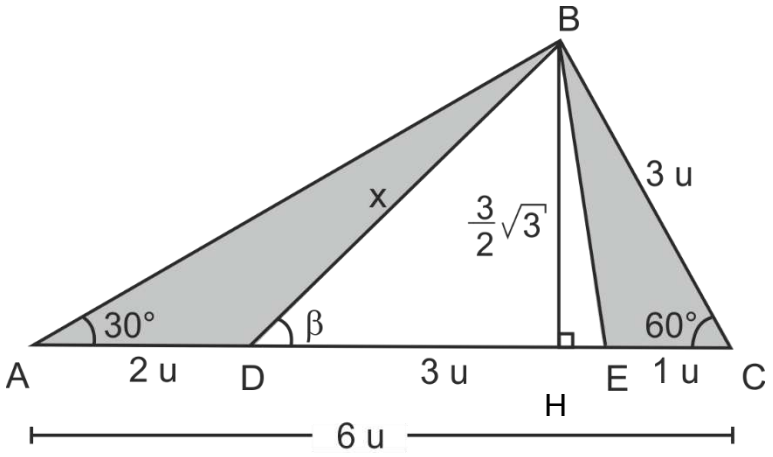
Solución:

$\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$

$HC = \frac{3}{2} \Rightarrow DH = \frac{5}{2}$

pitagoras

$x = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{13}$



Rpta.: C

3. Si α + 13° y β + 27° son ángulos agudos tal que tg(α+13°)·tg(β+27°) = 1, calcule cos (α+β+10°) + ctg$^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+5°\right)$.

A) 3 B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

Solución:

Como tg(α + 13°). Tg(β + 27°) = 1 ,entonces

Tg(α + 13°) = ctg(β + 27°) ⇒ α + 13° + β + 27° = 90° ⇒ α + β = 50°

Luego: cos(α + β + 10°) + ctg$^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+5°\right) = \cos(60°) + \text{ctg}^2(30°) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

Rpta.: B

4. De la figura mostrada, ABDC es un rectángulo; halle $\sqrt{13}$ AH.

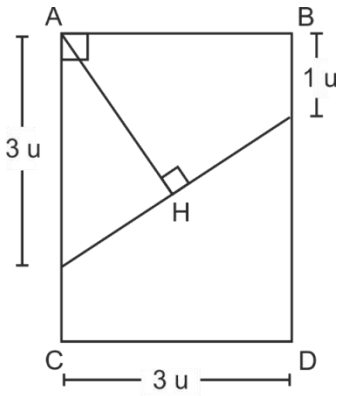
A) 9 u

B) 4 u

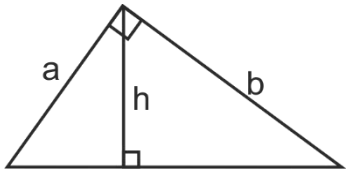
C) 10 u

D) 8 u

E) 1 u

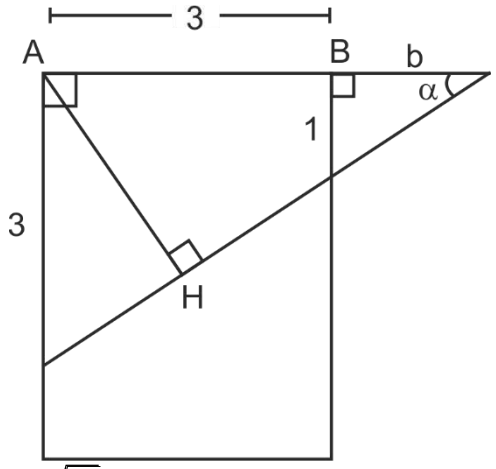


Solución:



$$\Rightarrow \quad \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

En la pregunta $\quad \text{tg}\alpha = \frac{1}{b} = \frac{3}{3+b}$



$3 + b = 3b \rightarrow b = \frac{3}{2}$

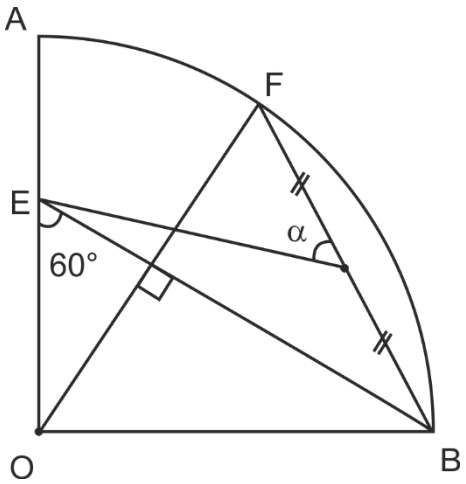
$\rightarrow \frac{1}{(AH)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(3+b)^2}$

$= \frac{1}{9} + \frac{4}{81} = \frac{13}{81}$

$\rightarrow \sqrt{13}\,AH = 9$

Rpta.: A

5. Del gráfico, siendo AOB cuadrante, halle ctg α .

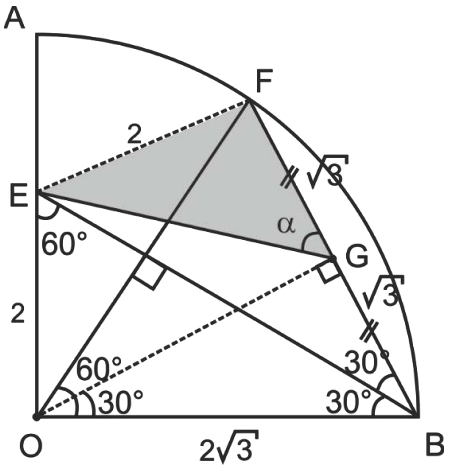


A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Solución:

Del gráfico tenemos lo siguiente:

$\text{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



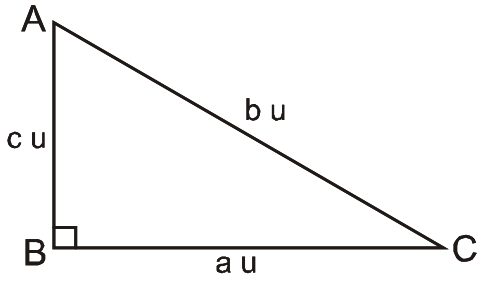
Rpta.: A

6. De acuerdo con la figura, calcular sen9C, si tg(100°–2C) – cscC $= \dfrac{a}{c}$ y $\dfrac{\pi}{36} < C < \dfrac{5\pi}{18}$.

A) 1 B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\sqrt{3}$ D) $\dfrac{1}{2}$

E) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$



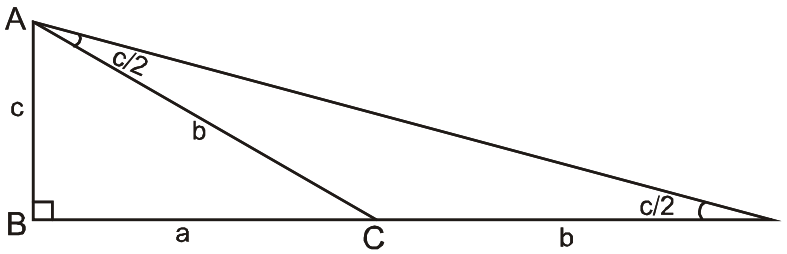
Solución:

$\text{ctg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{a}{c} + \text{cscC}$

$\text{ctg}\dfrac{C}{2} - \text{cscC} = \dfrac{a}{c}$

$\text{ctg}\dfrac{C}{2} = \text{ctg}(2C - 10°)$

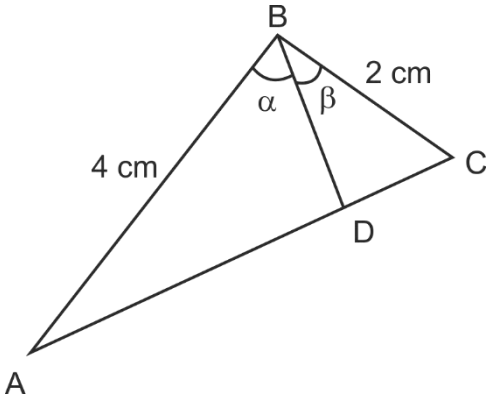
$\dfrac{C}{2} = 2C - 10° \Rightarrow C = \dfrac{20°}{3}$



$\Rightarrow$ sen60° =

Rpta.: B

7. Si $\alpha = \left(\frac{200}{3}\right)^g$ y $\beta = \left(\frac{100}{3}\right)^g$, halle 11 S, siendo S el área de la región triangular ABD.



A) $8\left(6-\sqrt{3}\right)$ cm^2

B) $4\left(6-\sqrt{2}\right)$ cm^2

C) $6\left(6-\sqrt{2}\right)$ cm^2

D) $4\left(6-\sqrt{3}\right)$ cm^2

E) 32 cm^2

Solución:

Sea $BD = x$ cm

$\text{Área(ABD)} + \text{Área(BCD)} = \text{Área(ABC)}$

$\left(\frac{200}{3}\right)^g = 60° \wedge \left(\frac{100}{3}\right)^g = 30°$, luego,

$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot \text{sen}60° + \frac{1}{2}\cdot x\cdot 2\text{sen}30° = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2$

$4x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2x\cdot\frac{1}{2} = 8 \Rightarrow 2x\cdot\sqrt{3} + x = 8 \Rightarrow x\left(2\sqrt{3}+1\right) = 8$

$\Rightarrow x = \frac{8}{2\sqrt{3}+1}$

$\therefore \text{Área(ABD)} = \frac{8}{2\sqrt{3}+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{Área(ABD)} = \frac{8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}\cdot\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1} = \frac{8\left(6-\sqrt{3}\right)}{11} \Rightarrow 11S = 8\left(6-\sqrt{3}\right)$ cm^2

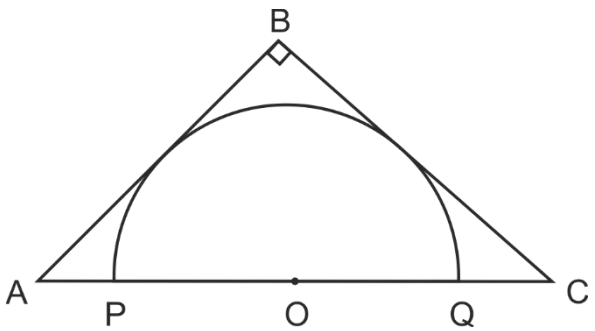
Rpta.: A

8. De la figura, halle $\text{sen}\left(Q\hat{B}C\right)$ .Si AP = QC y O es el centro de la semicircunferencia.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$ B) $\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

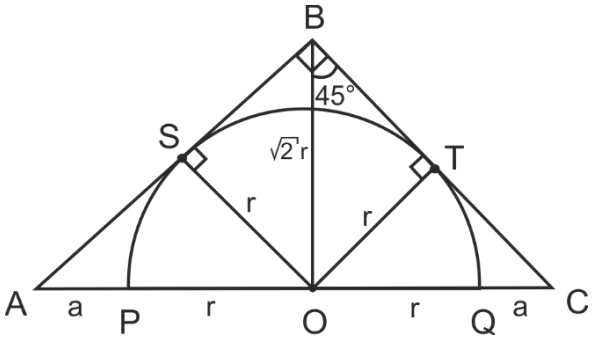
C) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$ D) $\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}$



Solución:

AP = QC = a



$\measuredangle$ BOT = $\measuredangle$ TBO = 45° $\rightarrow$ BO = $\sqrt{2}$ r

$\triangle$ ASO y $\triangle$ OTC son congruentes

$\Rightarrow \measuredangle SOA = \measuredangle TOC = 45°$

$\Rightarrow \quad r + a = \sqrt{2}\,r \rightarrow a = \left(\sqrt{2}-1\right) r$

Pitágoras: $BQ^2 = BO^2 + OQ^2 = 3r^2$

$\rightarrow BQ = \sqrt{3}\,r$

BC = 2r

Área ΔQBC(trigonometría) = Área ΔQBC(geometría) α

$\frac{1}{2} BQ(BC)\,\text{sen}(QBC) = \frac{1}{2} QC(BO) \rightarrow \left(\sqrt{3}\,r\right)(2r)\,\text{sen}(QBC) = a\sqrt{2}\,r$

$2\sqrt{3}\,r^2\,\text{sen}(\widehat{QBC}) = \left(\sqrt{2}-1\right)r\left(\sqrt{2}\,r\right) \rightarrow \text{sen}(\widehat{QBC}) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

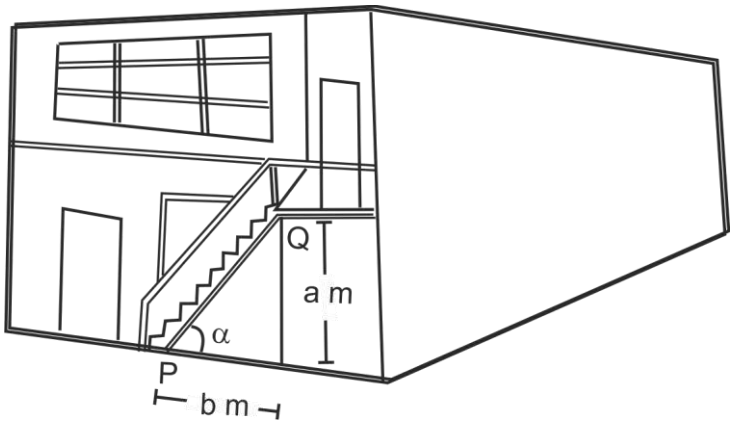
Rpta.: C

9. En la figura, se muestra la casa del señor Carlos. Si se realizó la medida de la escalera y se obtuvo que $2(a+b) = 3PQ$, siendo el ángulo de inclinación de la escalera ¿cuánto es el valor de $\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$?

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{4}{7}$

C) $\frac{1}{2}$ D)

E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$



Solución:
Tenemos:

$PQ^2 = a^2 + b^2$

además $\frac{a}{PQ} + \frac{b}{PQ} = \frac{3}{2} \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{9}{4}PQ^2$

$\sqrt{3}$ $PQ^2 + 2ab = \frac{9}{4}PQ^2$

$2ab = \frac{5}{4}PQ^2 \Rightarrow \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{ab}{PQ^2} = \frac{5}{8}$

Rpta.: A

10. Sean α y β dos ángulos agudos. Si la ecuación $x^2\text{sen}\alpha + 2x\text{sen}\alpha + \cos\beta = 0$ tiene solución única, halle $\text{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{6}\right) - \sec(\alpha+\beta-30°)$.

A) B) $-\sqrt{3}$ C) D) 2 E) 1

Solución:

$\text{sen}\alpha \cdot x^2 + 2x \cdot \text{sen}\alpha + \cos\beta = 0$

$\text{sen}\alpha \cdot x^2 + 2\text{sen}\alpha \cdot x + \cos\beta = 0$

$x = \frac{-2\text{sen}\alpha \pm \sqrt{4\text{sen}^2\alpha - 4\text{sen}\alpha\cos\beta}}{2\text{sen}\alpha}$

$\Rightarrow 4\text{sen}^2\alpha = 4\text{sen}\alpha\cos\beta \Rightarrow \text{sen}\alpha = \cos\beta$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

$\text{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{6}\right) - \sec(\alpha+\beta-30°) = \text{tg}(15°) - \sec(60°) = -\sqrt{3}$

Rpta.: B

EVALUACIÓN Nº 4

1. Si $\text{tg}x + 2\,\text{tg}(x + 45°)\cdot\text{tg}(45° - x) - 6\cos60°\text{ctg}x = 0$, x agudo; calcule $\sqrt{2}\,(\text{sen}(90°-x) + \sec x)$.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 3 E) 10

Solución:

tgx + 2– 6 $\frac{1}{2}$ ctgx = 0

$\frac{1}{\text{ctgx}}$ + 2 – 3ctgx = 0 entonces 1 + 2ctgx – 3ctg^{2}x = 0

3ctg^{2}x – 2ctgx – 1 = 0

ctgx = 1 $\Rightarrow$ x = 45°

por lo tanto $2\sqrt{2}$(cos45° + sec45°)

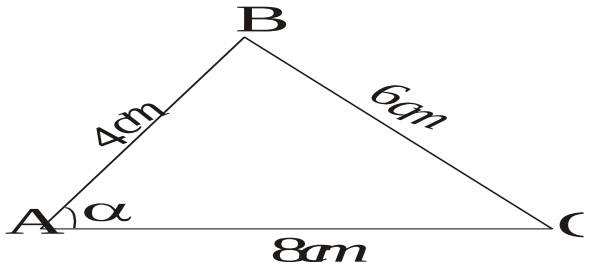
$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)$ = 3

Rpta.: D

2. Con los datos de la figura, hallar sen (90° – α) .

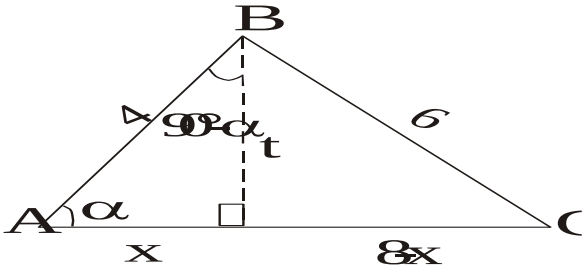
A) $\frac{17}{16}$ B) $\frac{13}{16}$ C) $\frac{14}{15}$

D) $\frac{13}{15}$ E) $\frac{11}{16}$



Solución:

$t^2 = 16 - x^2$
$t^2 = 36 - (8 - x)^2$ >
$16 - x^2 = 36 - (8-x)^2$
44 = 16x
$\frac{44}{16} = x$
$\frac{11}{4}$ = x



Sen (90° – α) = $\frac{11/4}{4} = \frac{11}{16}$

Rpta: E

3. Si x = 2° + 2β, y = 4α – 2° son ángulos agudos tal que secx.seny=1, halle $\text{tg}(2\alpha+\beta)+\frac{\sec 2\beta - \text{tg}(2\alpha+\beta)}{\csc 4\alpha - \text{ctg}(2\alpha+\beta)}$.

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) 4 E) $\frac{3}{2}$

Solución:

$\sec x = \csc y \Rightarrow x + y = 90°$

$2° + 2\beta + 4\alpha - 2° = 90°$

$2\beta + 4\alpha = 90°$

$\beta + 2\alpha = 45°$

$$1+\frac{\sec 2\beta - \text{tg}45°}{\csc 4\alpha - \text{ctg}45°} = \frac{\csc 4\alpha - 1}{\csc 4\alpha - 1} + 1 = 2$$

Rpta.: A

4. Si $\sec 33°\text{tg}\alpha - \csc 57° = 2\sec 33°\text{sen}(\beta - 8°)\sec(98° - \beta) - \csc 57°\text{tg}\alpha$, α y $(\beta - 8)°$ son ángulos agudos; calcule $\frac{3}{4}+(\sqrt{13} - 2)\text{ctg}\frac{\alpha}{2} + \sec^2\alpha$.

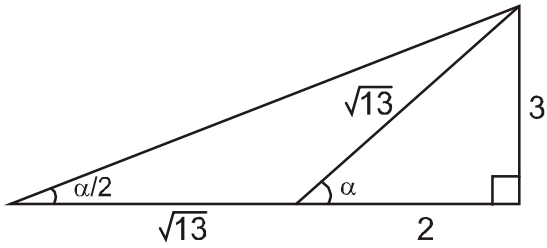
A) 7 B) $\frac{23}{4}$ C) $\frac{27}{4}$ D) $\frac{25}{4}$ E) 6

Solución:

$\sec 33°\text{tg}\alpha - \sec 33° = 2\sec 33°\text{sen}(\beta - 8°)\csc(\beta - 8°) - \sec 33°\text{tg}\alpha$

$\text{tg}\alpha - 1 = 2 - \text{tg}\alpha$

$2\text{tg}\alpha = 3 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{3}{2}$

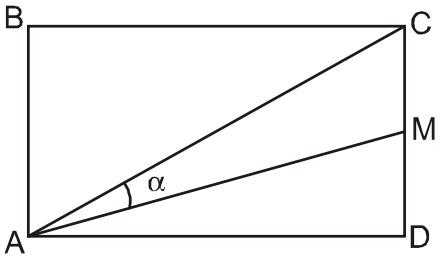


$$(\sqrt{13} - 2)\left(\frac{\sqrt{13}+2}{3}\right)+\frac{3}{4} + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

$= 7$

Rpta.: A

5. En la figura, ABCD es un rectángulo, M es punto medio de $\overline{CD}$ y AC = 2CD. Calcule $7\text{tg}\alpha$.



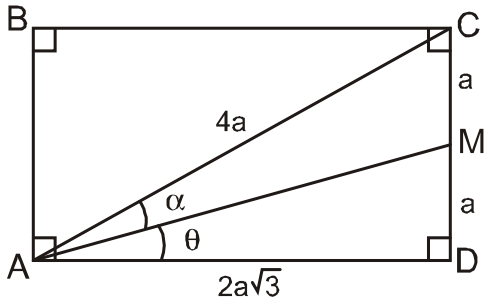
A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\sqrt{3}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

Solución:

S: área del triángulo ACM



$AM = \sqrt{13}a$

$2S = 2a\sqrt{3}\,a = \sqrt{13}\,a\,4a\,\text{sen}\,\alpha$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

$\text{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$

$\therefore \boxed{7\text{tg}\alpha = \sqrt{3}}$

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la figura mostrada, $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ representan dos postes de 8 m cada uno, separados por una distancia de 4 m. Se colocan dos cuerdas MQ y MR, como se indican en la figura. Si $PR = 3RQ$, halle $\sqrt{65}\cos\theta.\text{sen}80°.\sec 10°$.

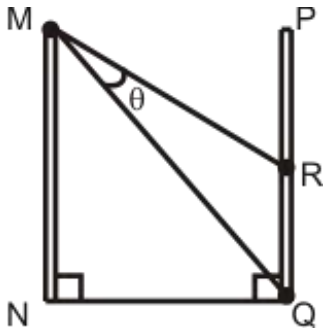
A) 7

B) 8

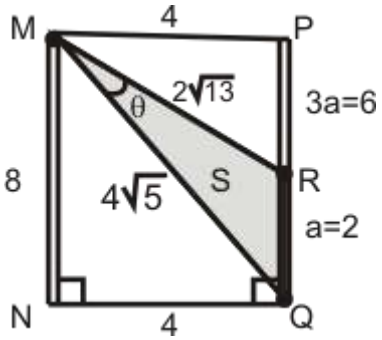
C) 9

D) 10

E) 11



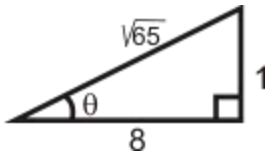
Solución:



$$a + 3a = 8 \rightarrow a = 2$$

Calculo del área de un triángulo MRQ

$$S = \frac{4\sqrt{5}.2\sqrt{13}.\text{sen}\theta}{2} = \frac{2(4)}{2} \rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{65}}$$



Luego: $E = \sqrt{65}\cos\theta.\text{sen}80°.\sec 20°$

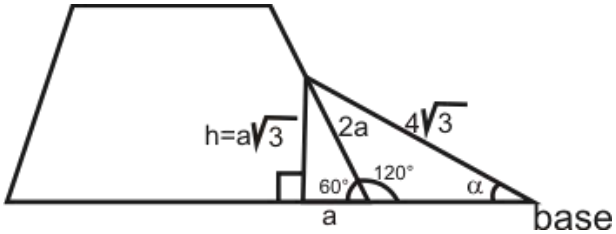
$E = 8$

Rpta.: B

2. Una escalera de $4\sqrt{3}$ metros de largo se apoya en una pared inclinada de 60° respecto a la horizontal. Si la base de la escalera está siendo movida horizontalmente a velocidad constante, ¿a qué altura se encuentra la parte superior de la escalera cuando la base está a 4 metros de la pared?

A) $2\sqrt{3}$ m B) $4\sqrt{3}$ m C) 2m D) 4m E) 6m

Solución:



T.P.: $(a+4)^2+(a\sqrt{3})^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2 \rightarrow a=2$

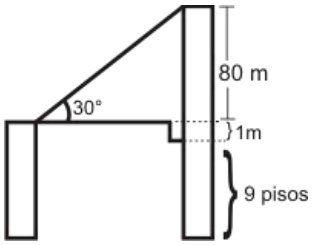
luego $h=2\sqrt{3}$ metros

Rpta.: A

3. Desde la azotea del edificio se tiende y templa dos cuerdas; una de forma horizontal la cual ha sido sujetada en la baranda de un balcón de 1 m de altura del décimo piso de otro edificio cercano, la otra cuerda de 160 m se sujeta a la azotea del mismo edificio. Si se sabe que el ángulo entre las cuerdas es de 30° y la altura de cada piso del edificio más alto es de 3 m, halle el número de pisos de este edificio.

A) 40 B) 52 C) 36 D) 48 E) 60

Solución:



$\frac{81}{3}=27 \rightarrow 27$ pisos

27 +9 = 36, entonces el edificio tiene 36 pisos.

Rpta.: C

4. Un padre deja un terreno que debe ser distribuido entre sus tres hijos como se muestra en la figura, indique la inversión que debe hacer Pedro y Luis para construir un muro que divide sus terrenos si el costo de un metro lineal de dicho muro cuesta $\frac{2\sqrt{3}+8}{3}$ en miles de soles.

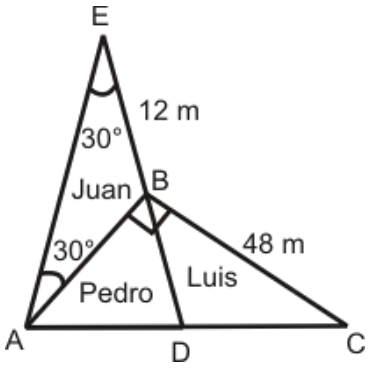
A) 56 000 soles

B) 29 000 soles

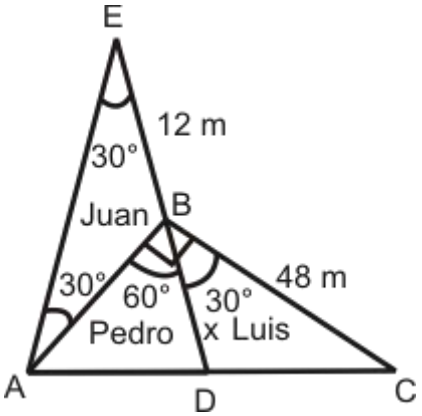
C) 64 000 soles

D) 45 000 soles

E) 82 000 soles



<u>Solución</u>:



Del gráfico se nota la siguiente relación entre las áreas de los triángulos:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC}$$

$$\frac{12.48}{2} = \frac{12.x.sen60°}{2} + \frac{x.48.sen30°}{2}$$

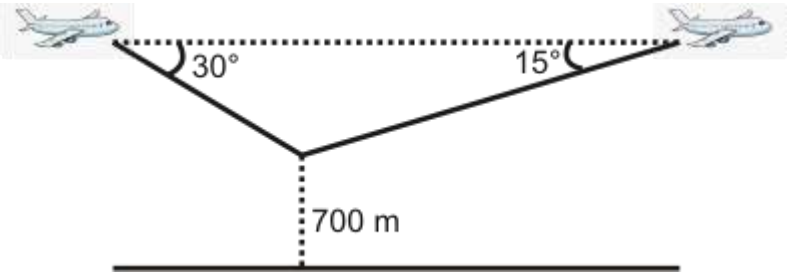
$$12.24 = 6x.\frac{\sqrt{3}}{2} + 24.x.\frac{1}{2}$$

$$\frac{96}{\sqrt{3}+4} = x$$

Nos piden, costo total: $C.T. = \left(\frac{96}{\sqrt{3}+4}\right).\left(\frac{2\sqrt{3}+8}{3}\right) = 64$ miles de soles.

Rpta.: C

5. Un avión se encuentra a una altura de 1500 m, sufre un desperfecto y comienza a descender tal y como se muestra en la figura. Luego, el piloto arregla el desperfecto a una altura de 700 m y comienza a elevarse hasta alcanzar su altura inicial. Si debido al desperfecto el avión se retrasó 8 segundos, calcule la velocidad del avión.



A) $100\ {}^{m}\!/_{s}$

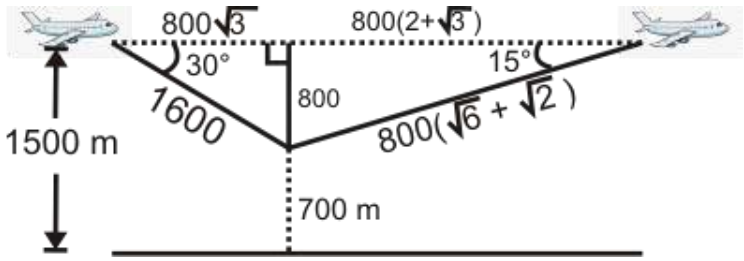
B) $200\ {}^{m}\!/_{s}$

C) $150\sqrt{2}\ {}^{m}\!/_{s}$

D) $100\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)\ {}^{m}\!/_{s}$

E) $100\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\ {}^{m}\!/_{s}$

<u>Solución</u>:



Sabemos que $t=\dfrac{e}{v}$,

$$\frac{1600+800\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{v}-\frac{800\sqrt{3}+800\left(2+\sqrt{3}\right)}{v}=8$$

$$\rightarrow v=100\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\ m/s$$

Rpta.: E

6. Se hace un pedido de un par de aretes de forma triangular como se muestra en la figura. Para cumplir con la entrega del pedido, se tiene que bañar de plata la región sombreada. Si se sabe que cada milímetro cuadrado de plata cuesta 5 soles, ¿cuál es el precio que se tiene que pagar para cumplir con la entrega de dicho pedido?

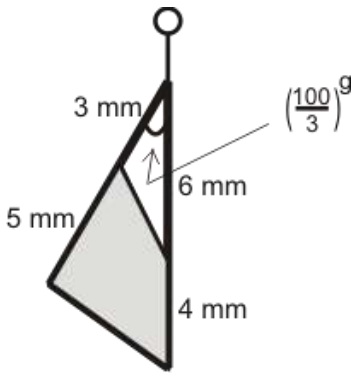
A) 155 soles

B) 150 soles

C) 75,5 soles

D) 75 soles

E) 105 soles



Solución:

$$\left(\frac{100}{3}\right)^g = 30°$$

$$S = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta MBN}$$

$$S = \frac{1}{2}.8.10.\text{sen}30° - \frac{1}{2}.3.6.\text{sen}30°$$

$$S = \frac{31}{2}$$

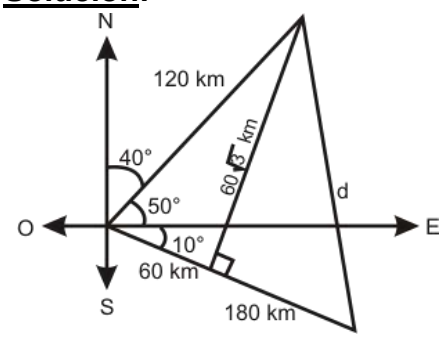
Luego como son un par: seria 31 mm^2, el precio del par sería: 5(31)=155 soles.

Rpta.: A

7. Dos camionetas parten de un mismo lugar en direcciones N40°E y E10°S, con velocidades de 60 km/h y 120 km/h respectivamente. Calcule la distancia que los separa luego de dos horas.

A) $120\sqrt{3}$ km B) 240 km C) 120 km D) $150\sqrt{3}$ km E) $180\sqrt{3}$ km

Solución:

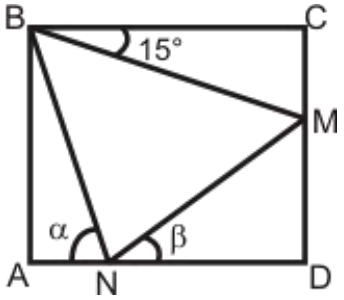


$$d^2 = \left(60\sqrt{3}\right)^2 + 180^2 \rightarrow d = 120\sqrt{3}$$

Rpta.: A

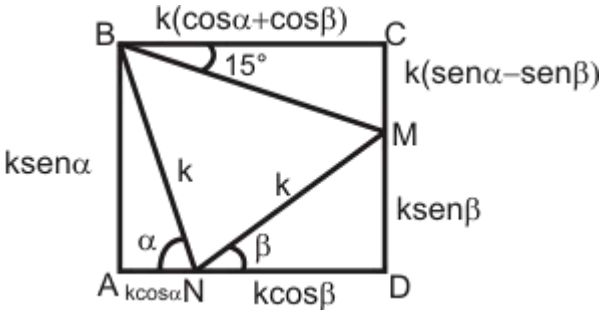
8. En la figura mostrada, se tiene un rectángulo ABCD. Si BN=NM, calcule el valor de $\dfrac{\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$.

A) $2\sqrt{3}$
B) $2+\sqrt{3}$
C) $2-\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
E) $8-2\sqrt{3}$



Solución:

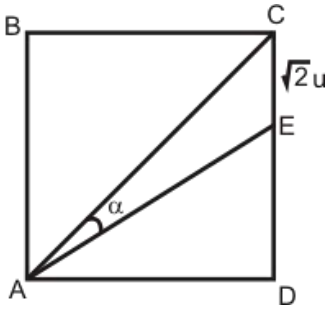
$$\frac{\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \text{tg}15° = 2-\sqrt{3}$$



Rpta.: C

9. En la figura, se tiene un cuadrado ABCD. Si el ángulo α cumple que $\text{sen}75°.\sec 75°.\text{sen}\alpha = 2\text{sen}30°\cos\alpha$, calcule el área del cuadrado.

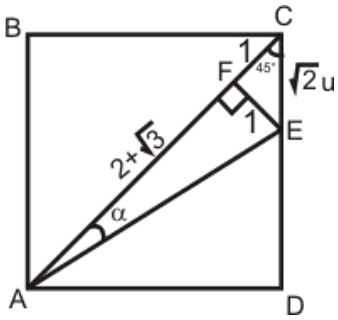
A) $\left(6+3\sqrt{3}\right)$ u²
B) $\left(2+\sqrt{3}\right)$ u²
C) $\left(7+\sqrt{3}\right)$ u²
D) $\left(12+3\sqrt{3}\right)$ u²
E) $\left(16+5\sqrt{3}\right)$ u²



Solución:

$$\text{sen}75°.\sec 75°.\text{sen}\alpha = 2\text{sen}30°\cos\alpha$$
$$\text{tg}75° = \text{ctg}\alpha \rightarrow \alpha = 15°$$

Luego en la figura se tiene, que la diagonal del



cuadrado es: $3+\sqrt{3}$ u, luego el área del cuadrado es:

$$S=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{2}=\frac{12+6\sqrt{3}}{2}=6+3\sqrt{3}$$

Rpta.: A

10. En la figura se tiene el plano de un terreno circular de radio $10\sqrt{2}$ m, donde la región sombreada corresponde a una zona destinada para juegos de mesa. Si el ángulo α, es la mitad del ángulo que hay entre la diagonal del rectángulo y uno de sus lados, calcule el área de dicha zona.

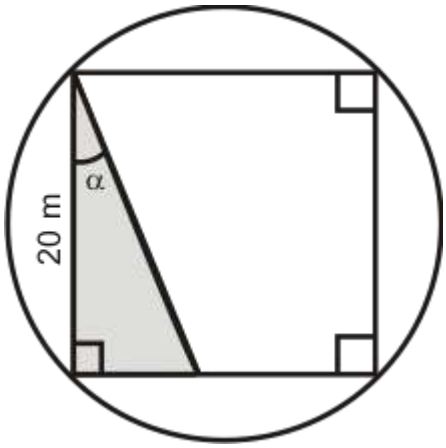
A) $100\left(\sqrt{2}-1\right)$ u^2

B) $200\left(\sqrt{2}+1\right)$ u^2

C) $200\left(\sqrt{2}-1\right)$ u^2

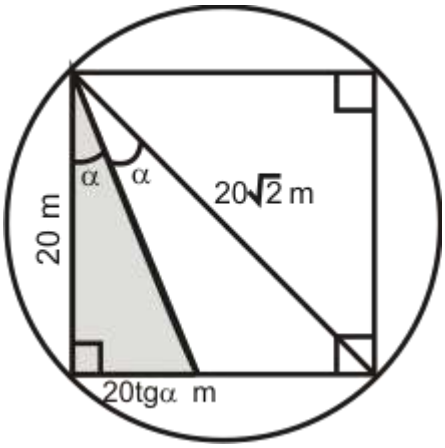
D) $20\left(\sqrt{2}-1\right)$ u^2

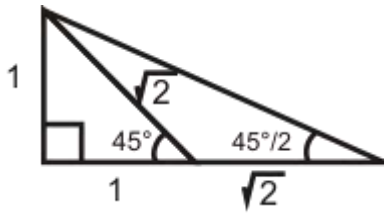
E) $100\left(\sqrt{2}+1\right)$ u^2



<u>Solución</u>:

De la figura tenemos: $2\alpha=45°\rightarrow\alpha=\frac{45°}{2}$,





Luego el área de la región sombreada es:

$$S=\frac{20.20\text{tg}\alpha}{2}=200\text{tg}\alpha=200\left(\sqrt{2}-1\right)\ \text{u}^2$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

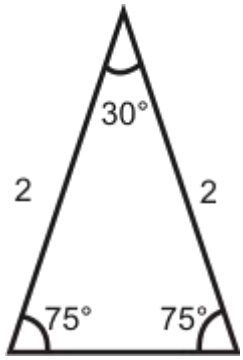
1. En un triángulo isósceles, donde α es la medida de los ángulos interiores iguales y los lados iguales miden 2 cm. Si se cumple que $\sec\alpha = 4\cos 45°.\text{sen}60° + 2\text{sen}45°$, determine el área de dicho triángulo.

A) 2 cm^2 B) 3 cm^2 C) 1 cm^2 D) 5 cm^2 E) 6 cm^2

Solución:

Del enunciado tenemos

$$\sec\alpha = 4\cos 45°.\text{sen}60° + 2\text{sen}45°$$
$$\sec\alpha = \sqrt{6} + \sqrt{2} \rightarrow \alpha = 75°$$



Luego el área del triángulo

$$S = \frac{2.2\text{sen}30°}{2} = 1\,\text{cm}^2$$

Rpta.: C

2. Sea $\alpha + 2\beta + 3\theta = 90°$, donde α, β y θ son agudos. Determine la medida del ángulo agudo x, si se cumple que:

$$\left(\frac{2\text{tg}(\alpha+\beta+\theta) + 2\text{sen}(2\beta+3\theta)}{\text{ctg}(\beta+2\theta) + \cos\alpha}\right) + \sqrt{3}\text{tg}\left(\frac{\alpha+3\theta}{2} + \beta\right) = \text{ctg}x\,.$$

A) $\frac{\pi}{12}$ rad B) $\frac{\pi}{6}$ rad C) $\frac{5\pi}{12}$ rad D) $\frac{\pi}{3}$ rad E) $\frac{\pi}{4}$ rad

Solución:

$$\left(\frac{2\text{tg}(\alpha+\beta+\theta) + 2\text{sen}(2\beta+3\theta)}{\text{ctg}(\beta+2\theta) + \cos\alpha}\right) + \sqrt{3}\text{tg}\left(\frac{\alpha+3\theta}{2} + \beta\right) = \text{ctg}x$$

como: $\alpha + 2\beta + 3\theta = 90°$ entonces:

$$\text{tg}(\alpha+\beta+\theta) = \text{ctg}(\beta+2\theta)$$
$$\text{sen}(2\beta+3\theta) = \cos\alpha$$
$$\left(\frac{2\text{tg}(\alpha+\beta+\theta) + 2\text{sen}(2\beta+3\theta)}{\text{ctg}(\beta+2\theta) + \cos\alpha}\right) = 2$$
$$\text{tg}\left(\frac{\alpha+3\theta}{2} + \beta\right) = \text{tg}\left(\frac{\alpha+2\beta+3\theta}{2}\right) = \text{tg}45° = 1$$

$$2 + \sqrt{3} = \text{ctg}x \rightarrow x = 15°$$

Rpta.: A

3. Si $m+n=30^o$, $m+2n$ y $2m-n$ son ángulos agudos, calcule $\dfrac{\text{sen}(m+2n).\text{ctg}(2m-n).\text{ctg}\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\cos(2m+n).\text{tg}(m+4n)}$.

A) $2+\sqrt{3}$ B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Solución:

Como $m+n=30^o \Rightarrow 3m+3n=90^o$

$\Rightarrow (m+2n)+(2m+n)=90^o \wedge (2m-n)+(m+4n)=90^o$

$$\frac{\text{sen}(m+2n).\text{ctg}(2m-n).\text{ctg}\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\cos(2m+n).\text{tg}(m+4n)}$$

$$\frac{\text{sen}\left(90^o-(2m+n)\right).\text{ctg}\left(90^o-(m+4n)\right).\text{ctg}\left(\frac{30^o}{2}\right)}{\cos(2m+n).\text{tg}(m+4n)}$$

$$\frac{\cos(2m+n).\text{tg}(m+4n).\text{ctg}(15^o)}{\cos(2m+n).\text{tg}(m+4n)}=\text{ctg}15^o=2+\sqrt{3}\ .$$

Rpta.: A

4. Los ángulos $(2\alpha-40^o)$, $(\alpha+20^o)$, $(3\theta-30^o)$ y $(\theta+30^o)$ son agudos y satisfacen las siguientes condiciones:

I. $\text{sen}(2\alpha-40^o).\csc(\alpha+20^o)=1$

II. $\cos(3\theta-30^o).\csc(\theta+30^o)=1.$

En base a la información dada, calcule $\text{sen}(2\alpha-4\theta)$.

A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Solución:

i) $\text{sen}(2\alpha-40^o).\csc(\alpha+20^o)=1 \Rightarrow \text{sen}(2\alpha-40^o)=\text{sen}(\alpha+20^o)$

$\Rightarrow 2\alpha-40^o=\alpha+20^o \Rightarrow \alpha=60^o$

ii) $\cos(3\theta-30^o)=\text{sen}(\theta+30^o) \Rightarrow 3\theta-30^o+\theta+30^o=90^o$

$\Rightarrow 4\theta=90^o \Rightarrow 2\theta=45^o$

$\therefore \text{sen}(2\alpha-4\theta)=\text{sen}[120^o-90^o]=\dfrac{1}{2}$

Rpta.: B

5. Si el área de la región triangular ABC de la figura es $30\ u^2$, calcule $\frac{1}{c.b}\left[\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}(90^o-C)\right]$.

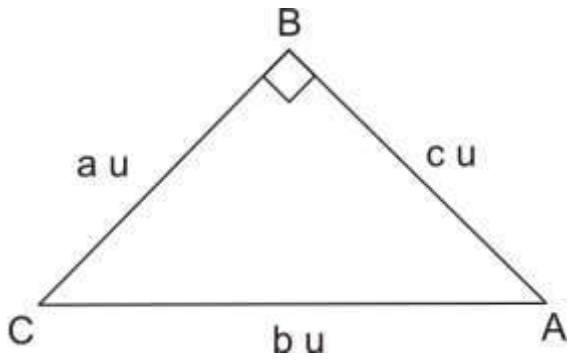
A) $\frac{2}{15}$

B) $\frac{7}{30}$

C) $\frac{2}{15}$

D) $\frac{1}{60}$

E) $\frac{1}{30}$



<u>Solución</u>:

$$\frac{ac}{2}=30\Rightarrow ac=60$$

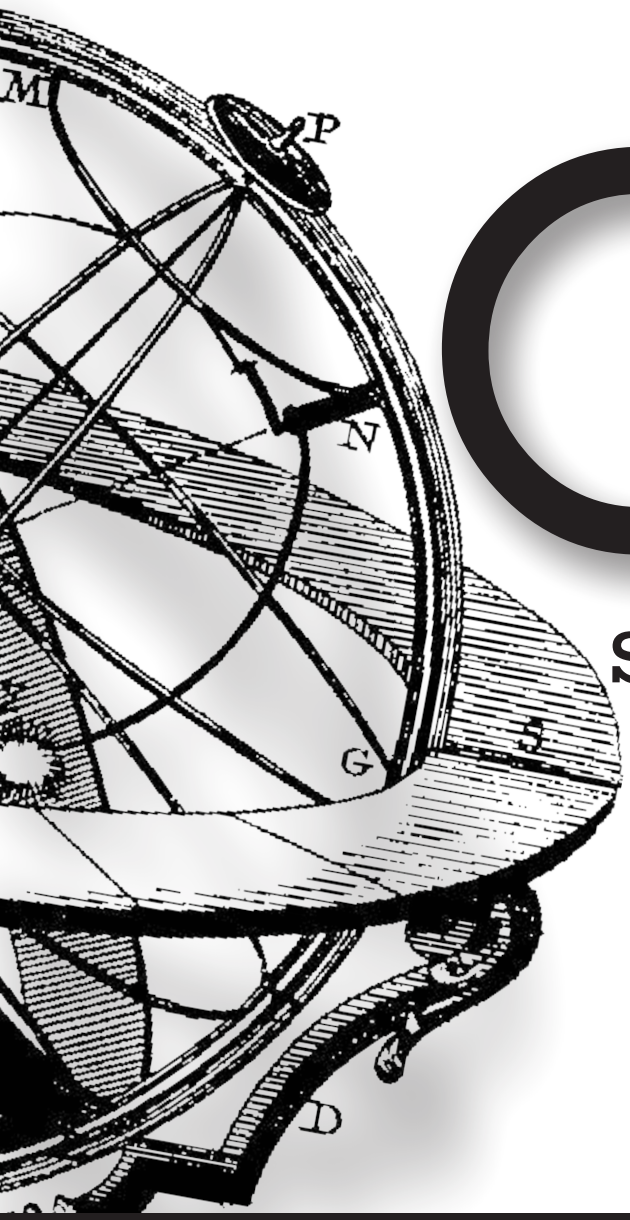
$$\frac{1}{c.b}\left[\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}(90^o-C)\right]=\frac{1}{b.c}\left[\frac{b+c}{a}-\frac{c}{a}\right]=\frac{1}{bc}\frac{b}{a}=\frac{1}{a.c}$$

$$\frac{1}{c.b}\left[\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{ctg}(90^o-C)\right]=\frac{1}{60}$$

Rpta.: D

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



05

semana

pre SAN MARCOS

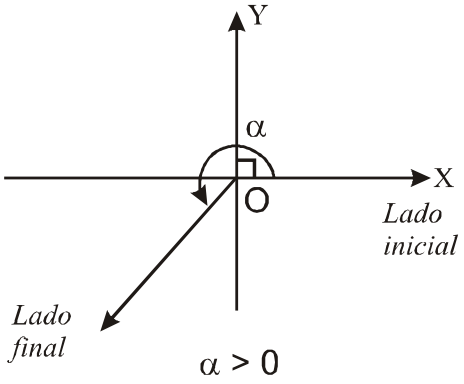
Manhattan Editores

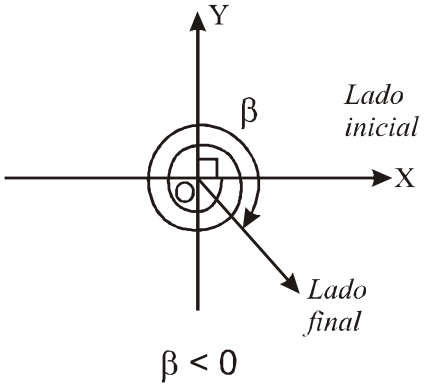
Trigonometría

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

1.1. ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Es el ángulo que tiene su vértice en el origen de un sistema coordenado rectangular, su lado inicial en el semieje positivo OX.





1.2. ÁNGULOS COTERMINALES

Son ángulos en posición normal cuyos lados finales coinciden.

Sean α y β dos ángulos coterminales, entonces

$$\beta - \alpha = 360°\, n = 2\pi\, n \text{ rad}, \; n \in \mathbb{Z}$$

$$RT(\alpha) = RT(\beta)$$

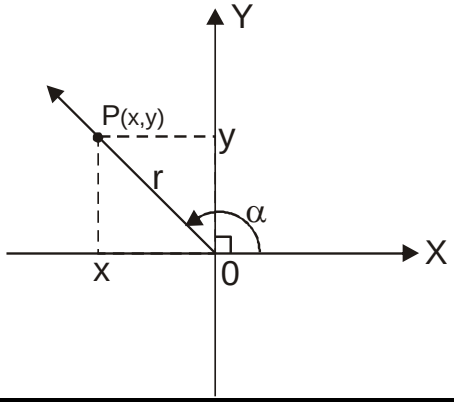
Donde RT: Razón trigonométrica

1.3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

x = abscisa

y = ordenada

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad r > 0$$



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio vector}} = \frac{y}{r} \qquad \text{ctg}\,\alpha = \frac{\text{abcisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{abcisa}}{\text{radio vector}} = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{radio vector}}{\text{abcisa}} = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{abcisa}} = \frac{y}{x} \qquad \csc\alpha = \frac{\text{radio vector}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}$$

1.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NEGATIVOS

$$\text{sen}(-\alpha) = -\frac{y}{r} = -\text{sen}\,\alpha \qquad \text{ctg}(-\alpha) = -\frac{x}{y} = -\text{ctg}\,\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} = \cos\alpha \qquad \sec(-\alpha) = \frac{r}{x} = \sec\alpha$$

$$\text{tg}(-\alpha) = -\frac{y}{x} = -\text{tg}\,\alpha \qquad \csc(-\alpha) = -\frac{r}{y} = -\csc\alpha$$

1.5. SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUADRANTES

	sen α	cos α	tg α	ctg α	sec α	csc α
I C	+	+	+	+	+	+
II C	+	–	–	–	–	+
III C	–	–	+	+	–	–
IV C	–	+	–	–	+	–

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $|\tan\alpha| = -\cot\alpha$ y $2\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 2 = 0$, donde $\alpha \in \left\langle 0, \frac{7\pi}{4} \right\rangle$, calcule el valor de $3\sec(-\alpha) + 2\operatorname{sen}\alpha$.

A) $-2\sqrt{2}$ B) $-2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) $-2\sqrt{5}$

Solución:

Siendo $|\tan\alpha| = -\cot\alpha \Rightarrow \cot\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \text{IIC} \vee \alpha \in \text{IVC}$.

Tenemos:

$$\frac{1}{|\cot\alpha|} = -\cot\alpha \Rightarrow \frac{1}{-\cot\alpha} = -\cot\alpha \Rightarrow \cot\alpha = \pm 1 \Rightarrow \cot\alpha = -1$$

Como $2\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 2 = 0$

$$\Rightarrow (2\cos^2\alpha - 1)(\cos\alpha + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

Luego, $\alpha \in \text{IIC} \Rightarrow P(-1,1) \wedge r = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sec(-\alpha) = -\sqrt{2} \wedge \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$E = 3\sec(-\alpha) + 2\operatorname{sen}\alpha$

$E = -2\sqrt{2}$

Rpta.: A

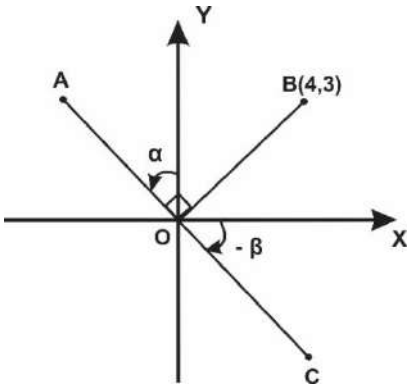
2. En la figura se muestra parte de una instalación de agua, donde en O hay una válvula que suministra agua a los puntos A, B y C. Si los ángulos α y $-\beta$ son los adecuados para una buena presión, calcule el valor de $25\cos(90° + \alpha)\operatorname{sen}(360° - \beta)$

A) 17

B) 12

C) 15

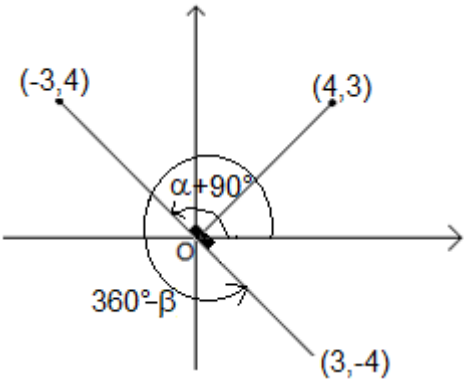
D) 10



Solución:

Sea L el valor buscado, entonces

$$L = 25\cos(90° + \alpha)\,\text{sen}(360° - \beta)$$
$$L = 25\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$$
$$L = 12.$$



Rpta.: B

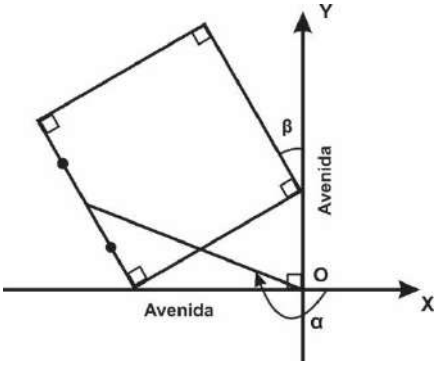
3. En la figura se representa el croquis de un terreno en forma de cuadrado destinado para la construcción de un hospital respecto a dos avenidas perpendiculares. Si se considera como el origen de coordenadas la intersección de dichas avenidas, calcule el valor de $\cot\alpha + \tan\beta$.

A) 1

B) 2

C) – 1

D) – 2



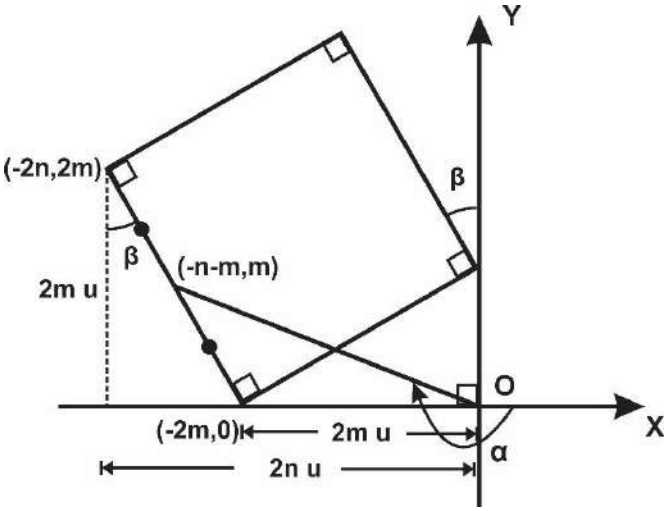
Solución:

Del gráfico:

$$\tan\beta = \frac{n-m}{m} \;\wedge\; \cot\alpha = \frac{-n-m}{m}$$

Sea E el valor buscado, entonces

$$E = \frac{n-m}{m} + \frac{-n-m}{m}$$
$$E = -2$$



Rpta. D

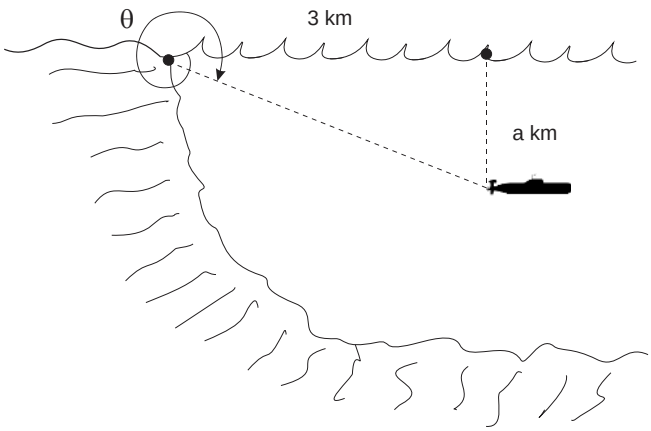
4. En la figura adjunta, se muestra la posición de un submarino que se encuentra en una misión científica recolectando información de distintas especies de animales y vegetales. Si $\text{tg}\theta + \text{ctg}\theta = -\frac{13}{6}$, donde $\text{tg}\theta > -1$, determine a cuantos kilómetros de profundidad se encuentra el submarino respecto al nivel del mar.

A) 5 km

B) 2 km

C) 3 km

D) 1,5 km



<u>Solución</u>:

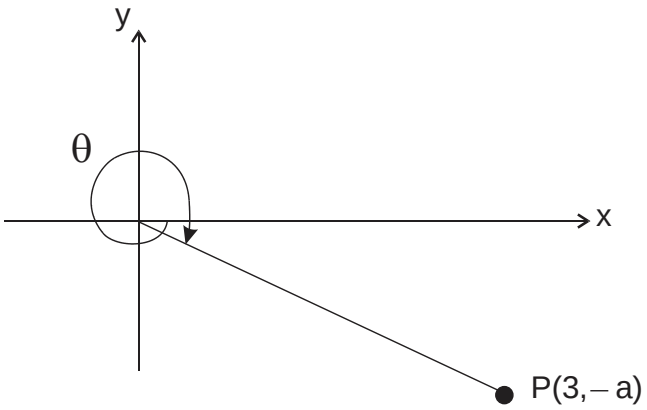
Como $\text{tg}\theta + \text{ctg}\theta = -\frac{13}{6}$

$\Rightarrow \quad \text{tg}\theta + \frac{1}{\text{tg}\theta} = -\frac{13}{6}$

$\Rightarrow \quad 6\text{tg}^2\theta + 13\text{tg}\theta + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad \text{tg}\theta = -\frac{3}{2} \vee \text{tg}\theta = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad \text{tg}\theta = -\frac{2}{3}$



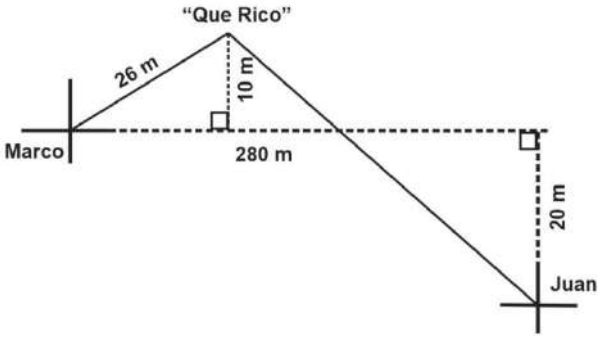
De la figura: $\text{tg}\theta = -\frac{a}{3}$

$\Rightarrow \quad -\frac{2}{3} = -\frac{a}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 2$

Por lo tanto, la nave se encuentra a 2km de profundidad.

Rpta.: B

5. Juan se comunica con su amigo Marco a través del aplicativo whatsapp y le envía su ubicación para acordar el lugar donde irán a almorzar juntos. Marco al ver la ubicación de su amigo edita la imagen trazando su ruta y la que debe seguir Juan (figura adjunta) y se lo envía para que se encuentren en el restaurante "Que Rico", halle la pendiente de la recta que representa la trayectoria de Juan para llegar al restaurante.



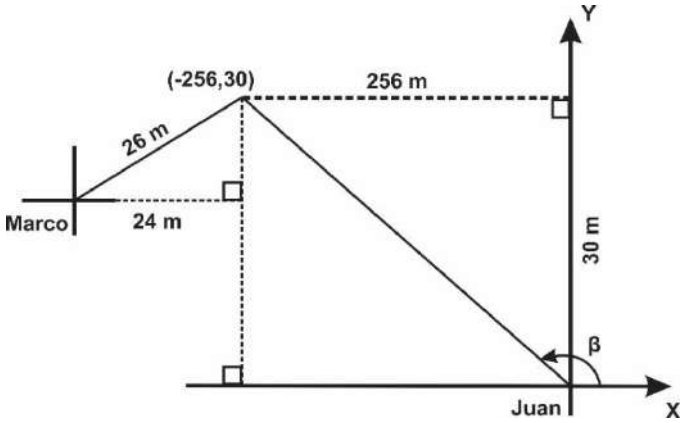
A) $-\dfrac{15}{128}$ B) $-\dfrac{128}{15}$

C) $-\dfrac{5}{12}$ D) $-\dfrac{12}{5}$

Solución:

Del gráfico:

$$\text{pendiente} = \tan\beta = -\frac{30}{256}$$



Rpta.: A

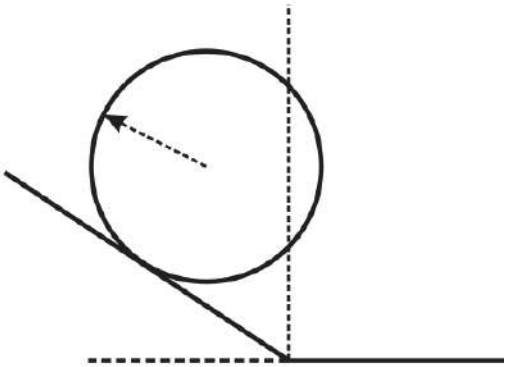
6. Una rueda de 45 cm de radio se desplaza por una pendiente con ángulo de inclinación $180° - \alpha$ respecto a la horizontal, como se muestra en la figura adjunta. Si en un determinado instante el centro de la rueda se ubica a 72 cm de altura y a 21 cm de distancia de la vertical que pasa por el punto final de la pendiente, calcule $\tan\alpha$.

A) $-\dfrac{3}{4}$

B) $-\dfrac{7}{6}$

C) $\dfrac{20}{7}$

D) $-\dfrac{1}{2}$



Solución:

Del enunciado:

$(x+21)^2+(y-72)^2=45^2$

$x^2+y^2+42x-144y+3600=0$

Del gráfico:

$x^2+y^2=3600$

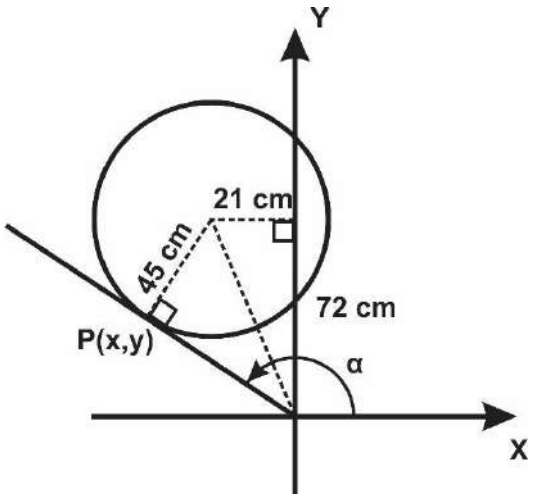
Reemplazando:

$24y-7x=1200$

Luego:

$x=-48;\ y=36$

$\therefore\ \tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$



Rpta.: A

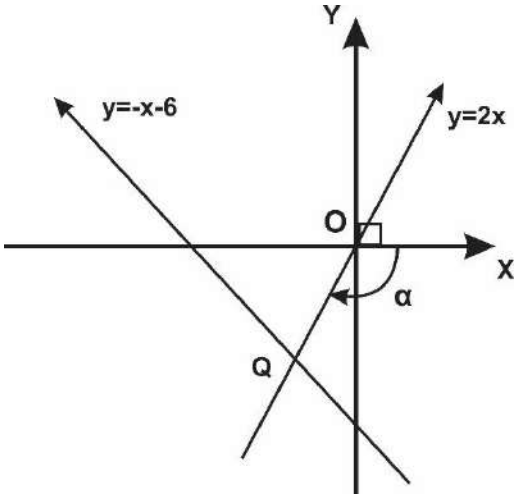
7. Un móvil A sigue la trayectoria descrita por $y=2x$, mientras el móvil B la trayectoria descrita por $y=-x-6$, encontrándose en el punto Q como se muestra en la figura, calcule el valor de $8\cot\alpha+\sqrt{5}\,\text{sen}\,\alpha$.

A) 6

B) 1

C) 5

D) 2



Solución:

Como: $y=-x-6=2x$

$\Rightarrow\ x=-2\ \wedge\ y=-4$

entonces $Q=(-2,-4)\ \wedge\ r=2\sqrt{5}$

$$M = 8\cot\alpha + \sqrt{5}\,\text{sen}\,\alpha$$
$$M = 8\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
$$M = 2$$

Rpta.: D

8. Sean α y θ ángulos coterminales con α perteneciente al cuarto cuadrante. Si $\text{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{\csc\theta + 6}$ y $\cot(33° - \beta) = -\cot(27°)$ donde β es agudo, calcule el valor de $\dfrac{2\,\text{sen}\theta\,\tan\alpha}{\cot\beta}$.

A) 2 B) 6 C) 1 D) 4

Solución:

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{\csc\theta + 6} \Rightarrow \csc^2\alpha = \csc\alpha + 6$$
$$\Rightarrow (\csc\alpha - 3)(\csc\alpha + 2) = 0$$
$$\Rightarrow \csc\alpha = -2$$

Como $\cot(33° - \beta) = -\cot(27°) \Rightarrow \beta - 33° = 27°$
$$\Rightarrow \beta = 60°$$

Luego, $\alpha \in \text{IVC} \Rightarrow P(\sqrt{3}, -1) \wedge r = 2$
$$\Rightarrow \text{sen}\,\theta = -\frac{1}{2} \wedge \tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$M = \frac{2\,\text{sen}\theta\tan\alpha}{\cot\beta}$$
$$M = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$M = 1$$

Rpta.: C

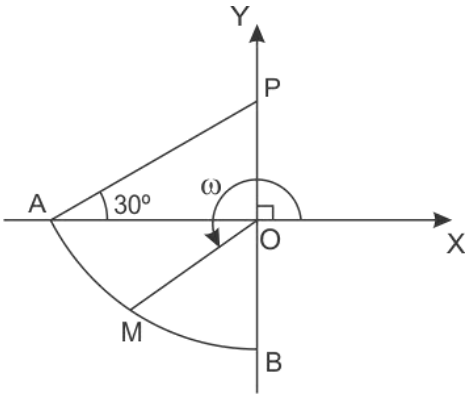
9. El alcance del rifle de un cazador ubicado en P está determinado por la superficie del sector circular APB como se muestra en la figura. Si un venado ubicado en O se percata de la presencia del cazador e intenta alejarse corriendo en dirección a M (punto medio del arco AB) donde es alcanzado por un proyectil disparado por el cazador, calcule el valor de $\cot 15° \tan\omega$.

A) $\sqrt{3}-1$

B) 2

C) $\sqrt{3}$

D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



Solución:

Del gráfico:

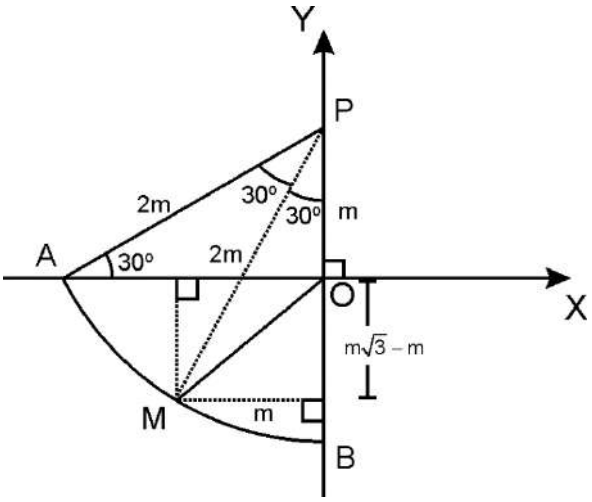
$$\omega \in \text{IIIC} \quad \Rightarrow \quad M\left(-m, m-m\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \tan\omega = \sqrt{3}-1$$

$$M = \cot 15° \tan\omega$$

$$M = \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$M = 2$$



Rpta.: B

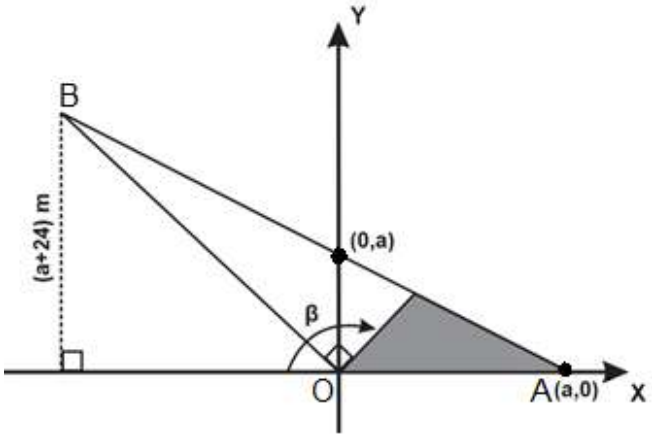
10. El Sr. Vizcarra repartirá su terreno de forma triangular OAB (figura adjunta) entre sus dos hijos. Si la superficie del terreno a repartir es $320\,m^2$, calcule el valor de $3\cot\beta$.

A) - 9

B) 8

C) 5

D) 2



Solución:

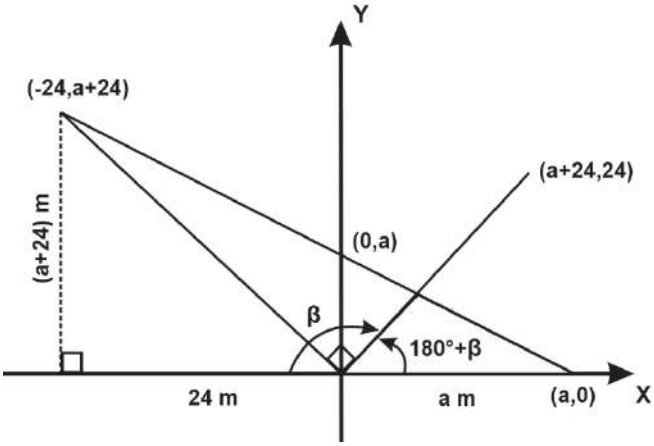
Como:

$$a(a+24)=640 \quad \Rightarrow \quad a=16$$

Luego:

$$\cot(180°+\beta)=\frac{a+24}{24}=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \cot\beta=\frac{5}{3}$$



Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $|\text{sen}\theta|=-\text{sen}\theta$ y $\cos\theta=\frac{1}{2}$, calcule el valor de $\sqrt{3}(\text{sen}\theta+\tan\theta)$.

A) $-\frac{9}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) -5

Solución:

Como:

$$|\text{sen}\theta|=-\text{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \theta \in \text{III C} \quad \vee \quad \theta \in \text{IV C}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta \in \text{I C} \quad \vee \quad \theta \in \text{IV C}$$

Luego, $\theta \in \text{IVC} \quad \Rightarrow \quad P(1,-\sqrt{3}) \wedge r=2$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \tan\theta=-\sqrt{3}$$

$$E=\sqrt{3}(\text{sen}\theta+\tan\theta)$$

$$E=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+-\sqrt{3}\right)$$

$$E=-\frac{9}{2}$$

Rpta.: A

2. Un climatólogo registró la temperatura de un pueblo en las alturas del departamento de Puno, el 1 de enero de 2020 y lo modeló por la expresión $\left(4\text{sen}^2\alpha + 4\text{sen}\,\alpha - 5\right)$ °C donde α es el arco en posición normal cuyo punto extremo del arco está representado por la posición del sol de Oriente a Occidente, determine la diferencia entre la máxima y mínima temperatura de ese día.

A) 9 °C B) 8 °C C) 10 °C D) 11 °C

Solución:

Como: $0 \le \alpha \le 180°$

$$\Rightarrow \quad -1 \le \text{sen}\alpha \le 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \le 2\text{sen}\alpha + 1 \le 3$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \left(2\text{sen}\alpha + 1\right)^2 \le 9 \quad \Rightarrow \quad -6 \le \underbrace{\left(2\text{sen}\alpha + 1\right)^2 - 6}_{T} \le 3$$

Por lo tanto $T_{máx} - T_{mín} = 9$ °C

Rpta.: A

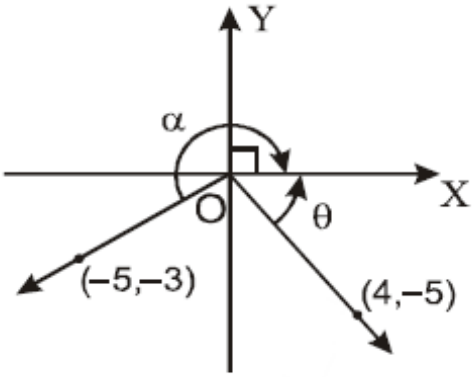
3. Con la información de la figura, calcule el valor de $\dfrac{24\left(\cot\alpha + \tan\theta\right)}{\sqrt{34}\,\cos\alpha}$.

A) 6

B) 4

C) 5

D) 2



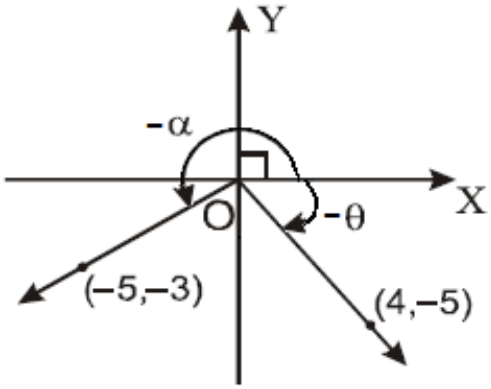
Solución:

De la figura:

$$\cot(-\alpha) = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \cot\alpha = -\frac{5}{3}$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{-5}{\sqrt{34}} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\tan(-\theta) = \frac{-5}{4} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{5}{4}$$



$$M=\frac{24\left(\cot\alpha+\tan\theta\right)}{\sqrt{34}\,\cos\alpha}$$

$$M=\frac{24\left(-\frac{5}{3}+\frac{5}{4}\right)}{\sqrt{34}\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}\right)}$$

$$M=2$$

Rpta.: D

4. Si α es un ángulo que pertenece al tercer cuadrante y además se cumple que $\tan(\alpha)=\dfrac{\tan\left(-20^{o}\right)+5\cot\left(-70^{o}\right)}{2\tan\left(-\frac{200^{g}}{9}\right)}$, calcule el valor de $3\sec\alpha\csc\alpha$.

A) 2,5 B) 1,5 C) 10 D) 13

<u>Solución</u>:

Como:

$$\tan(\alpha)=\frac{\tan\left(-20^{o}\right)+5\cot\left(-70^{o}\right)}{2\tan\left(-\frac{200^{g}}{9}\right)}$$

$$\Rightarrow\quad \tan(\alpha)=\frac{-\tan\left(20^{o}\right)-5\tan\left(20^{o}\right)}{-2\tan\left(20^{o}\right)}$$

$$\Rightarrow\quad \tan(\alpha)=3$$

Luego, $\alpha\in\text{IIIC}\quad\Rightarrow\quad P(-1,-3)\ \wedge\ r=\sqrt{10}$

$$\Rightarrow\quad \sec\alpha=-\sqrt{10}\ \wedge\ \csc\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$M=3\sec\alpha\csc\alpha$$

$$M=3\left(-\sqrt{10}\right)\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$M=10$$

Rpta.: C

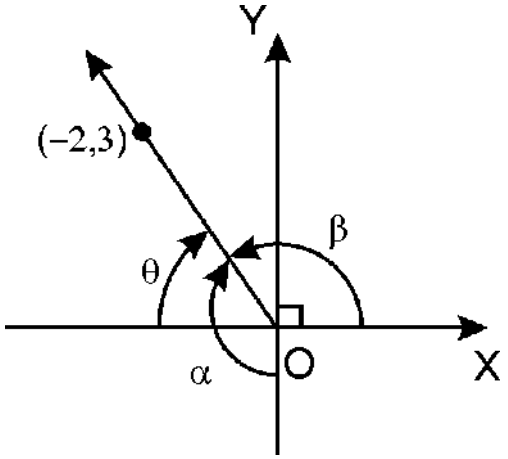
5. Con la información de la figura, calcule el valor de $\dfrac{\cos(\alpha - 90^{o}) + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\theta}$.

A) $\dfrac{1}{3}$

B) $-\dfrac{2}{3}$

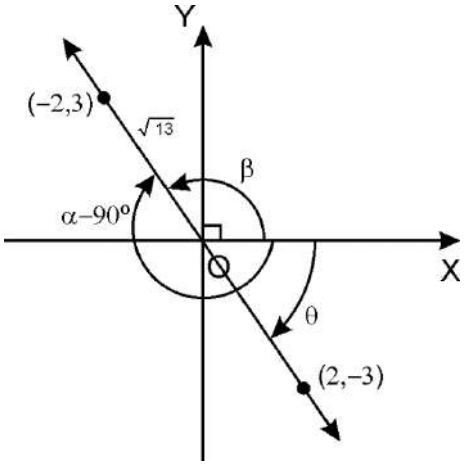
C) $\dfrac{4}{3}$

D) $-\dfrac{1}{3}$



<u>Solución</u>:

Del gráfico:



$$M = \frac{-\dfrac{2}{\sqrt{13}} + \dfrac{3}{\sqrt{13}}}{-\dfrac{3}{\sqrt{13}}}$$

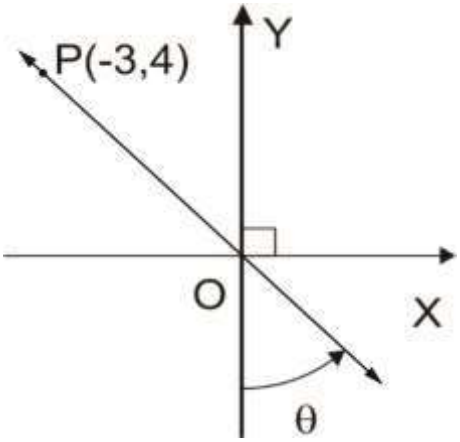
$$M = -\frac{1}{3}$$

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Partiendo del punto O, un móvil avanza a lo largo de la línea mostrada hacia el punto P. Considerando los datos de la figura, determine el valor de $20(\text{sen}\theta+\tan\theta)$.



A) 20

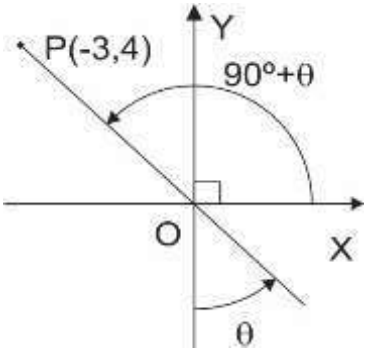
B) 28

C) 25

D) 27

Solución:

$(90^o+\theta)$ en posición normal



$$r=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$$

$$\underbrace{\cos(90^o+\theta)}_{-\text{sen}\theta}=\frac{-3}{5}\Rightarrow \text{sen}\theta=\frac{3}{5}$$

$$\underbrace{\cot(90^o+\theta)}_{-\tan\theta}=\frac{-3}{4}\Rightarrow \tan\theta=\frac{3}{4}$$

Luego:

$$\text{sen}\theta+\tan\theta=\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{27}{20}$$

$$20(\text{sen}\theta+\tan\theta)=27$$

Rpta.: D

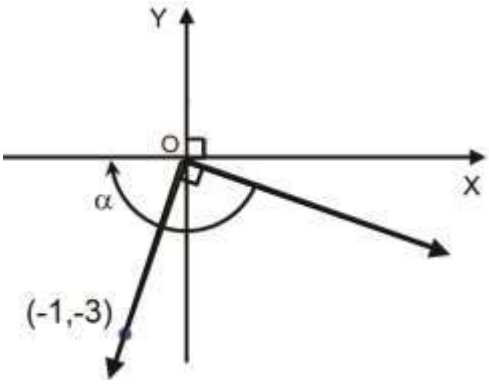
2. Con la información de la figura, calcule el valor de $\sqrt{10}\cos\alpha + 2\cot\alpha - 1$.

A) -4

B) 2

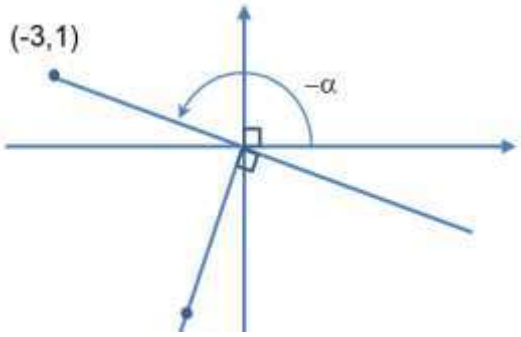
C) -8

D) -10



Solución:

$-\alpha$ está en P.N. $\Rightarrow x = -3,\ y = 1,\ r = \sqrt{10}$



Luego:

$$E = \sqrt{10}\cos\alpha + 2\cot\alpha - 1$$
$$E = \sqrt{10}\cos(-\alpha) - 2\cot(-\alpha) - 1$$
$$E = \sqrt{10}\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) - 2(-3) - 1$$
$$E = 2$$

Rpta.: B

3. Si α y β son coterminales, $|-\cos\alpha| = \cos\beta$ y $6\csc^2\alpha + 11\csc\beta - 7 = 0$, calcule el valor de $\sqrt{10}\,[\tan\alpha + \sec(-\beta)]$.

A) 3 B) –4 C) –2 D) 2

Solución:

Como $|-\cos\alpha| = \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in IC \vee \alpha \in IVC$

Como $6\csc^2\alpha + 11\csc\alpha - 7 = 0$

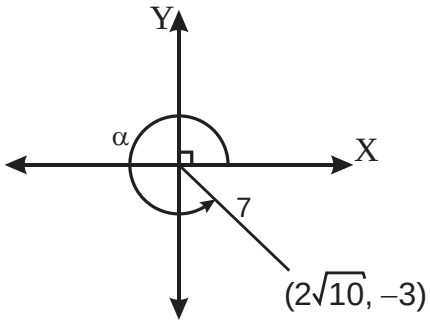
$\Rightarrow (2\csc\alpha - 1)(3\csc\alpha + 7) = 0$

$\Rightarrow \csc\alpha = \frac{1}{2} \vee \csc\alpha = -\frac{7}{3}$

Así $\csc\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in IIIC \vee \alpha \in IVC$

De lo anterior $\alpha \in IVC$

luego



$A=\sqrt{10}\ \{\tan\alpha + \sec(-\beta)\}$

$A = \sqrt{10}\ \{\tan\alpha + \sec\alpha\}$

$A = \sqrt{10}\left\{\dfrac{-3}{2\sqrt{10}} + \dfrac{7}{2\sqrt{10}}\right\} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2} = 2$

Rpta.: D

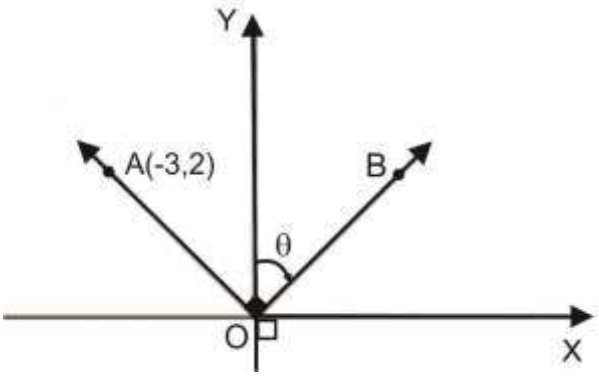
4. Un técnico diseña un esquema de instalación eléctrica para dos ambientes contiguos de una casa, el medidor de energía está ubicado en el punto O y los toma corrientes están en los puntos A y B tal como se representa en la figura. Si θ es el adecuado para prevenir posibles fugas de corriente, ¿cuál es el valor de $\sqrt{13}\cos\theta + 2\cot\theta$?

A) -3

B) 6

C) 0

D) -6



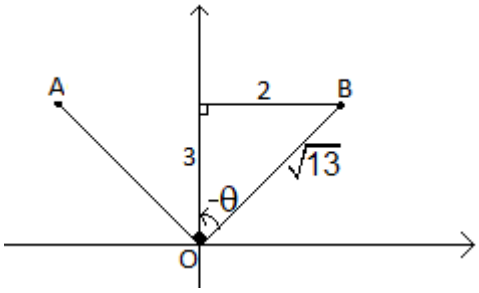
Contracultural*

Solución

Del gráfico:

$$\begin{cases} \cos(-\theta) = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \rightarrow \sqrt{13}\cos\theta = 3 \\ \cot(-\theta) = \dfrac{3}{2} \quad \rightarrow 2\cot\theta = -3 \end{cases}$$

$\therefore \sqrt{13}\cos\theta + 2\cot\theta = 0.$



Rpta.: C

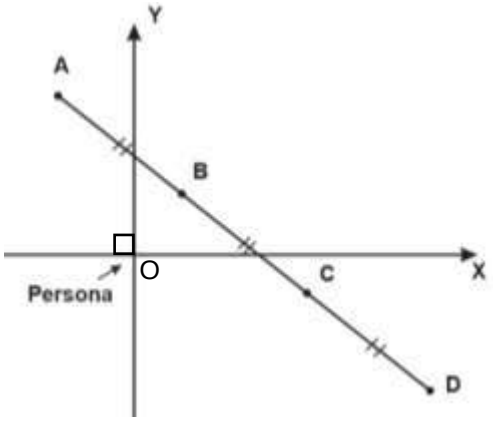
5. Cuatro ciudades A, B, C y D están ubicadas de forma colineal como se representa en la figura. Si la ciudad B se encuentra a 3 km al Este y 4 km al Norte de una persona, la ciudad C se encuentra a 7 km al Este y 1 km al Sur de la misma persona, calcule el producto entre la tangente del ángulo en posición normal donde la ubicación de A es un punto perteneciente a su lado terminal y la cotangente del ángulo en posición normal donde la ubicación de D es un punto perteneciente a su lado terminal.

A) $\frac{33}{2}$

B) $\frac{17}{6}$

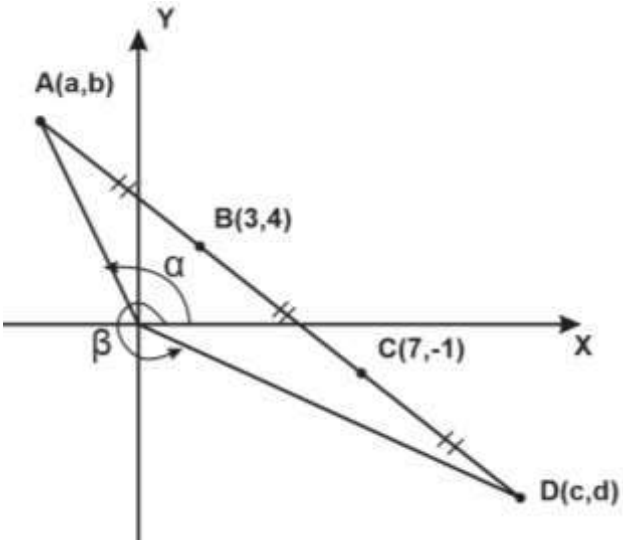
C) $\frac{20}{7}$

D) $\frac{1}{2}$



<u>Solución</u>:

Del gráfico:



$3=\frac{a+7}{2} \quad \wedge \quad 4=\frac{b-1}{2}$

$a=-1 \quad \wedge \quad b=9$

$7=\frac{c+3}{2} \quad \wedge \quad -1=\frac{d+4}{2}$

$c=11 \quad \wedge \quad d=-6$

Luego

$\tan\alpha=-9; \quad \cot\beta=-\frac{11}{6}$

$\therefore \ \tan\alpha.\cot\beta=\frac{33}{2}$

Rpta.: A

6. Andrés viaja en un auto por un camino rectilíneo con una aceleración de $(5\text{sen}t+3)$ km/h^2 (donde t está en horas), el cual pasa por la ciudad A rumbo a la ciudad C; en este trayecto, después de θ horas se detiene en la ciudad B a causa de un desperfecto. Si la distancia de la ciudad A hacia la ciudad B es $\cos\theta$ km, determine la distancia de la ciudad B a la ciudad C la cual está dada por $4(\sec\theta+\tan\theta)$ km.

A) 2 km B) 4 km C) 8 km D) 1 km

Solución:

Tenemos que $\cos\theta>0$ por ser distancia

Además , como el auto de detiene entonces $5\text{sen}\theta+3=0 \Rightarrow \text{sen}\theta=-\frac{3}{5}$

Luego, $\theta\in IVc \Rightarrow P(4,-3) \wedge r=5$

$$\Rightarrow \sec\theta=\frac{5}{4} \wedge \tan\theta=-\frac{3}{4}$$

Ahora $d(B,C)=4(\sec\theta+\tan\theta)$ km

$$d(B,C)=4\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right) \text{ km}$$

Por tanto, la distancia es $d(B,C)=2$ km

Rpta.: A

7. Por la noche, Paulo decide ir a dormir y en ese instante en el reloj de Paulo la manecilla del horario forma un ángulo en posición normal positivo menor a una vuelta de medida α (en el sistema de referencia cuyo origen de coordenadas es el centro del reloj) tal que $|\cos\beta|=\text{sen}\alpha.\tan^2\beta$ y $\tan\alpha=-\left(2+\sqrt{3}\right)$; determine a qué hora Paulo decidió ir a dormir.

A) 10 : 15 pm B) 8 : 30 pm C) 11: 30 pm D) 9 : 15 pm

Solución:

De $|\cos\beta| = \text{sen}\alpha.\tan^2\beta$ tenemos $\text{sen}\alpha > 0$

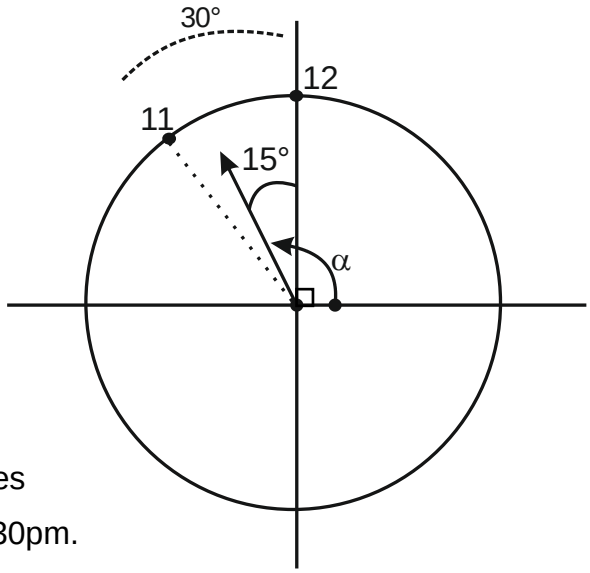
$\Rightarrow \quad \alpha \in \text{IIC} \quad \vee \quad \alpha \in \text{IC}$

Como $\tan\alpha = -\left(2+\sqrt{3}\right)$ entonces

$\alpha \in \text{IIC} \quad \vee \quad \alpha \in \text{IVC}$

Así $\alpha \in \text{IIC}$, luego de $\text{tg}\alpha = -\left(2+\sqrt{3}\right)$

tenemos que $\alpha = 105°$



De la figura como el horario avanzo 15° entonces

El minutero avanza 180°, por tanto, son las 11:30pm.

Rpta.: C

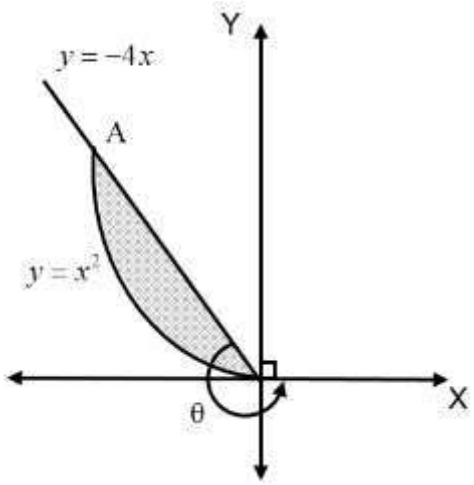
8. En la figura se representa el croquis de un jardín el cual tiene la forma de la región sombreada. Diego y José parten del punto O (Origen de coordenadas) y se encontrarán en el punto A siguiendo rutas diferentes. Diego sigue la trayectoria definida por $y = x^2$, mientras José sigue una trayectoria rectilínea definida por $y = -4x$ encontrándose en el punto A. Si las unidades de medida en este sistema están en metros y la distancia del punto O al punto A es d metros, calcule el valor de $\tan(-\theta) - 4\cot(-\theta) + \sqrt{17}\,d$.

A) 74

B) 65

C) 71

D) 62



Solución:

Como: $y = -4x = x^2$

$\Rightarrow \quad x = -4 \quad \wedge \quad y = 16$

entonces $A = (-4,16) \quad \wedge \quad d = \sqrt{(-4)^2 + 16^2}$

$M = \tan(-\theta) - 4\cot(-\theta) + d\sqrt{17}$

$M = -4 + 1 + 4\sqrt{17}.\sqrt{17}$

$M = -3 + 68$

$M = 65$

Rpta.: B

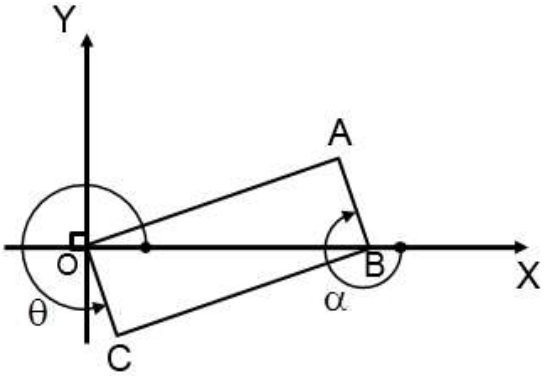
9. En la figura, el rectángulo OABC representa la vista frontal de un conteiner marítimo flotando cerca de un puerto en un determinado instante. Si $OA = 3AB$, calcule el valor de $\sqrt{10}\tan\alpha\cos\theta + \cos\alpha\,\text{sen}\theta$.

A) $-2,7$

B) $-2,5$

C) $-3,3$

D) $2,5$

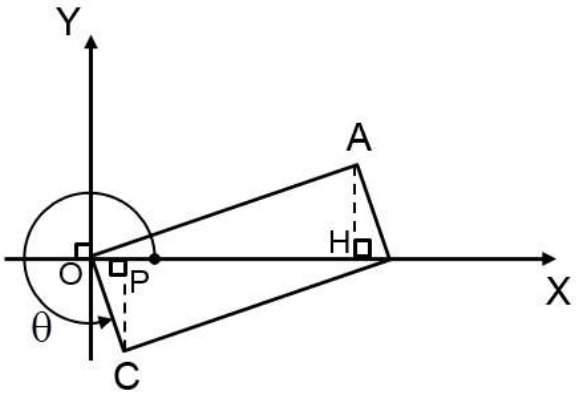


Solución:

- $OA = 3AB$
- $AH = 3HB$

  $\Rightarrow \tan\alpha = -3 \quad y \quad \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$
- $CP = 3OP$

  $\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \quad y \quad \text{sen}\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$
- Luego:



$E = \sqrt{10}\tan\alpha\cos\theta + \cos\alpha\,\text{sen}\theta$

$E = \sqrt{10}\,(-3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$E = -2,7$

Rpta.: A

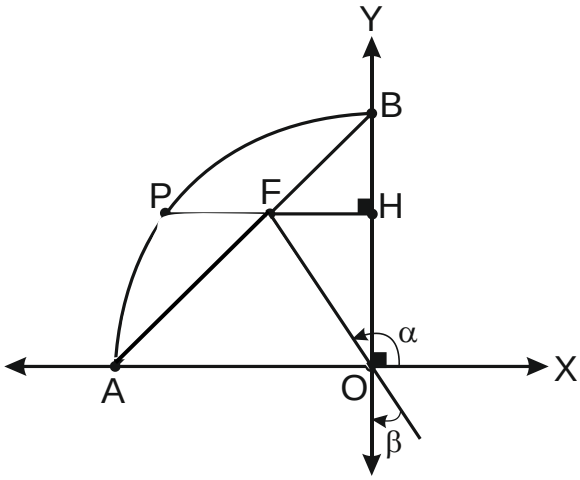
10. En la figura se representa el croquis de un terreno que tiene la forma de la región sombreada, donde AOB es un sector circular y $PF = FH$. Calcule el valor de $\tan\alpha + \sqrt{13}\,\text{sen}\beta$.

A) 3,4

B) –1,5

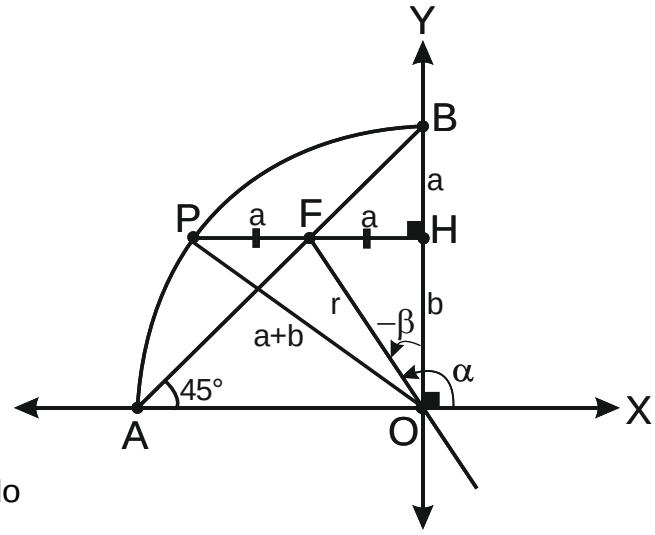
C) –3,5

D) 2,1



Solución:

De la figura, tenemos



$$(a+b)^2 = 4a^2 + b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4a^2 + b^2$$

Entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; a = 2k \;\wedge\; b = 3k$

Así tenemos $F(-a,b)$ y $r = \sqrt{13}\,k$

Luego $M = \tan\alpha + \sqrt{13}\,\text{sen}\beta$

$$M = \tan\alpha - \sqrt{13}\,\text{sen}(-\beta) \;;\quad -\beta : \text{agudo}$$

$$M = \frac{3k}{-2k} - \sqrt{13}\left(\frac{2k}{\sqrt{13}k}\right)$$

Por lo tanto $M = -3{,}5$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $|\text{sen}\theta| = \text{sen}\theta - \frac{1}{2}$ y $\sec\theta \cdot \text{sen}\theta < 0$, calcule el valor de $4\sqrt{15}(\cot\theta - \cos\theta)$.

A) -75 B) 75 C) -45 D) -45

Solución.

De $|\text{sen}\theta| = \text{sen}\theta - \frac{1}{2}$: $\text{sen}\theta = \text{sen}\theta - \frac{1}{2}$ ó $\text{sen}\theta = -\text{sen}\theta + \frac{1}{2}$

Entonces $\text{sen}\theta = \frac{1}{4}$ y como $\sec\theta \cdot \text{sen}\theta < 0$ $\Rightarrow$ $\sec\theta < 0$

$\Rightarrow \theta \in \text{IIC} \wedge x = -\sqrt{15},\ y = 1,\ r = 4$

Luego:

$$E = 4\sqrt{15}(\cot\theta - \cos\theta)$$

$$E = 4\sqrt{15}\left(-\sqrt{15} + \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$E = -45$$

Rpta.: D

2. Si $8^{2\sec\theta+3} = 1$, $|m| = -\cot\theta$ y además la edad de Juan el año 2019 es de $\left(12A\sqrt{5}\right)$años recién cumplidos, donde $A = \text{sen}\theta + |\tan(-\theta)|$; ¿cuántos años cumplirá Juan el año 2020?

A) 45 años B) 50 años C) 51 años D) 52 años

Solución:

Del dato: $8^{2\sec\theta+3} = 1 \Rightarrow 2\sec\theta + 3 = 0 \Rightarrow \sec\theta = -\frac{3}{2}$

Además: $\cot\theta < 0$, entonces $\theta \in$ II Q

$\Rightarrow \sec\theta = \frac{3}{-2} = \frac{r}{x} \Rightarrow 3^2 = (-2)^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{5}$

Luego $A = \frac{\sqrt{5}}{3} + \left|\frac{\sqrt{5}}{-2}\right| \Rightarrow A = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

La edad de Juan = $12\sqrt{5}(\frac{5\sqrt{5}}{6})$ = 50 años

Por lo tanto, Juan en el año 2020 cumplirá 51 años

Rpta.: C

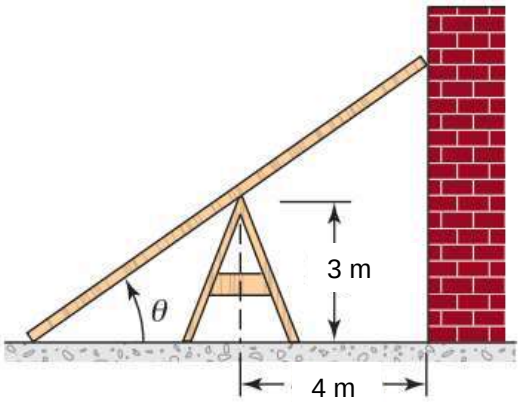
3. En la figura se representa una tabla de longitud L metros, la cual está sostenida por un caballete, para que uno de sus extremos descanse en el piso y el otro contra un muro. Si α y θ son ángulos coterminales, calcule el valor de $\dfrac{L}{4+3\cot\theta} - \sec\alpha$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 0



<u>Solución</u>:

En la horizontal se tiene: $4+3\cot\theta$

De la figura: $\sec\theta = \dfrac{L}{4+3\cot\theta}$

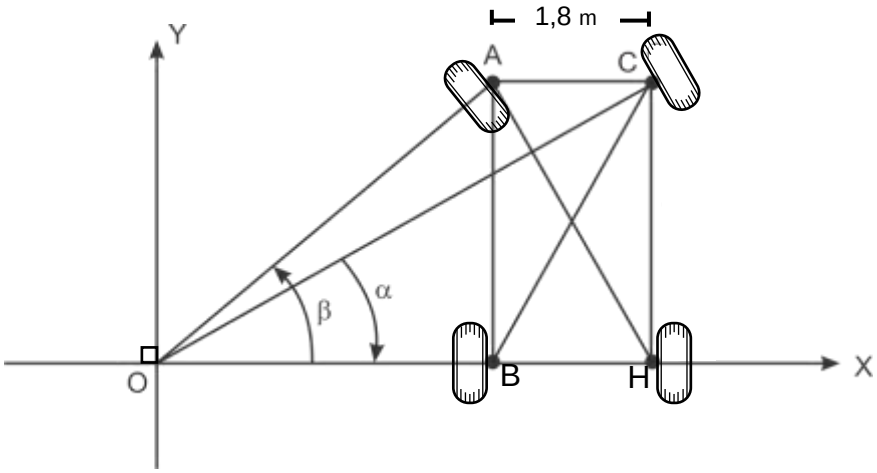
Como θ y α son coterminales $\Rightarrow$ $\sec\alpha = \sec\theta$

Luego

$$\frac{L}{4+3\cot\theta} - \sec\alpha = \sec\theta - \sec\alpha = 0$$

Rpta.: D

4. La figura representa el instante en el que un auto de forma rectangular efectúa una curva, en ese instante las ruedas de dicho auto forman los ángulos de viraje $(-\alpha)$ y β. Si en el sistema de referencia local las unidades de medida están en metros, $\tan\alpha = -\dfrac{40}{59}$ y $\cot\beta = \dfrac{41}{40}$, determine la distancia del centro del auto al origen del sistema de referencia.



A) 5 m

B) $\sqrt{29}$ m

C) 5,5 m

D) $\sqrt{26}$ m

Solución:

Como

$$\left.\begin{array}{lll} \tan(-\alpha) = \dfrac{40}{59} & \Rightarrow & CH = 40k \quad y \quad OH = 59k \\ \cot\beta = \dfrac{41}{40} & \Rightarrow & AB = 40k \quad y \quad OB = 41k \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 18k = 1{,}8$$

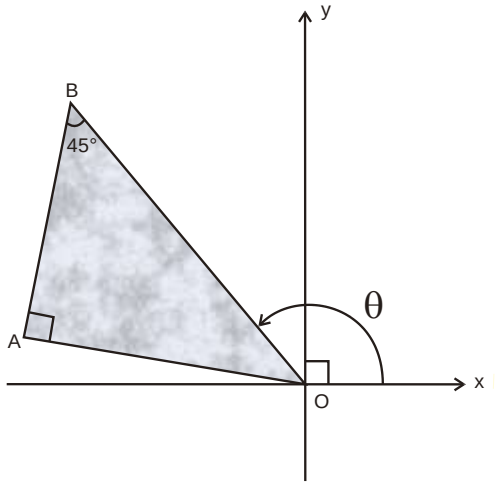
Luego, si M es punto medio del auto: $M(OB + 9k; 20k)$

Es decir $M(50k; 20k) = M(5; 2)$

Distancia de M al origen del sistema de referencia es $\sqrt{5^2 + 2^2}$ metros.

Rpta.: B

5. En la figura se representa el croquis de un terreno que tiene la forma de una región triangular OAB, el vértice A tiene coordenadas $(-5,1)$. Si el precio del terreno está dado por la expresión $400\left|80\tan\theta+\cot(\theta+45°)\right|$ en soles, ¿cuál es el precio de dicho terreno?



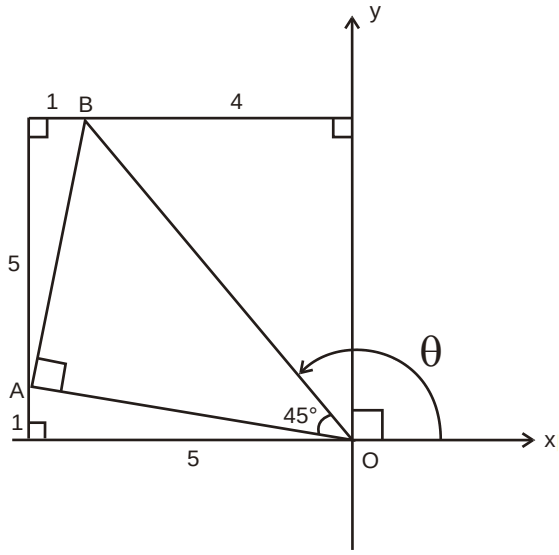
A) 30 000 soles

B) 40 000 soles

C) 50 000 soles

D) 60 000 soles

<u>Solución</u>:



Se observa: $A(-5,1)$ y $B(-4,6)$

Luego

$$Q=400\left|80\tan\theta+\cot(\theta+45°)\right|$$

$$Q=400\left|80\left(\frac{6}{-4}\right)+\left(-\frac{5}{1}\right)\right|$$

$$Q=50\,000 \text{ soles.}$$

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $\text{ctg}\alpha - 8\text{sen}\frac{\pi}{6} - \text{sen}\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{2}$ y es un ángulo en posición normal del tercer cuadrante, halle el valor de la expresión $\sqrt{53}\left(\text{sen}\alpha + \cos\alpha\right)$.

A) –8 B) 9 C) –9 D) –10 E) 10

α

Solución:

$\text{ctg}\alpha - 4 + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ctg}\alpha = \frac{7}{2}$

$\Rightarrow \text{ctg}\alpha = \frac{-7}{-2}$

$\alpha : P(-7,-2),\ d = \sqrt{53}$

Si E es el número buscado, entonces $E = \sqrt{53}\left(\left(\frac{-2}{\sqrt{53}}\right) + \left(\frac{-7}{\sqrt{53}}\right)\right) = -9$

Rpta.: C

2. Con la información dada en la figura evaluar la expresión $\sec\alpha + \text{tg}\alpha$.

A)

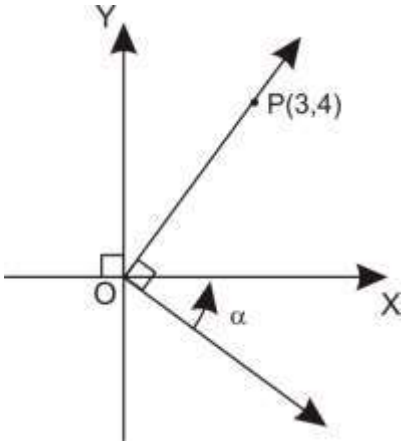
B)

C) -2

D) 2

E) $\frac{1}{-3}$

3



Solución:

El punto $Q(4,-3)$ pertenece al lado terminal del ángulo $(-\alpha)$ el cual está en posición normal.

$\therefore (-\alpha): Q(4,-3);\ d=5$

Si K es el número buscado, entonces,

$K=\sec(-\alpha)-\operatorname{tg}(-\alpha)$

$K=\frac{5}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$

Rpta.: B

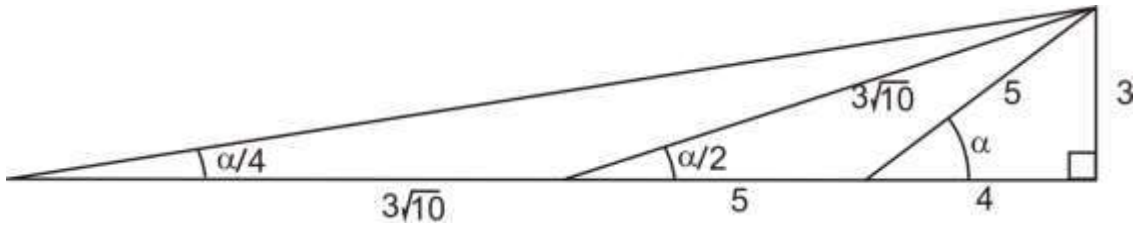
3. El ángulo α está en posición normal y para él se cumple que $|\operatorname{sen}\alpha|-\operatorname{sen}\alpha=0$ y $\cos\alpha=0{,}8$; halle $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{4}\right)$.

A) $\sqrt{10}+2$ B) $\sqrt{10}+1$ C) $\sqrt{12}+3$
D) $\sqrt{12}+2$ E) $\sqrt{10}+3$

Solución:

$|\operatorname{sen}\alpha|-\operatorname{sen}\alpha=0 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha>0,\ \cos\alpha>0$ entonces α es un ángulo del primer cuadrante cuyo coseno es $\frac{4}{5}$.

$\alpha: P(4,3)\ d=5$



$\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{3\sqrt{10}+9}{3}=\sqrt{10}+3$

Rpta.: E

4. El ángulo α está en posición normal siendo su seno positivo y su tangente negativa. Si uno más el cuadrado de la tangente de α es igual a 1,25; halle el valor de la expresión $5(\text{sen}\alpha+\cos\alpha)$.

A) $-\sqrt{5}$ B) $-\sqrt{3}$ C) -2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{3}$

Solución:

Como $\text{sen}\alpha>0$ y $\text{tg}\alpha<0$ entonces α está en el segundo cuadrante.

$\alpha:\ P(-,+)$ d

$1+\text{tg}^2\alpha=1{,}25\Rightarrow \text{tg}^2\alpha=0{,}25\Rightarrow \text{tg}\alpha=-0{,}5$

$\Rightarrow \text{tg}\alpha=-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{-2}$, luego,

$\alpha:P(-2{,}1)$ $d=\sqrt{5}$

$$E=5\left[\frac{1}{\sqrt{5}}+\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\right]\Rightarrow E=5\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\sqrt{5}$$

Rpta.: A

5. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

i. $\text{sen}(-60)^{\circ}=\text{sen}\left(\dfrac{200}{3}\right)^{g}$.

ii. Si $F(x)=\dfrac{\cos x+\text{sen}^2 2x}{\text{tg}^2 2x}$ entonces $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{12}$.

iii. Si α es un ángulo en posición normal para el cual $\text{sen}\alpha<0$ y $\cos\alpha>0$ entonces existe θ que pertenece al mismo cuadrante de α tal qué $\text{tg}\theta=5$.

A) VFF B) FVF C) FFF D) VVF E) VFV

Solución:

i. $\left(\dfrac{200}{3}\right)^{g}=60^{\circ}\Rightarrow -\text{sen}(60^{\circ})=\text{sen}60^{\circ}$(Falso).

ii. Si $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\text{sen}^2\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}{\text{tg}^2\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{5}{12}$(Verdadero)

iii. Si $\text{sen}\alpha<0$ y $\cos\alpha>0$ entonces $\alpha\in\text{IVC}\Rightarrow\theta\in\text{IVC}$. Luego, $\text{tg}\theta\neq 5$ (Falso).

Rpta.: B

6. Evaluar la expresión $5\text{tg}(4\alpha+6\beta).\cos(4\alpha+2\beta).\sec 2\alpha.\text{ctg}2\beta$ siendo α y β ángulos complementarios.

A) 5 B) -4 C) 4 D) -5 E) -3

Solución:

$$E=5\text{tg}([4\alpha+4\beta]+2\beta).\cos([2\alpha+2\beta]+2\alpha).\sec 2\alpha.\text{ctg}2\beta$$
$$E=5\text{tg}(2\pi+2\beta).\cos(\pi+2\alpha).\sec 2\alpha.\text{ctg}2\beta$$
$$E=5\text{tg}(2\beta).-\cos(2\alpha).\sec 2\alpha.\text{ctg}2\beta$$
$$E=-5\text{tg}2\beta.\text{ctg}2\beta.\sec 2\alpha.\cos 2\alpha$$
$$E=-5$$

Rpta.: D

7. De los ángulos α y β se sabe que:

i. son coterminales,
ii. la suma de sus medidas es $(-200)^{o}$ y
iii. la medida de α está entre $\frac{20\pi}{9}$ radianes y 600 grados centesimales.

Calcule la medida del ángulo menor.

A) $(-620)^{o}$ B) $(-600)^{o}$ C) $(-610)^{o}$ D) $(-700)^{o}$ E) $(-640)^{o}$

Solución:

$$\alpha+\beta=(-200)^{o}$$

$$\underline{\alpha-\beta=360^{o}}\ \cdot k\in\mathbb{Z}$$

$$2\alpha=(-200)^{o}+360^{o}k\Rightarrow\alpha=(-100)^{o}+180^{o}k$$

Por dato, $400^{o}<\alpha<540^{o}$, luego, $400^{o}<\underbrace{180^{o}k-100^{o}}_{\alpha}<540^{o}$

Otorgándole a k valores 0, 1, 2 la cadena de desigualdades es falsa.

Si $k=3$, $400^{o}<180^{o}k-100^{o}<540^{o}$, luego, $\alpha=440^{o}$

$$440^{o}+\beta=(-200)^{o}\Rightarrow\beta=(-640)^{o}$$

Rpta.: E

8. Los ángulos α y β son coterminales siendo α un ángulo del segundo cuadrante. Si $4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1 = 0$, evaluar la expresión $\sqrt{3}\ \text{sen}\alpha + \sec\beta$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) 2 E)

Solución:

$4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1 = 0$

$(2\cos\alpha + 1)^2 = 0 \Rightarrow 2\cos\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\alpha : P(-,+)d$

$\alpha : P\left(-1,+\sqrt{3}\right)d = 2$

Si E es el número buscado, entonces, $E = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{2}{-1}\right) = -\frac{1}{2}$

Rpta.: C

9. En la figura se cumple que $3.BP = PA$, halle el valor de la expresión $\sqrt{13}(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$.

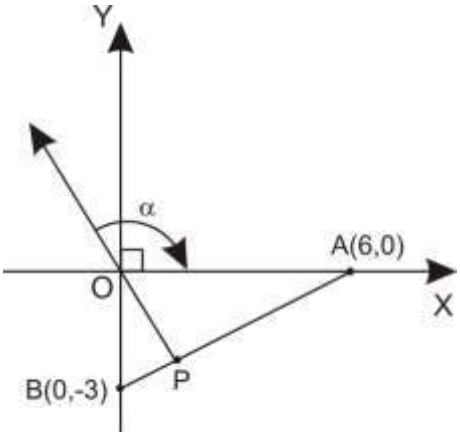
A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{3}{4}$

E) 1



Solución:

Calculo de las coordenadas del punto de división $P(x,y)$.

Como $3.BP = PA \Rightarrow \frac{BP}{PA} = \frac{1}{3}$ (razón de división)

$$x = \frac{0 + \frac{1}{3}(6)}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2},\ y = \frac{-3 + \left(\frac{1}{3}\right)(0)}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{9}{4}$$

$\therefore P\left(\frac{3}{2},-\frac{9}{4}\right)$.

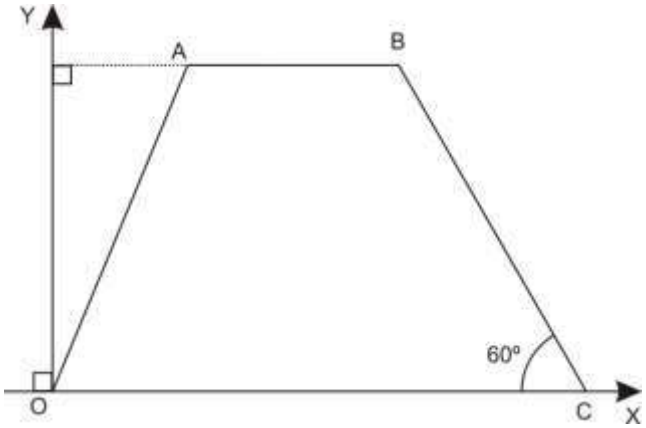
$(-\alpha)$ es un ángulo en posición normal y Q es un punto de su lado terminal.

$\therefore\ (-\alpha)$: $Q\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ $d=\frac{3\sqrt{13}}{4}$.

Finalmente, $\sqrt{13}(\text{sen}\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{13}\left(\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{4}\sqrt{13}}+\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{13}}\right)=3-2=1$

Rpta.: E

10. El área del cuadrilátero ABCO, de la figura, es $6\left(23+4\sqrt{3}\right)u^2$. Las coordenadas del vértice A son $\left(10.\text{sen}\left(\frac{500}{3}\right)^g,24\cos(-60^o)\right)$. Halle la suma de las coordenadas del vértice B.



A) 24

B) 23

C) 26

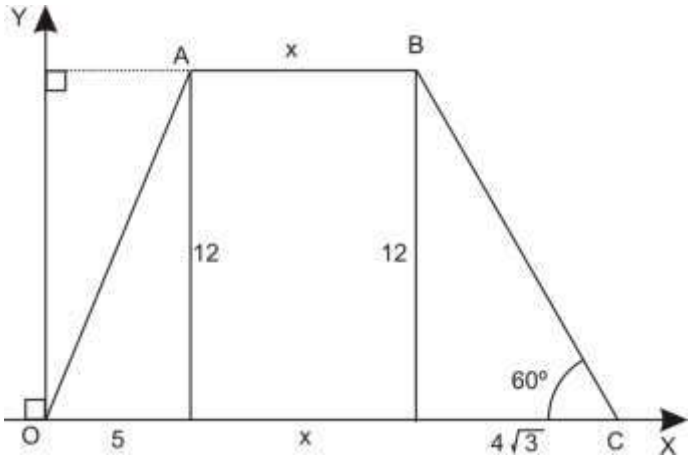
D) 27

E) 30

<u>Solución</u>:

$\text{sen}\left(\frac{500}{3}\right)^g=150^o\Rightarrow\text{sen}\left(\frac{500}{3}\right)^g$
$=\text{sen}150^o=\frac{1}{2}$

El cuadrilátero ABCO es un trapecio



$$\text{Área}(ABCD) = 6\left(23+4\sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{\left[x+\left(5+x+4\sqrt{3}\right)\right]12}{2}$$
$$\Rightarrow 6\left(23+4\sqrt{3}\right) = 6\left(2x+5+4\sqrt{3}\right)$$
$$\Rightarrow x = 9$$

$$\therefore B(14,12);\ \Sigma = 14+12 = 26$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Del ángulo α se sabe que:

i. su seno es positivo,
ii. su coseno es negativo y
iii. el cuadrado de su tangente es $\text{sen}\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{3}$

Halle el valor de la expresión $\sqrt{5}\csc\alpha + \text{ctg}\alpha$.

A) 4 B) 2,5 C) 4,5 D) 3 E) 3,5

Solución:

$\text{sen}\alpha > 0 \wedge \cos\alpha < 0$, entonces α es del segundo cuadrante
$\alpha : P(-,+)d$

$$\text{tg}^2\alpha = \text{sen}30^o.\cos 60^o = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{tg}\alpha = \pm\frac{1}{2}$$

Luego, $\text{tg}\alpha = -\frac{1}{2} = \frac{1}{-2}$

$\alpha : P(-2,+1)\quad d = \sqrt{5}$

Si E es el número buscado, entonces $E = \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{1}\right) + \left(\frac{-2}{1}\right) = 5-2 = 3$

Rpta.: D

2. Con la información dada en la figura, halle el valor de $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}+1$.

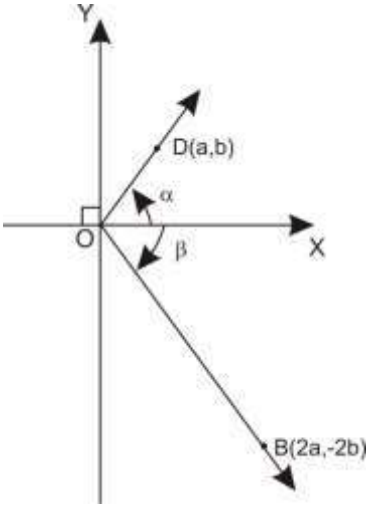
A) 0

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{4}{3}$

E) $\frac{5}{4}$



<u>Solución</u>:

α y β son ángulos en posición normal, luego

$\alpha : D(a,b)\quad d=\sqrt{a^2+b^2}$

$\beta : B(2a,-2b)\quad d=2\sqrt{a^2+b^2}$

$$\therefore \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta}+1=\frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{-2b}{2\sqrt{a^2+b^2}}}+1=-1+1=0$$

Rpta.: A

3. En la figura, P es el baricentro del triángulo ABO. Con la información dada en la figura, halle el valor de la expresión $3(\sec\alpha-\text{tg}\alpha)$.

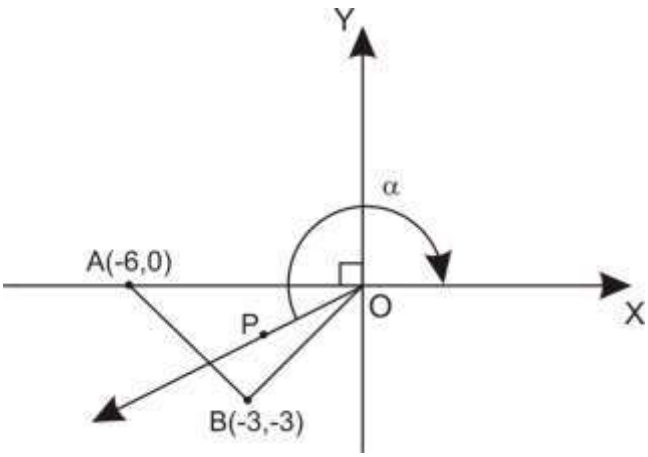
A) $1+\sqrt{10}$

B) $1-\sqrt{10}$

C) -2

D) -3

E) 4



Solución:

$$P\left(\frac{-6+0-3}{3},\frac{0+0-3}{3}\right),\ P(-3,-1)$$

$(-\alpha)$ es un ángulo en posición normal, luego

$(-\alpha): P(-3,-1),\ d=\sqrt{10}$

Si E es el número buscado, entonces

$$E=3\left[\sec(-\alpha)+tg(-\alpha)\right]$$

$$E=3\left[\frac{\sqrt{10}}{-3}+\left(\frac{-1}{-3}\right)\right]=-\sqrt{10}+1$$

Rpta.: B

4. En la figura, C es una circunferencia de ecuación $x^2+y^2-6x=0$ y L es una recta de ecuación $y=x$. Halle el valor de $\sec\alpha-tg\alpha$.

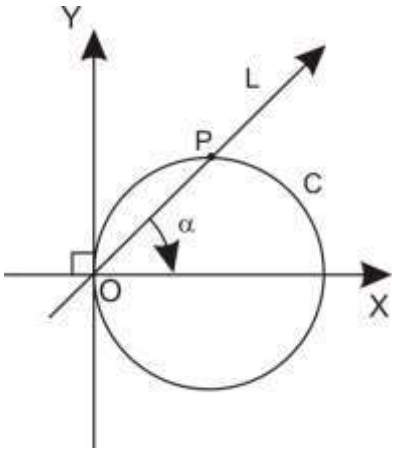
A) $\sqrt{3}+1$

B) $\sqrt{2}+2$

C) $\sqrt{2}+1$

D) $\sqrt{2}+3$

E) $\frac{3}{2}$



Solución:

Cálculo de los puntos de intersección de C y L:

$$x^2+x^2-6x=0\Rightarrow 2x^2-6x=0\Rightarrow(x=0\ y=0)\vee(x=3\ y=3)$$

$\therefore P(3,3)$

$(-\alpha)$ es un ángulo en posición normal

$(-\alpha)$: $P(3,3)$ $d=3\sqrt{2}$. Si E es el número buscado, entonces

$$E=\sec(-\alpha)+tg(-\alpha)$$

$$E=\frac{3\sqrt{2}}{3}+\frac{3}{3}=\sqrt{2}+1$$

Rpta.: C

5. Con la información dada en la figura, halle el valor de $60\left(\text{tg}\beta+\sec\alpha+\cos\beta+\text{sen}\alpha\right)$.

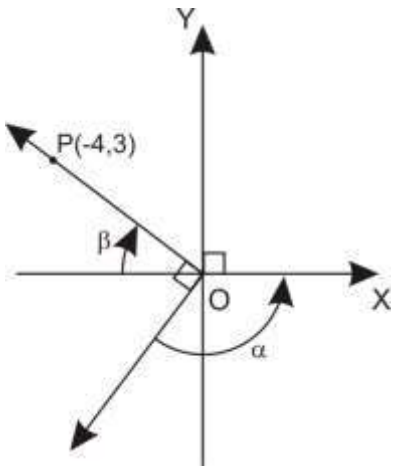
A) 49

B) 50

C) –48

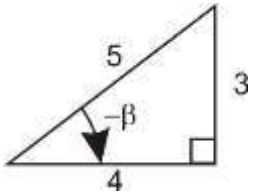
D) –49

E) –50



<u>Solución</u>:

$(-\alpha)$ es un ángulo en posición normal y
$Q(-3,-4)$ es un punto de su lado terminal.
$\therefore (-\alpha):\ Q(-3,-4),\ d=5$



Si E es el número buscado, entonces

$$E=60\left(-\text{tg}(-\beta)+\sec(-\alpha)+\cos(-\beta)-\text{sen}(-\alpha)\right)$$

$$E=60\left(-\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{-3}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=-49$$

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $|\text{sen}\alpha| = |5\cos\alpha|$ (α es una ángulo del segundo cuadrante), halle el valor de la expresión $\sqrt{26}(\text{sen}\alpha + \sec\alpha)$.

A) -21 B) -20 C) 21 D) 20 E) -22

Solución:

$\text{sen}\alpha = -5\cos\alpha \Rightarrow \text{tg}\alpha = \dfrac{5}{-1}$

$\alpha : P(-1,5)$ $d = \sqrt{26}$

$\therefore$ Si E es el número buscado, entonces

$$E = \sqrt{26}\left(\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right) + \left(\frac{\sqrt{26}}{-1}\right)\right) = 5 - 26 = -21$$

Rpta.: A

2. Del ángulo α se sabe que:

i. su seno es igual a $\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

ii. el mayor valor de su tangente es a

iii. el mayor valor de su coseno es c.

Halle $a + c$.

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{31}{20}$ C) $\dfrac{3}{4}$ D) $\dfrac{29}{20}$ E) $\dfrac{4}{5}$

Solución:

Como $\text{sen}\alpha = -\dfrac{3}{5}$ entonces α es un ángulo del tercer cuadrante o del cuarto cuadrante.

i. Si $\text{sen}\alpha = -\dfrac{3}{5}$ y $\alpha \in \text{IIIC}$, entonces

$\alpha : P(-4,-3)$ $d = 5 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4}$, $\cos\alpha = \dfrac{-4}{5}$

ii. Si $\text{sen}\alpha = -\dfrac{3}{5}$ y $\alpha \in \text{IVC}$, entonces

$\alpha : Q(4,-3)$ $d = 5 \Rightarrow \text{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

$\therefore a = \dfrac{3}{4}$, $c = \dfrac{4}{5}$; luego, $a + c = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{31}{20}$

Rpta.: B

3. Si $A(a;4)$ y $B(-8;b)$ son puntos que pertenecen al lado terminal del ángulo en posición normal θ, halle $\left[\left(64+b^2\right)\left(16+a^2\right)\right]^{1/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

A) 16 B) 32 C) 64 D) -16 E) -32

Solución:

Como $A(a;4)$ y $B(-8;b)$ son puntos que pertenecen al lado terminal del ángulo en posición normal θ, entonces $\frac{4}{a}=\frac{b}{-8}\Rightarrow a.b=-32$.

$$\left[\left(64+b^2\right)\left(16+a^2\right)\right]^{1/2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$=\left[\left(64+b^2\right)\left(16+a^2\right)\right]^{1/2}\frac{b}{\sqrt{64+b^2}}\frac{a}{\sqrt{16+a^2}}=a.b=-32$$

Rpta.: E

4. En la figura, el triángulo ABO es equilátero. Halle $\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha-\sqrt{5}\sec\beta$.

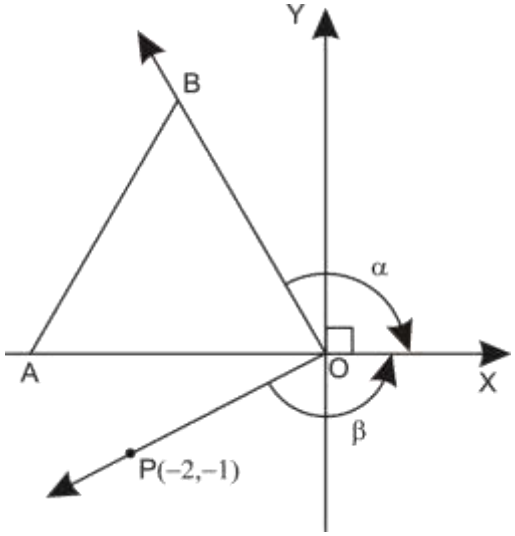
A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{4}$

C) 1

D) $\frac{1}{7}$

E) $\frac{2}{5}$



Solución:

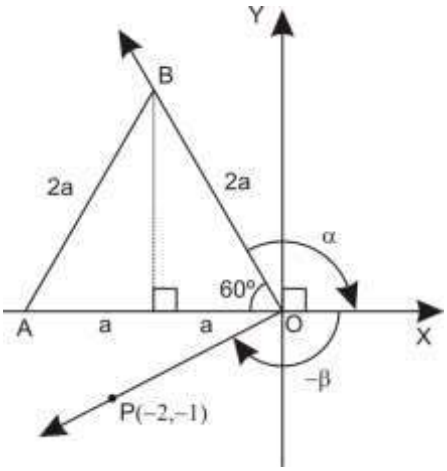
Las coordenadas del punto B son $\left(-a,\sqrt{3}a\right)$.

Además, $(-\alpha)$ y $(-\beta)$ son ángulos en posición normal.

$(-\alpha)$: $B\left(-a,\sqrt{3}a\right)$ $d=2a$

$(-\beta)$: $P(-2,-1)$ $d=\sqrt{5}$

Si E es el número buscado, entonces



$$E=-\sqrt{3}\operatorname{sen}(-\alpha)-\sqrt{5}\sec(-\beta)$$
$$E=-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}a}{2a}\right)-\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{-2}\right)=1$$

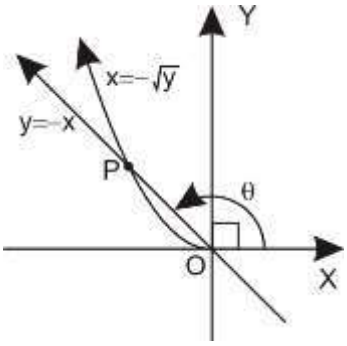
Rpta.: C

5. Dos autos parten desde un punto O.

i. El auto A se desplaza sobre la curva $x=-\sqrt{y}$.

ii. El auto B se desplaza sobre la recta $y=-x$

iii. Los autos A y B se encuentran en el punto P.



Con la información que se da en la figura, halle $\operatorname{tg}\theta+\sec^2\theta$.

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 0

Solución:

$x=-\sqrt{y},\ y=-x \Rightarrow -y=-\sqrt{y} \Rightarrow y^2=y \Rightarrow y=1 \wedge x=-1$

$\theta: P(-1,1),\ d=\sqrt{2}$

$\therefore$ Si E es el número buscado, entonces

$$E=\left(\frac{1}{-1}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{-1}\right)^2=1$$

Rpta.: A

6. En la figura se muestra un péndulo, sujeto a un hilo, el cual describe al pasar del punto A al punto B un ángulo α. Calcule el valor de la expresión $3\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)+5\operatorname{sen}(270^\circ-\alpha)$.

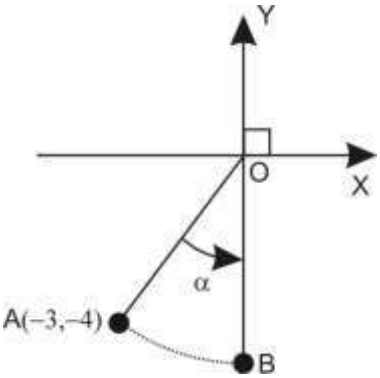
A) -8

B) 6

C) 12

D) -6

E) 8



Solución:

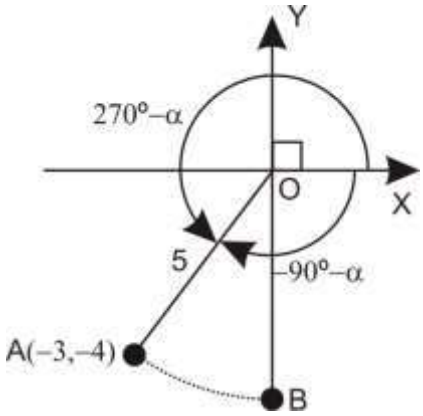
Sea H el número buscado, entonces

$$H = 3\text{tg}(90^o + \alpha) + 5\text{sen}(270^o - \alpha)$$

$$H = -3\text{tg}(-90^o - \alpha) + 5\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$H = -3\left(\frac{-4}{-3}\right) + 5\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$H = -8$$



Rpta.: A

7. Si $|\text{sen}\beta| = -\text{sen}\alpha$, $|\cos\theta| = \cos\alpha$ y $\cos^2\theta - \text{sen}^2\beta = \frac{1}{2}$, halle $\text{tg}\alpha$

A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{3}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ D) $-\sqrt{3}$ E) 1

Solución:

Como $1 - \cos^2\theta = 1 - \cos^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$ y $\text{sen}^2\beta = \text{sen}^2\alpha$, entonces

$1 - \cos^2\theta + \text{sen}^2\beta = 1 - \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 2\text{sen}^2\alpha$

$\frac{1}{2} = 2\text{sen}^2\alpha \Rightarrow -\frac{1}{2} = \text{sen}\alpha$

Entonces $\text{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Rpta.: C

8. De los ángulos α y β se sabe que:

i. son coterminales
ii. la suma de sus medidas es (-700°)
iii. la medida de α está entre $4\pi\text{rad}$ y $\frac{9\pi}{2}\text{rad}$.

Halle la medida del ángulo mayor.

A) – 725º B) 730º C) 740º D) 735º E) 750º

Solución:

$\alpha - \beta = 360^o.k \ (k \text{ entero})$

$\underline{\alpha + \beta = -700^o}$

$2\alpha = 360^o k - 700^o \Rightarrow \alpha = 180^o k - 350^o$

Además, $720^o < \alpha < 810^o \Rightarrow 720^o < 180^o k - 350^o < 810^o$

$k = 6 : 720^o < 730^o < 810^o$

$\therefore \alpha = 730^o$

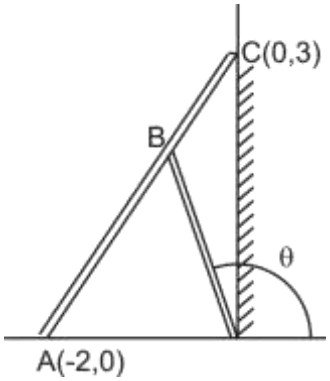
Rpta.: B

9. Una vara metálica se apoya en la pared tal como se muestra en la figura. Se coloca una varilla en el punto B que está unida con la base de la pared, para evitar desplazamientos. Halle $tg\theta + ctg\theta$, si $AB = 2.BC$.

A) $-\frac{10}{3}$ B) $\frac{10}{3}$

C) $-\frac{1}{3}$ D) -3

E) $\frac{2}{3}$



Solución:

$\frac{AB}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2 =$ razón de división de un segmento $= r$

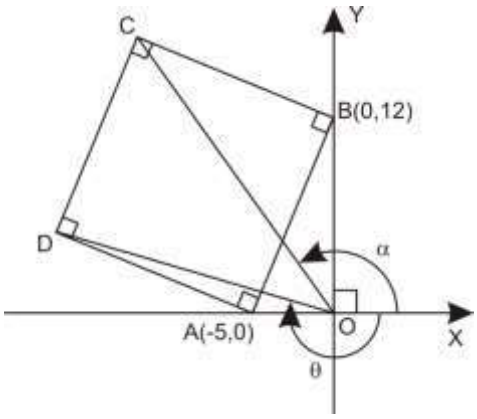
Sean (x, y) las coordenadas de B, entonces $x = \frac{-2 + 0.r}{1+2} = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{0 + 2.3}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$

$\therefore B\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$. B es un punto del lado terminal del ángulo θ en posición normal, luego,

si E es el número buscado, $E = \left(\frac{2}{-\frac{2}{3}}\right) + \left(\frac{-\frac{2}{3}}{2}\right) = -\frac{10}{3}$.

Rpta.: A

10. Una lámina de forma cuadrangular se sostiene de los puntos A y B, tal como se indica en la figura adjunta. Para fijarla al piso y la pared se colocan dos varillas por OC y OD; calcule $12\text{tg}\alpha + 17\text{tg}\theta$.



A) -20

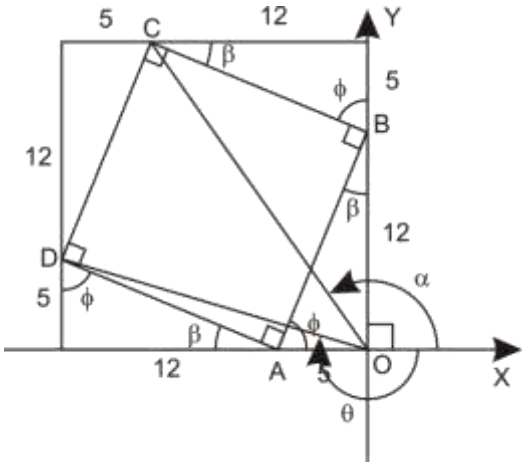
B) -21

C) -22

D) -23

E) -24

Solución:



D pertenece al lado terminal del ángulo en posición normal θ y C pertenece al lado terminal del ángulo en posición normal α

$D(-17,5)$ y $C(-12,17)$

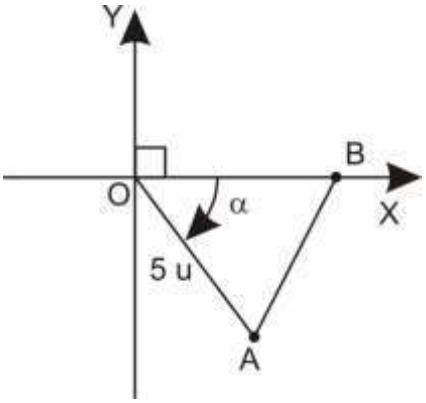
Si E es el número buscado,

$$E = 12\left(\frac{17}{-12}\right) + 17\left(\frac{5}{-17}\right) = -22 .$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El área de la región limitada por el triángulo isósceles AOB (OA=OB) es igual a $\frac{15}{2}u^2$; halle $3\text{tg}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$.



A) 1

B) 1,1

C) 1,2

D) 1,3

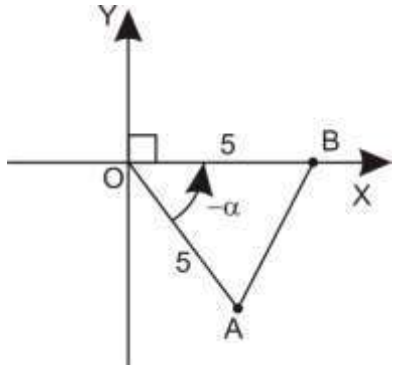
E) 2

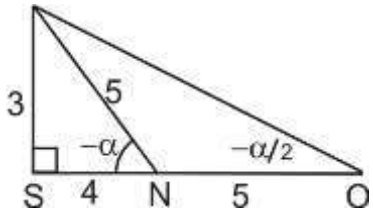
Solución:

$$\text{Area}(AOB)=\frac{1}{2}.5.5.\text{sen}(-\alpha)=\frac{15}{2}$$

$$25\text{sen}(-\alpha)=15\Rightarrow \text{sen}(-\alpha)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

$(-\alpha)$ es un ángulo agudo, luego,





$$\therefore \text{tg}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3\text{tg}\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=1$$

Rpta.: A

2. El ángulo α es negativo y está en posición normal. Si el lado terminal de α pasa por el punto de intersección de las rectas $L_1: 2x+y=0$ y $L_2: 3x-2y=14$, halle el valor de la expresión $\sqrt{5}(\text{sen}\alpha+\cos\alpha)$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) -1 E) 1

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y=0\\3x-2y=14\end{array}\right\}\Rightarrow 3x-2(2x)=14\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}$$

$\alpha: P(2,-4)$ $d=\sqrt{20}$

Si E es el número buscado, entonces,

$$E=\sqrt{5}\left(-\frac{4}{\sqrt{20}}+\frac{2}{\sqrt{20}}\right)=\sqrt{5}\left(\frac{-2}{2\sqrt{5}}\right)=-1$$

Rpta.: D

3. En la figura, P es punto medio de $\overline{MN}$ y $AB = 2.PA$. Halle $tg\alpha + tg\beta$.

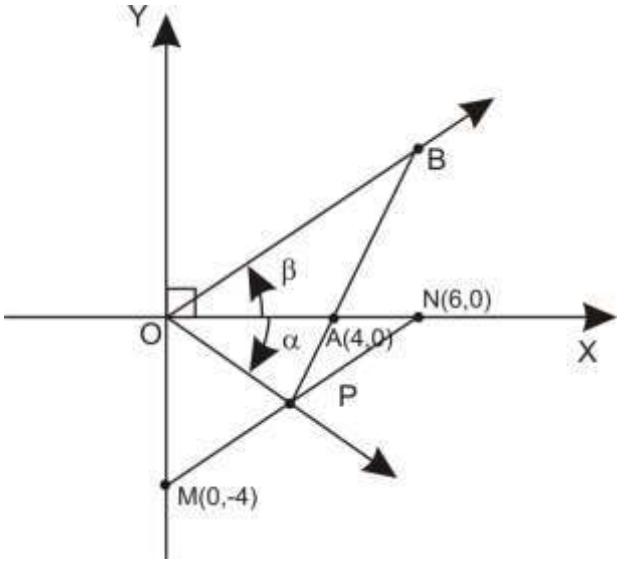
A) 1

B) 1,5

C) 0

D) 1,2

E) 2



<u>Solución</u>:

$$P\left(\frac{0+6}{2},\frac{-4+0}{2}\right),\ P(3,-2)$$

$$\frac{PA}{AB} = \frac{PA}{2.PA} = \frac{1}{2} = r$$

Donde r es la razón de división de un segmento de recta

Si B(a,b): $4 = \dfrac{3+\frac{1}{2}.a}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow a = 6$

$0 = \dfrac{-2+\frac{1}{2}.b}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow b = 4$, luego, $B(6,4)$

Finalmente, si E es el número buscado, $E = \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{6}\right) = 0$

Rpta.: C

4. Con la información dada en la figura, halle el valor de $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{4}\right).\text{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right)$.

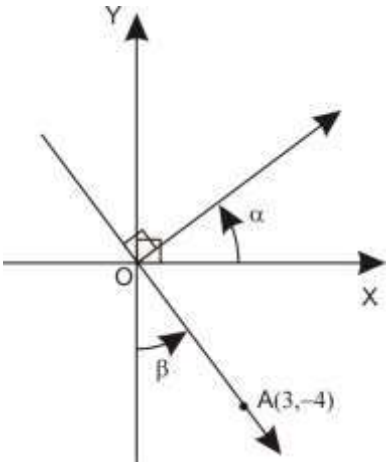
A) $2\left(\sqrt{10}-3\right)$

B) $3\left(\sqrt{10}+3\right)$

C) $3\left(\sqrt{10}-2\right)$

D) $3\left(\sqrt{10}-3\right)$

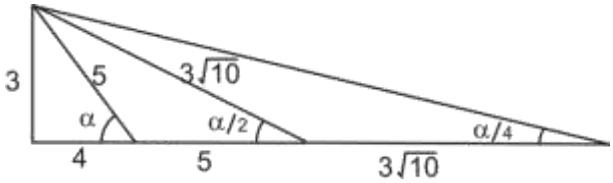
E) $\frac{1}{3}$

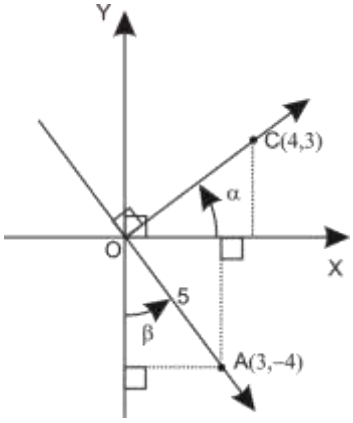


Solución:

$\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

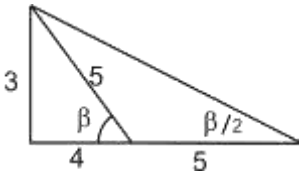
$\text{ctg}\beta = \frac{4}{3}$





$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\text{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{3}{3\sqrt{10}+9} = \frac{1}{\sqrt{10}+3}$



$\text{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{9}{3} = 3$

Por lo tanto, si E es el número buscado, entonces

$$E = \frac{1}{\sqrt{10}+3}.3 = \frac{3}{\sqrt{10}+3}.\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}-3} = 3\left(\sqrt{10}-3\right)$$

Rpta.: D

5. Tres automóviles P, Q y R viajan a la misma velocidad al pueblo O; si $\text{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$, $\text{tg}\beta = -\frac{24}{7}$ y $\text{ctg}\theta = -\frac{4}{3}$, calcule la distancia a la que se encuentra el automóvil que llegara más rápido al pueblo.

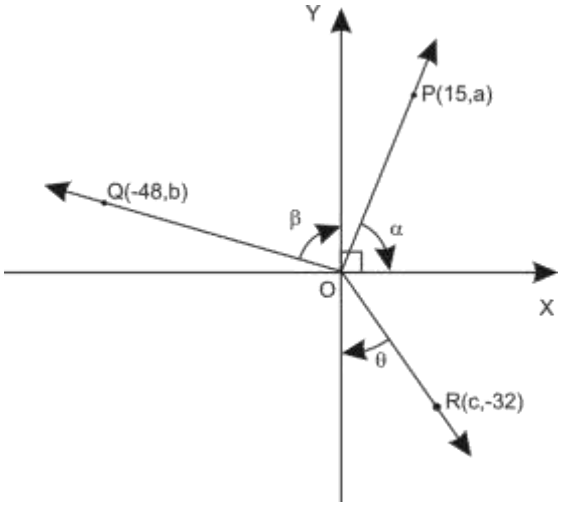
A) 50 u

B) 40 u

C) 39 u

D) 55 u

E) 45 u



<u>Solución</u>:

$*\text{tg}(-\alpha) = \frac{a}{15} \Rightarrow \text{tg}\alpha = -\frac{a}{15} = -\frac{12}{5}$

$\Rightarrow a = 36 \Rightarrow OP = 39\text{ u}$

$*\text{ctg}(90^o - \beta) = -\frac{48}{b}$

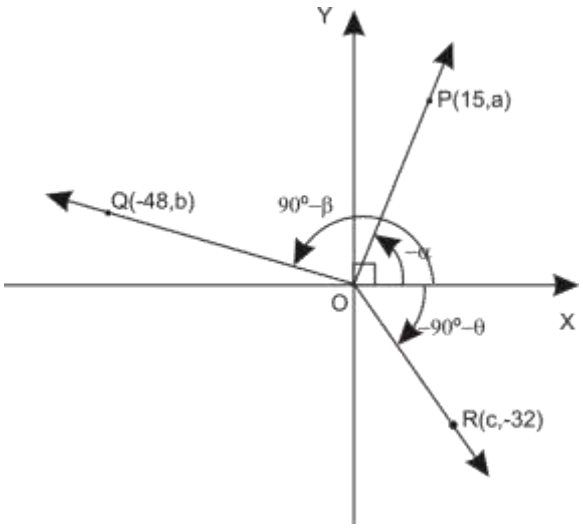
$\Rightarrow \text{tg}\beta = -\frac{48}{b} = -\frac{24}{7}$

$\Rightarrow b = 14 \Rightarrow OQ = 50\text{ u}$

$*\text{tg}(-90^o - \theta) = -\frac{32}{c} \Rightarrow \text{tg}(90^o + \theta) = \frac{32}{c}$

$\Rightarrow -\text{ctg}\theta = \frac{32}{c}$

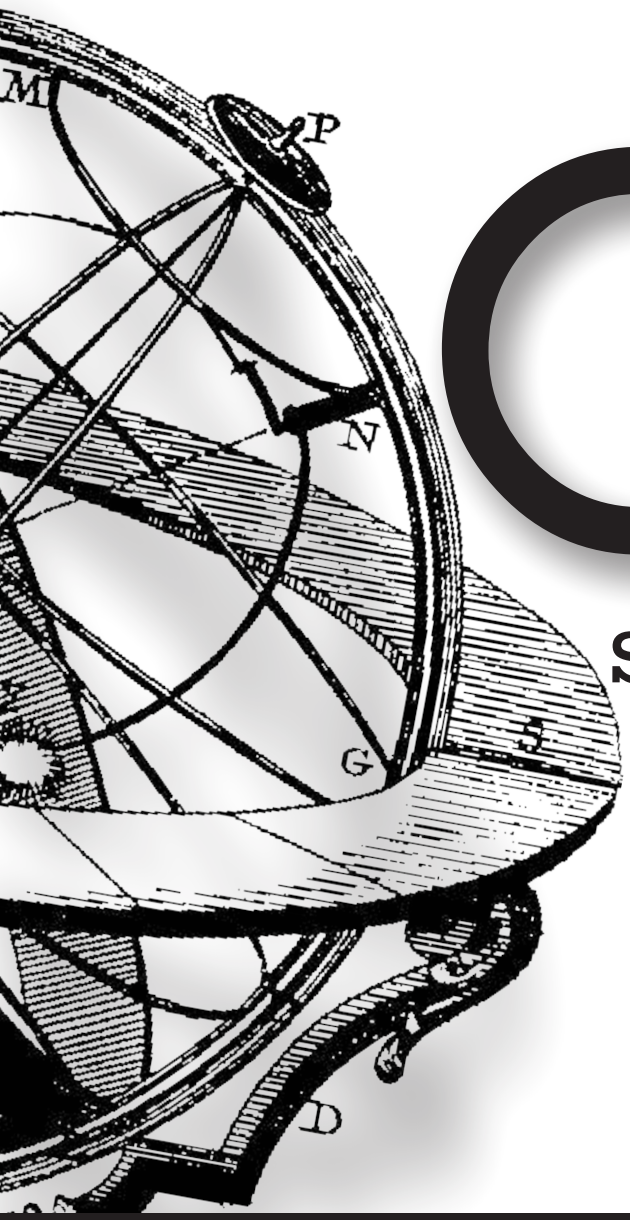
$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{32}{c} \Rightarrow c = 24 \Rightarrow OR = 40\text{ u}$



Rpta.: C

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



06

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

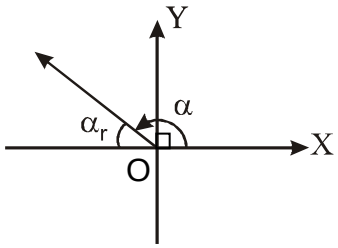
REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1. REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

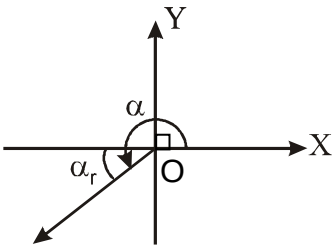
1.1. REDUCCIÓN DE ÁNGULOS MENORES QUE UNA VUELTA

α_r: es el ángulo agudo formado por el lado terminal de α y por el eje X.

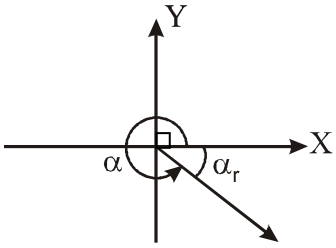
Si $\alpha \in$ II C , $\alpha_r = 180^o - \alpha$
$\alpha_r = \pi rad - \alpha$



Si $\alpha \in$ III C , $\alpha_r = \alpha - 180^o$
$\alpha_r = \alpha - \pi rad$



Si $\alpha \in$ IV C , $\alpha_r = 360^o - \alpha$
$\alpha_r = 2\pi rad - \alpha$



donde la fórmula de reducción es

$$RT(\alpha) = \pm RT(\alpha_r)$$

el signo depende del signo de la razón trigonométrica en el cuadrante al cual pertenezca el ángulo a reducirse.

1.2. REDUCCIÓN DE ÁNGULOS MAYORES QUE UNA VUELTA

Sean α y β dos ángulos coterminales

$$RT(\alpha) = RT(\beta)$$

pero $\beta = 360^o\, n + \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$

$\beta = 2\pi\, n + \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$

entonces

$RT(\alpha) = RT(360^o\, n + \alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$

$RT(\alpha) = RT(2\pi\, n + \alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$

2. OTRAS FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

$RT(90^o \pm \alpha) = \pm CO - RT(\alpha)$
$RT(180^o \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$
$RT(270^o \pm \alpha) = \pm CO - RT(\alpha)$
$RT(360^o \pm \alpha) = \pm RT(\alpha)$

donde ***α es considerado agudo*** y en todos los casos el signo del lado derecho de las igualdades depende del signo de la razón trigonométrica del ángulo que aparece a la izquierda.

3. RAZÓN TRIGONOMÉTRICA DE ÁNGULOS CUADRANTALES

A.C. / R.T	0º	90º	180º	270º	360º
Sen	0	1	0	– 1	0
Cos	1	0	– 1	0	1
Tan	0	∫	0	∫	0
Cot	∫	0	∫	0	∫
Sec	1	∫	– 1	∫	1
Csc	∫	1	∫	– 1	∫

Trigonometría

EJERCICIOS

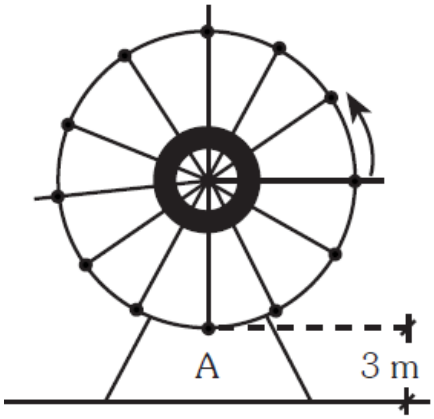
1. En la figura, se muestra la posición inicial de un vagón ubicado en el punto A sobre una ruleta de radio 5 m. En un instante dado, la altura del punto A sobre el suelo está determinado por $h(t)=8-5\cos(\pi t)$ en metros, donde t es el tiempo en minutos. ¿A qué altura se encontrará el punto A respecto al suelo después de $\left(\frac{28}{3}\right)$ minutos?

A) 12,5 m

B) 12 m

C) 10 m

D) 10,5 m



Solución:

Tenemos

$$h\left(\frac{28}{3}\right)=8-5\cos\left(\frac{28\pi}{3}\right)=8-5\cos\left(9\pi+\frac{\pi}{3}\right)=8-5\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=8+5\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ h\left(\frac{28}{3}\right)=10{,}5\text{ m}$$

Rpta.: D

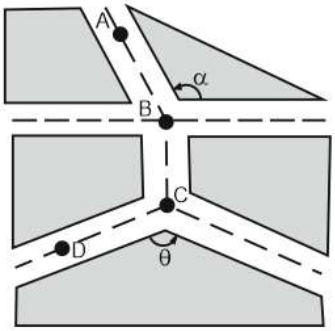
2. Juan se encuentra en el punto A y se dirige hacia el punto D pasando por los puntos B y C tal que $AB=BC=CD$. Si la distancia del punto C hasta el punto D está dado por el valor de la expresión $\left(\frac{42\cot(\theta)\sec(\alpha+\theta+30°)}{\csc(\theta-180°)\cos(90°-\alpha)}+12\csc(\frac{\alpha+\theta}{3})\right)$ en metros, donde $\alpha+\theta=270°$, halle la longitud del recorrido que realizó Juan.

A) 96 m

B) 192 m

C) 288 m

D) 374 m



Solución:

Tenemos $\theta = 270° - \alpha \quad \wedge \quad \theta - 180° = 90° - \alpha$

Entonces $D_{CD} = \left(\dfrac{42\cot(270° - \alpha)\sec(270° + 30°)}{\csc(90° - \alpha)\cos(90° - \alpha)} + 12\csc(90°) \right)$ m

$$D_{CD} = \left(\frac{42\tan(\alpha)\left[\csc(30°)\right]}{\sec(\alpha)\text{sen}(\alpha)} + 12 \right) \text{ m} \quad \Rightarrow \quad D_{CD} = 96 \text{ m}$$

Por tanto, $\text{Recorrido}_{\text{Juan}} = 288$ m

Rpta.: C

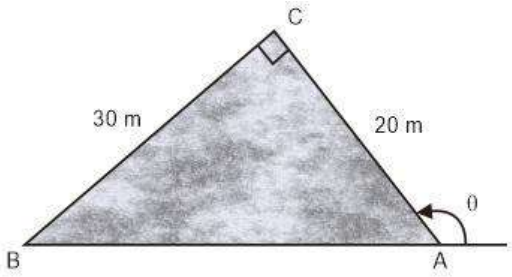
3. En la figura, se representa un terreno triangular ABC. Si el costo por metro cuadrado es $1300\left|\text{sen}\theta.\cos\theta\right|$ soles, halle el costo del terreno.

A) S/. 140.000

B) S/. 160.000

C) S/. 180.000

D) S/. 200.000



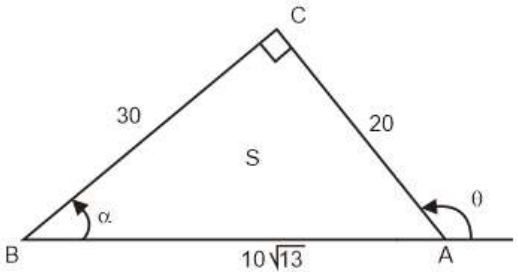
Solución:

Sea C el costo por metro cuadrado

Asi, $C = 1300\left|\text{sen}\theta.\cos\theta\right|$

De la figura $\theta = 90° + \alpha$

Luego $C = 1300\left|\text{sen}\left(90° + \alpha\right).\cos\left(90° + \alpha\right)\right|$



$$C = 1300\left|\left(\cos\alpha\right)\left(-\text{sen}\alpha\right)\right| \quad \Rightarrow \quad C = 1300\left|\left(\frac{30}{10\sqrt{13}}\right)\left(-\frac{20}{10\sqrt{13}}\right)\right| = 600$$

Entonces, el costo por metro cuadrado es 600 soles.

Veamos, sea $S = \text{Área}_{\triangle ABC}$ entonces $S = \dfrac{30(20)}{2} \quad \Rightarrow \quad S = 300\text{m}^2$

Por lo tanto, el costo del terreno es 180.000 soles.

Rpta.: C

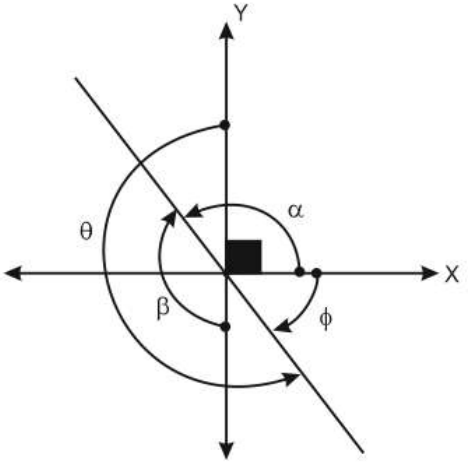
4. En la figura mostrada, calcule el valor de $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\alpha-\beta-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\phi+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\theta-\beta-\frac{\pi}{6}\right)}$

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

B) $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

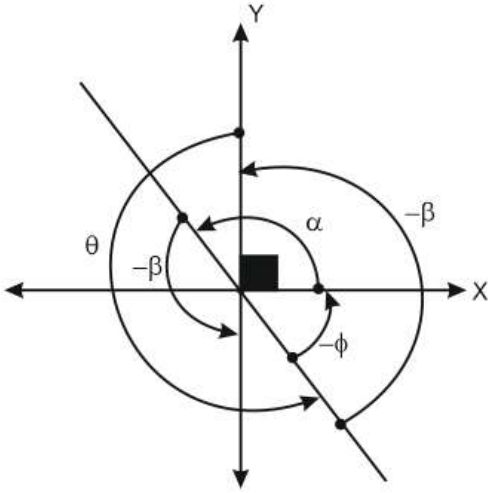
C) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$



Solución:

Del gráfico se tiene:



$$\alpha-\beta=270°$$
$$\alpha-\phi=180°$$
$$\theta-\beta=360°$$

Reemplazando en K tenemos:

$$K=\frac{\operatorname{sen}\left(270°-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(180°+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(360°-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$K=\frac{\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)} \Rightarrow K=\frac{\left[-\frac{1}{2}\right]\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\therefore \quad K=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Rpta.: B

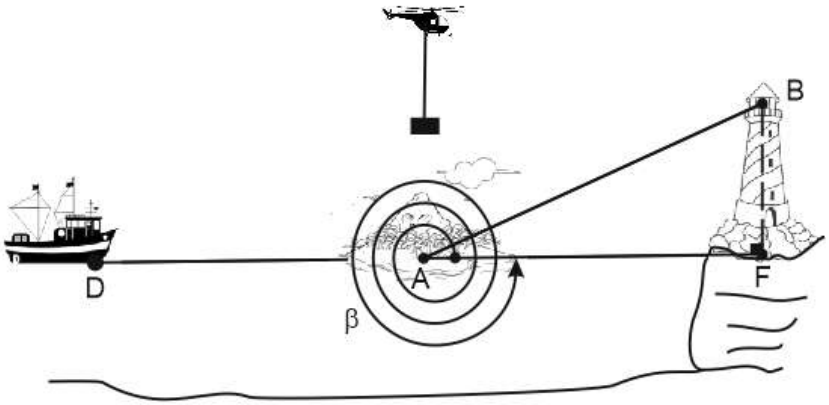
5. Un islote se encuentra equidistante de un barco pesquero anclado en el punto D y un faro portuario ubicado en F. En determinado instante aparece en escena un helicóptero, que se ubica a cierta altura sobre el islote, con la misión de proveer de vituallas al grupo de personas que van a realizar la instalación de un cable tenso AB tal y como se aprecia en la figura. Si un buzo ubicado en D observa el punto B con un ángulo de elevación de $\frac{100^g}{3}$, calcule el valor de $\text{sen}^2\left(\frac{13\pi}{2}-\beta\right)\text{ctg}^2\left(27\pi-\beta\right)$.

A) 12

B) 18

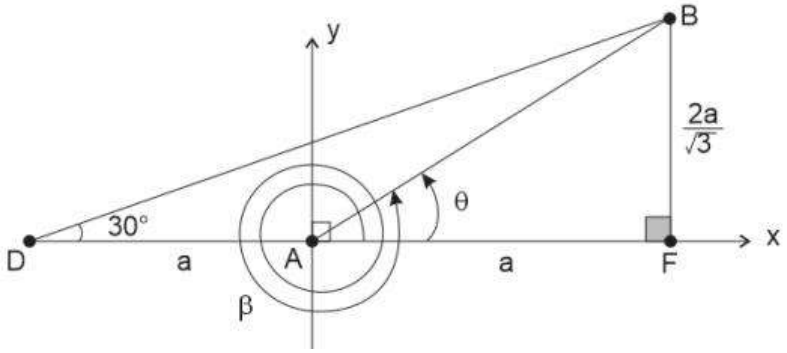
C) 15

D) 9



Solución:

1) La situación se puede sintetizar en el siguiente gráfico



2) Desde que A es punto equidistante se tiene AD=AF=a

3) El ΔDFB es notable de 30° y 60°, entonces $BF=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Por Teorema de Pitágoras en ΔAFB hace que $AB=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}a$

4) Los ángulos β y θ son coterminales $\Rightarrow$ $\text{ctg}\beta=\text{ctg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\wedge$ $\cos\beta=\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

5) Así, $\text{sen}^2\left(\frac{13\pi}{2}-\beta\right)\text{ctg}^2\left(27\pi-\beta\right)=\cos^2\beta\,\text{ctg}^2\beta=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{9}{28}$

$\therefore\ 28\text{sen}^2\left(\frac{13\pi}{2}-\beta\right)\text{ctg}^2\left(27\pi-\beta\right)=9$.

Rpta.: D

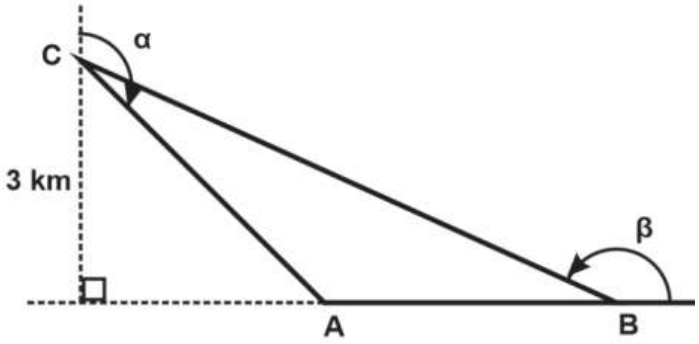
6. Dos automóviles parten al mismo tiempo de las ciudades A y B en dirección a la ciudad C con velocidades constantes de 50 km/h y 88 km/h respectivamente. Si $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ y $\tan\beta = -\frac{3}{8}$, halle el tiempo que le tomó al automóvil que llegó primero a la ciudad C.

A) $\frac{\sqrt{73}}{88}$ h

B) $\frac{1}{10}$ h

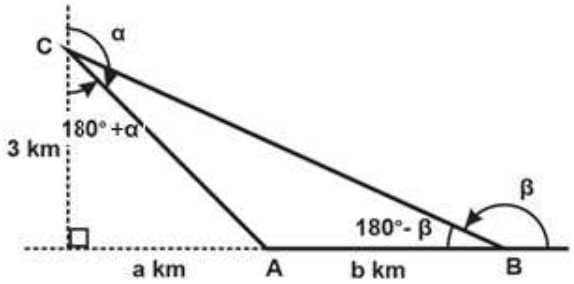
C) $\frac{1}{5}$ h

D) $\frac{\sqrt{73}}{10}$ h



<u>Solución</u>:

Del gráfico tenemos:



$$\text{tg}(180° + \alpha) = \frac{a}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\alpha = \frac{a}{3}$$

$$\text{tg}(180° - \beta) = \frac{3}{a+b} \quad \Rightarrow \quad -\text{tg}\beta = \frac{3}{a+b}$$

Como $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ y $\text{tg}\beta = -\frac{3}{8} \Rightarrow \quad a = 4; \quad b = 4$

Luego: $AC = 5\,\text{km}; \quad BC = \sqrt{73}\,\text{km} \quad \Rightarrow$

$$t_1 = \frac{1}{10}\,\text{h}; \quad t_2 = \frac{\sqrt{73}}{88}\,\text{h}$$

$$\therefore \; t_2 = \frac{\sqrt{73}}{88}\,\text{h}$$

Rpta.: A

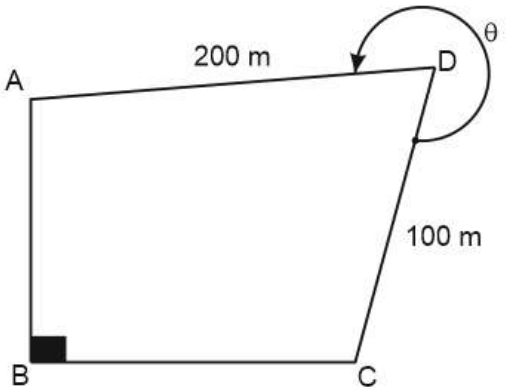
7. Dos hermanos heredan un terreno que tiene la forma cuadrangular ABCD, como se muestra en la figura. Para repartirse el terreno, ambos hermanos acuerdan dividirlo en dos partes triangulares y trazan una línea divisoria desde A hacia C tal que el área ADC es el doble del área ABC. Si $\cos\theta = \frac{4}{5}$, halle el mínimo perímetro del terreno cuadrangular ABCD.

A) $\left(4\sqrt{15}+300\right)$ m

B) $\left(20\sqrt{10}+300\right)$ m

C) $\left(40\sqrt{15}+300\right)$ m

D) $\left(40\sqrt{10}+300\right)$ m



<u>Solución</u>:

De la figura tenemos

$$\text{Area}_{\triangle ADC} = \frac{(100)(200)\,\text{sen}(360° - \theta)}{2} \quad \wedge \quad \text{Area}_{\triangle ADC} = a.b$$

$$ab = (100)(100)\left[-\text{sen}(\theta)\right]$$

Como $\cos\theta = \frac{4}{5}$ entonces $\text{sen}\theta = -\frac{3}{5}$

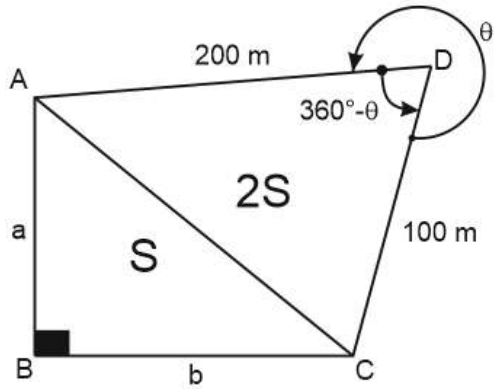
Luego

$$ab = 6000$$

$$\text{Perímetro}_{ABCD} = a + b + 300 \geq 2\sqrt{ab} + 300$$

$$\text{Perímetro}_{ABCD} \geq 40\sqrt{15} + 300$$

$$\therefore \text{Perímetro}_{min} = \left(40\sqrt{15}+300\right) \text{ m}$$



Rpta.: C

8. El ingreso diario de una empresa que produce y vende polos está modelado por $I(x) = 2\text{sen}\left(\frac{239\pi}{2} + \frac{x\pi}{4}\right) + 8\text{sen}\frac{5\pi}{2}$ miles de soles, donde $2 \le x \le 4$ (x en miles de soles) es la capital invertido para la producción de polos en un día. Determine el menor ingreso diario de dicha empresa.

A) S/. 6 000 B) S/. 1 500 C) S/. 2 000 D) S/. 8 000

<u>Solución</u>:

$$I(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{239\pi}{2} + \frac{x\pi}{4}\right) + 6\text{sen}\frac{5\pi}{2}$$

$$I(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x\pi}{4}\right) + 6 \quad \Rightarrow \quad I(x) = -2\cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) + 6$$

Como $2 \le x \le 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \le \frac{x\pi}{4} \le \pi$

$$\Rightarrow \quad -1 \le \cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) \le 0 \quad \Rightarrow \quad 6 \le 6 - 2\cos\left(\frac{x\pi}{4}\right) \le 8$$

$\therefore$ El minino ingreso es de S/.6 000

Rpta.: A

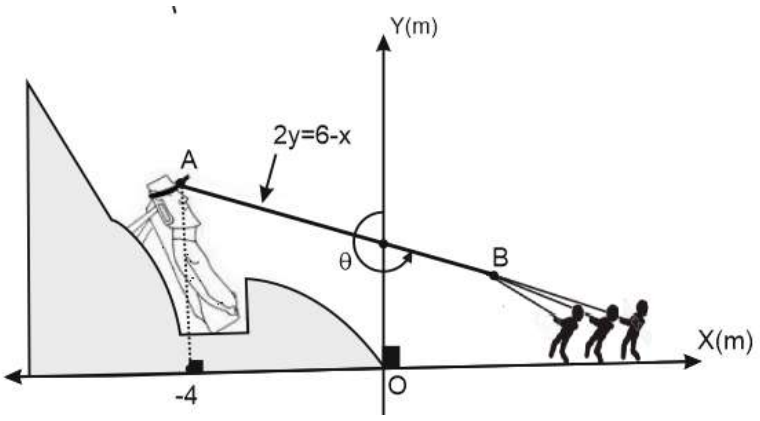
9. En la figura, se muestra el asentamiento de un Moái realizado por una comunidad nativa de la Isla de Pascua. Para realizar dicho asentamiento se necesita el 12 % de habitantes de una comunidad nativa. Si dicha comunidad tiene una población de $\left(-20\sqrt{5}\sec\theta(\cot\theta + \tan\theta)\right)$ habitantes, ¿cuántos habitantes se necesitan para dicho asentamiento?

A) 30 habitantes

B) 25 habitantes

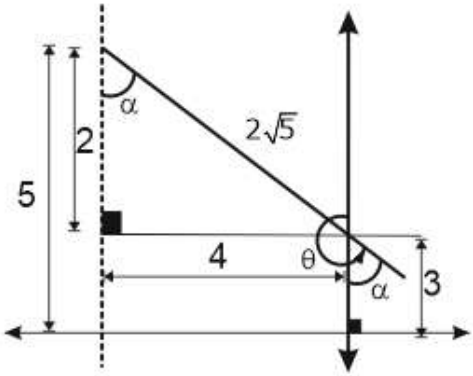
C) 45 habitantes

D) 20 habitantes



Solución:

Tenemos dela figura $\theta = 180° + \alpha$



Sea

$$P = -20\sqrt{5}\sec(180° + \alpha)\left(\cot(180° + \alpha) + \tan(180° + \alpha)\right)$$

$$= -20\sqrt{5}\left[-\sec(\alpha)\right]\left(\cot(\alpha) + \tan(\alpha)\right)$$

$$= -20\sqrt{5}\left[-\sqrt{5}\right]\left(\frac{1}{2} + 2\right)$$

$$= 250 \text{ habitantes}$$

Por tanto,

$$\text{Total} = (250)12\% \qquad \therefore \ \text{Total} = 30 \text{ habitantes}$$

Rpta.: A

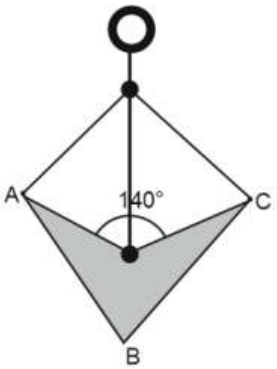
10. Elena hace un pedido a una joyería para comprar un par de aretes como se muestra en la figura para regalárselos a su sobrina en su cumpleaños. Si el precio por cada arete está dada por $P = \left(\dfrac{45\tan(A + 2C + 130°)\tan(B - C)}{3\csc(A + B + C - 50°)} + 24\right)$ soles donde B y C son ángulos agudos tales que $C < B$, ¿cuánto pago Elena por su pedido?

A) 39 soles

B) 36 soles

C) 78 soles

D) 72 soles



Solución:

Tenemos que: $A + B + C = 140°$

$$P = \left(\frac{45\tan(A + 2C + 130°)\tan(B - C)}{3\csc(A + B + C - 50°)} + 24\right) \text{ soles}$$

$$P = \left(\frac{45\tan(270° - (B - C))\tan(B - C)}{3\csc(90°)} + 24\right) \Rightarrow P = \left(15\cot(B - C)\tan(B - C) + 24\right)$$

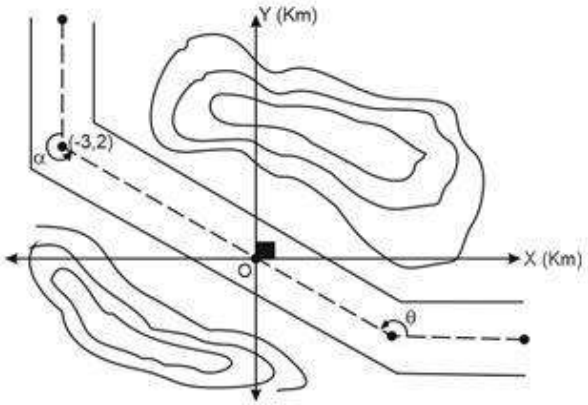
$$P = 39 \text{ soles}$$

Por tanto, $\text{Pago}_{\text{TOTAL}} = 78$ soles

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura se muestra el croquis de un tramo de la carretera interoceánica, donde α y θ son los ángulos adecuados considerados por los ingenieros encargados para su construcción. Si la construcción de dicho tramo tiene un costo de $(9\cot\alpha + 4\sqrt{13}\csc\theta)$ millones de soles, calcule el costo de dicho tramo.



A) 24 millones de soles

B) 28 millones de soles

C) 36 millones de soles

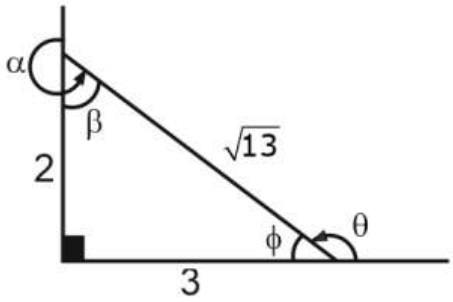
D) 32 millones de soles

Solución:

De la figura tenemos

$$\alpha = 180° + \beta \quad \wedge \quad \theta = 180° - \phi$$

Sea $\text{Costo} = (9\cot\alpha + 4\sqrt{13}\csc\theta)$



$$\begin{aligned}\text{Costo} &= 9\cot(180° + \beta) + 4\sqrt{13}\csc(180° - \phi)\\ &= 9\cot(\beta) + 4\sqrt{13}\csc(\phi)\\ &= 9\left(\frac{2}{3}\right) + 4\sqrt{13}\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\end{aligned}$$

$\therefore$ Costo $= 32$ millones de soles

Rpta.: D

2. El costo anual (en millones de soles) para incautar el P% (donde P es el número de grados en el sistema sexagesimal) de una droga ilegal está modelada por $C = 2^M$ dónde $M = \dfrac{\cos\left(\frac{33\pi}{4} - P\right)\csc\left(P - \frac{11\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{4} + P\right)\tan\left(\frac{23\pi}{2} - P\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - P\right)}$. ¿Cuánto será el costo si se incauta el 45% de la droga?

A) 1 millón B) 4 millones C) 8 millones D) 2 millones

Solución:

Hallando M

$$M=\frac{\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{4}-P\right)\left[-\csc\left(\frac{11\pi}{2}-P\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(4\pi+\frac{\pi}{4}+P\right)\tan\left(10\pi+\frac{3\pi}{2}-P\right)\operatorname{sen}P}\Rightarrow M=\frac{-\cos\left(\frac{\pi}{4}-P\right)\csc\left(6\pi-\frac{\pi}{2}-P\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+P\right)\tan\left(\frac{3\pi}{2}-P\right)\operatorname{sen}P}$$

$$M=\frac{\csc\left(\frac{\pi}{2}+P\right)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-P\right)\operatorname{sen}P}\quad\Rightarrow\quad M=\frac{\sec P}{\cot P\cdot\operatorname{sen}P}=\sec^2 P$$

Costo de la incautación: $C=2^{\sec^2 P}=2^{\sec^2(45°)}=2^{(\sqrt{2})^2}=2^2=4$ millones de soles

Rpta.: B

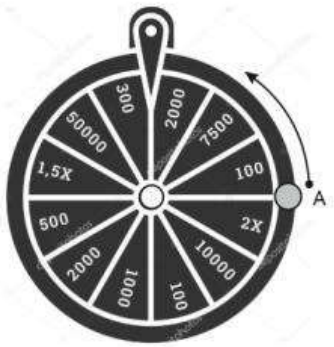
3. De la figura, se muestra una ruleta de juegos. Luis y Juan se disponen a jugar con dicha rueda, ambos giran la rueda tal como se muestra en la figura, generando los siguientes ángulos $\theta=\frac{52\pi}{3}\ \wedge\ \alpha=51\pi$, respectivamente, Finalizado el juego llega Miguel un amigo de ambos y pregunta al administrador ¿Quién ganó el premio mayor? Si la probabilidad de obtener el premio mayor está dada por $|\cos(x)|$ donde x es el ángulo de giro realizado por la ruleta, ¿Cuál es la respuesta que obtuvo Miguel del administrador?

A) Luis

B) Juan

C) Ambos

D) Ninguno de ellos



Solución:

Veamos primero la probabilidad de cada juego

Para Luis:

$$\text{Si } \theta=\frac{75\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad \text{Probabilidad}_{\text{LUIS}}=\left|\cos\left(\frac{75\pi}{2}\right)\right|=\left|\cos\left(36\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\right|=\left|\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right|=0$$

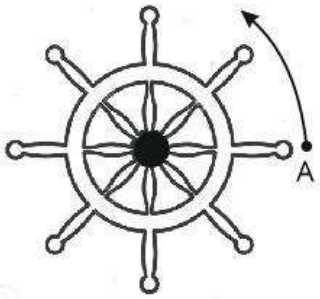
Para Juan:

$$\text{Si } \alpha=51\pi\quad\Rightarrow\quad \text{Probabilidad}_{\text{Juan}}=|\cos(51\pi)|=|\cos(50\pi+\pi)|=|\cos(\pi)|=1$$

Por tanto, el administrador le dijo gano Juan

Rpta.: B

4. El capitán de un velero trata de salir de un puerto para ese cometido gira el timón (como muestra en la figura) un ángulo $\alpha = \frac{37\pi}{10}$ rad, debido a una ola y por temor de ocasionar un choque, el capitán gira el timón rápidamente en sentido horario un ángulo $\beta = -\frac{43\pi}{10}$ rad saliendo del puerto satisfactoriamente. Si la distancia entre el velero y el puerto en ese instante está dado por $2 - \frac{\cos\beta \sec\alpha}{2 - \tan(\beta - \alpha)}$ en metros, halle dicha distancia.



A) 0,5 m B) 2 m

C) 3,5 m D) 1,5 m

<u>Solución</u>:

Primero veamos lo siguiente

$$\text{Si } \alpha = \frac{37\pi}{10} \quad \Rightarrow \quad \sec\left(\frac{37\pi}{10}\right) = \sec\left(4\pi - \frac{7\pi}{10}\right) = -\sec\left(\frac{7\pi}{10}\right) = \sec\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\text{Si } \beta = -\frac{43\pi}{10} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(-\frac{43\pi}{10}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\text{Así, distancia} = 2 - \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\sec\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{2 - \tan(8\pi)} = 2 - \frac{1}{2}$$

$\therefore$ distancia $= 1{,}5$ m

Rpta.: D

5. Luis tiene un terreno de forma rectangular el cual emplea para la siembra de maíz. Por motivos de las lluvias, las longitudes x e y (en kilómetros) de los lados del terreno, dependen de la variable t y están expresadas por las reglas de correspondencia:

$$x(t)=\frac{24}{\sqrt{\cot^2\left(\frac{97\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{9}}} \quad \wedge \quad y(t)=\frac{9\cot^2\left(\frac{97\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1}{36}$$, donde $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ es el tiempo transcurrido en años desde que se inicia la temporada de lluvias. Halle el área de la región a los 2 meses de iniciado la temporada de lluvias.

A) $2\sqrt{3}$ km^2 B) 4 km^2 C) $4\sqrt{3}$ km^2 D) 3 km^2

<u>Solución</u>:

Sea $S=\text{Area}_{\text{rectangular}}$

Entonces

$$S=\left(\frac{24}{\sqrt{\cot^2\left(\frac{97\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{9}}}\right)\left(\frac{9\left[\cot^2\left(\frac{97\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{9}\right]}{36}\right) \Rightarrow S=6\sqrt{\cot^2\left(\frac{97\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{9}}$$

Para $t=\frac{1}{6}$ año, entonces $S=6\sqrt{\cot^2\left(\frac{97\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{9}} \Rightarrow S=6\sqrt{\cot^2\left(8\pi+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{9}}$

Así, $S=6\sqrt{\cot^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{9}} \Rightarrow S=6\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}$

Por tanto, $S=4$ km^2

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. El seno del ángulo de giro de una rueda al dar una cantidad de vueltas menor a 10 vueltas y media , pero mayor a las 10 vueltas es igual a $\frac{1}{2}$. Determine el mayor ángulo de giro de la rueda.

A) $\frac{123\pi}{2}$ rad B) $\frac{125\pi}{3}$ rad C) $\frac{125\pi}{6}$ rad D) $\frac{121\pi}{5}$ rad

Solución:

Sea θ el ángulo de giro, tal que $20\pi < \theta < 21\pi$, y $\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$

$20\pi < \theta < 20\pi + \pi \rightarrow 0 < \theta - 20\pi < \pi$

Se sabe que

$$\frac{1}{2} = \text{sen}\theta = \text{sen}(\theta - 20\pi) \rightarrow \theta - 20\pi = \frac{\pi}{6} \vee \theta - 20\pi = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \theta = \frac{121\pi}{6} \vee \theta = \frac{125\pi}{6}$$

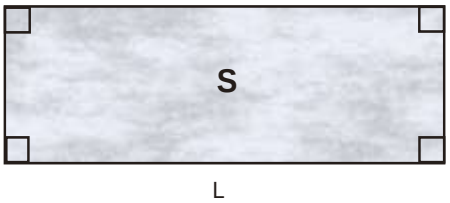
Rpta.: C

2. Un terreno de forma rectangular tiene $\left(3\sqrt{6}\sec 225°\cot 150°\right)$m de ancho y $\left(80\text{sen}210°\tan 315°\right)$m de largo. Calcule el área de dicho terreno.

A) 500 m^2 B) 560 m^2 C) 620 m^2 D) 720 m^2

Solución:

Sea A el ancho y L el largo:



$A = 3\sqrt{6}\sec 225°\cot 150°$

$A = 3\sqrt{6}\sec\left(180° + 45°\right)\cot\left(180° - 30°\right)$

$A = \left(-\sec 45°\right)\left(-\cot 30°\right)$

$A = 3\sqrt{6}\left(-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right)$

$A = 18 \qquad \ldots(1)$

$L = 80\text{sen}210°\text{tg}315°$

$L = 80\text{sen}\left(180° + 30°\right)\tan\left(360° - 45°\right)$

$L = 80\left(-\text{sen}30°\right)\left(-\tan 45°\right)$

$L = 80\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)$

$L = 40 \qquad \ldots(2)$

Si S es el área del terreno, entonces : S=L.A

$$S = (18)(40)$$
$$S = 720\,m^2.$$

Rpta.: D

3. Roy tiene 320 soles, gasta cierta cantidad de dinero y le queda

$$(\text{sen}5° + \text{sen}10° + \text{sen}15° + ... + \text{sen}345° + \text{sen}350° + \text{sen}355°)\text{soles}\ .$$

¿Cuánto gastó Roy?

A) 130 soles B) 320 soles C) 325 soles D) 300 soles

<u>Solución</u>:

M = sen5° + sen10° + sen15° +… + sen(360°-15°) + sen(360°-10°) + sen(360°-5°)
M = sen5° + sen10° + sen15° +… - sen15° - sen10° - sen5°
La cantidad de sumandos:
sen5.1° + sen5.2° + sen5.3° + sen5.4° + …+ sen5.71°
El termino central: $\text{sen}\left(\dfrac{355° + 5°}{2}\right) = \text{sen}180° = 0$
Por tanto Roy gastó los 320 soles.

Rpta.: B

4. Si A, B y C, representan los vértices de un triángulo, simplifique

$$\frac{\sec\left(\dfrac{A+C}{2}\right)\cos(2A+3B+2C)+\csc\dfrac{B}{2}\cot(A+B)}{\csc\dfrac{B}{2}\left[\cos(A+2B+C)+\cot(A+B+2C)\right]}$$

A) –1 B) $\csc\left(\dfrac{B}{2}\right)$ C) $\tan\left(\dfrac{B}{2}\right)$ D) 1

<u>Solución</u>:

Sea $A+B+C=180° \rightarrow 2A+2B+2C=360° \ \wedge \ \dfrac{A+C}{2} = 90° - \dfrac{B}{2}$

$$\frac{\sec\left(\dfrac{A+C}{2}\right)\cos(2(A+B+C)+B)+\csc\dfrac{B}{2}\cot(A+B)}{\csc\dfrac{B}{2}\left[\cos((A+B+C)+B)+\cot((A+B+C)+C)\right]}$$

$$=\frac{\sec\left(90°-\frac{B}{2}\right)\cos(360°+B)+\csc\frac{B}{2}\cot(180°-C)}{\csc\frac{B}{2}\left[\cos(180°+B)+\cot(180°+C)\right]}$$

$$=\frac{\csc\frac{B}{2}(\cos B-\cot C)}{\csc\frac{B}{2}\left[-\cos B+\cot C\right]}=-1$$

Rpta.: A

5. De las siguientes proposiciones, indique el valor de verdad, en el orden indicado.

I. $\text{sen}(\pi-x)=\text{sen}x$

II. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\text{sen}x$

III. $\tan(\pi+x)=\tan x$

IV. $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cot x$

V. $\sec(\pi+x)=\sec x$

A) VVVVF B) VFVFV C) FFFFV D) FVFVF

Solución:

$\underbrace{\text{sen}(\pi-x)}_{\text{IIQ,sen}x}=\text{sen}x$ ..... (V)

$\underbrace{\cos(\frac{3\pi}{2}-x)}_{\text{IIIQ;}-\text{sen}x}=-\text{sen}x$ ..... (V)

$\underbrace{\tan(\pi+x)}_{\text{IIQ;}+\tan x}=\tan x$ ..... (V)

$\underbrace{\tan(\frac{3\pi}{2}-x)}_{\text{IIIQ;}+\cot x}=\cot x$ ..... (V)

$\underbrace{\sec(\pi+x)}_{\text{IIIQ;}-\sec x}=\sec x$ ..... (F)

Rpta.: A

6. La tasa de crecimiento anual de la población de una ciudad (en miles) está dada por $\dfrac{\text{sen}(3x+y)+\cos(5x+2y)}{\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}$, donde $4x+2y=3\pi$. ¿En cuánto aumentará la población en 10 años?

A) 20 mil B) 30 mil C) 15 mil D) 18 mil E) 12 mil

Solución:

Si $4x+2y=3\pi \Rightarrow y=\dfrac{3\pi}{2}-2x$,luego:

$$P=\frac{\text{sen}(3x+y)+\cos(5x+2y)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}=\frac{\text{sen}\left(3x+3\frac{\pi}{2}-2x\right)+\cos(5x+3\pi-4x)}{-\cos x}$$

$$P=\frac{\text{sen}\left(3\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(3\pi+x)}{-\cos x}=\frac{-\cos x-\cos x}{-\cos x}=2$$

Entonces:

El crecimiento anual es: 2 mil personas.

El crecimiento en 10 años será de 20 mil personas.

Rpta.: A

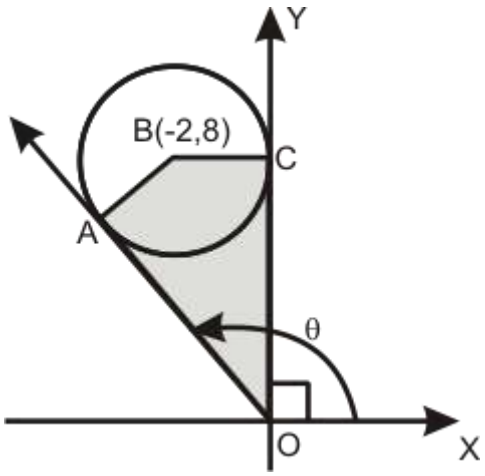
7. En la figura, en el punto O está ubicado un teodolito con el cual se registran los puntos A, B y C, donde B es el centro de la circunferencia; A y C son punto de tangencia. El topógrafo determinó que cercar la región limitado por el cuadrilátero OABC cuesta $(4\cos\theta+\text{sen}\theta+3)$ miles de soles. Si dicho monto se pagará en dos partes iguales, ¿a cuánto corresponde el primer pago?

A) S/. 2000

B) S/. 1500

C) S/. 1000

D) S/. 800

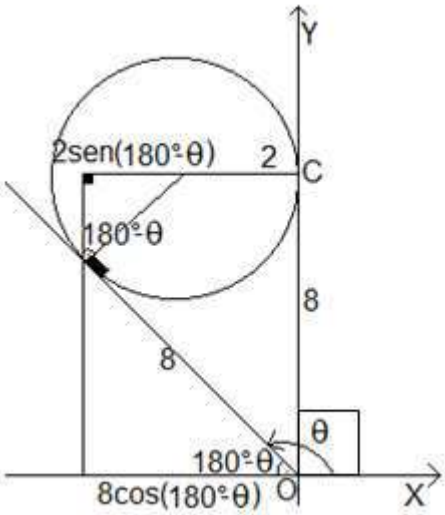


Solución:

Del gráfico:

$$8\cos(180° - \theta) = 2 + 2\text{sen}(180° - \theta)$$
$$-8\cos\theta = 2 + 2\text{sen}\theta$$
$$0 = 1 + \text{sen}\theta + 4\cos\theta$$
$$2 = 3 + \text{sen}\theta + 4\cos\theta$$

$\therefore$ La primera cuota es S/.1000.00



Rpta.: C

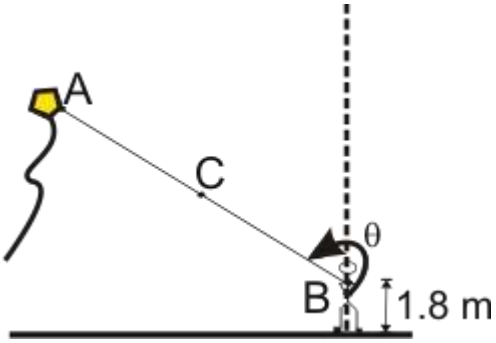
8. Juan vuela su cometa tal como se muestra en la figura, donde C es el punto medio de $\overline{AB}$. El hermano de Juan está ubicado en la proyección ortogonal del punto C con respecto al suelo. Si $\csc\theta = -\sqrt{5}$ y la altura alcanzada por el cometa respecto al piso en el punto A es 4,2 m, halle la distancia entre Juan y su hermano.

A) 1,2 m

B) 0,8 m

C) 1m

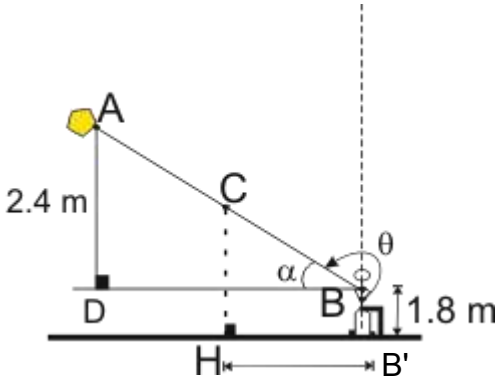
D) 0,6 m



Solución:

En la figura tenemos que

$$\theta + \alpha = \frac{3\pi}{2}$$
$$\csc\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sqrt{5}$$
$$\sec\alpha = \sqrt{5}$$



Luego

$DB = 1.2$ m, Como C es punto medio $\therefore HB' = 0.6$ m

Rpta.: D

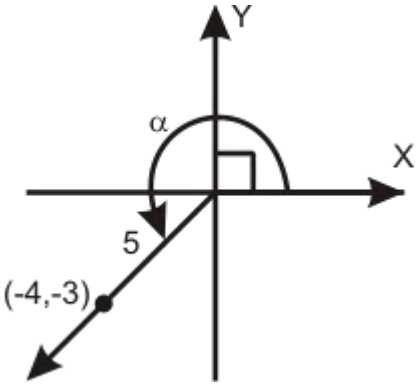
9. Si α pertenece al tercer cuadrante y $\text{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$, calcule el valor de

$$\frac{\tan(\alpha+180°)+\sec(\alpha-180°)}{\csc(90°+\alpha)+\cot(270°-\alpha)}.$$

A) -4 B) 4 C) 8 D) 6

Solución:

$$\frac{\tan(\alpha+180°)+\sec(\alpha-180°)}{\csc(90°+\alpha)+\cot(270°-\alpha)} = \frac{\tan\alpha-\sec\alpha}{\sec\alpha+\tan\alpha} = \frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}} = -4$$



Rpta.: A

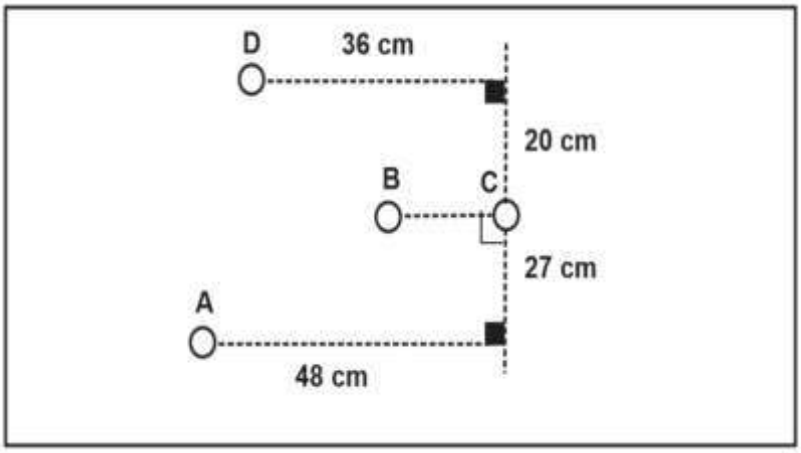
10. En un juego de billar (las trayectorias seguidas por las bolas son rectilíneas) se lanza la bola A en dirección a la bola B, luego del impacto la bola A y B se direccionan hacia las bolas D y C respectivamente. Si la distancia entre las bolas B y C es 12 cm, calcule la suma del seno del ángulo obtuso formado por la dirección inicial de la bola A con la dirección que toma B después del choque y la tangente del ángulo obtuso formado por las direcciones de las bolas A y B después del choque.

A) $-\frac{7}{30}$

B) $-\frac{7}{36}$

C) $\frac{5}{24}$

D) $-\frac{1}{7}$



Solución:

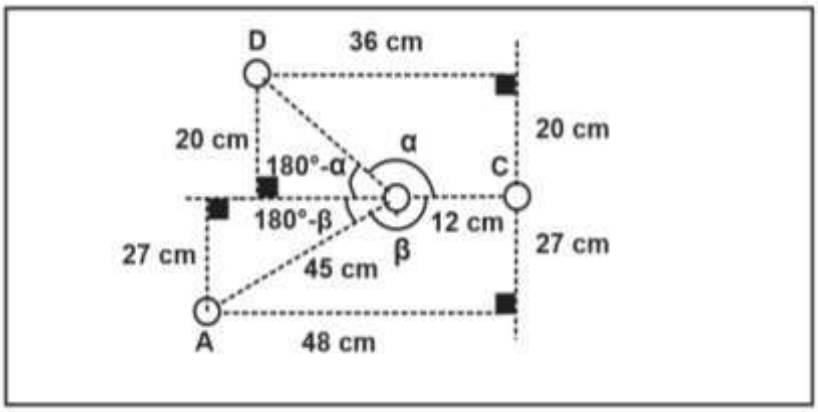
Del gráfico:

$$\text{sen}(180° - \beta) = \frac{27}{45}$$

$$\rightarrow \quad \text{sen}\beta = \frac{3}{5}$$

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{20}{24}$$

$$\rightarrow \quad \tan\alpha = -\frac{5}{6}$$



$$\therefore \ \text{sen}\beta + \tan\alpha = -\frac{7}{30}$$

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

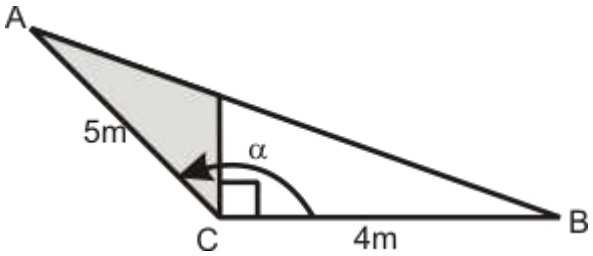
1. En la figura se representa un terreno triangular ABC, donde la parte sombreada, corresponde al área de construcción de un jardín. Calcule el costo del terreno que corresponde al jardín si el costo por metro cuadrado es de $(4 - 5\cos\alpha)$ soles.

A) $-50.\text{sen}\alpha.\cot\alpha$ soles

B) $-50.\text{sen}\alpha.\cos\alpha$ soles

C) $-20.\text{sen}\alpha.\cos\alpha$ soles

D) $-30.\sec\alpha.\csc\alpha$ soles



Solución:

Por la semejanza, de los triángulos tenemos:

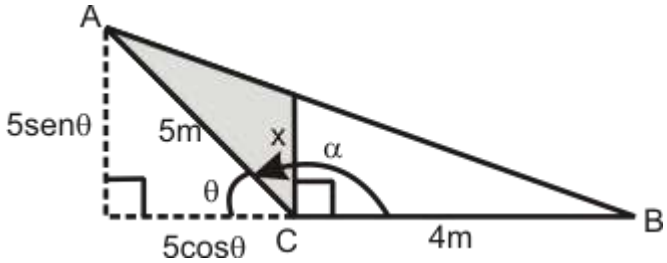
$$\frac{5\text{sen}\theta}{5\cos\theta+4}=\frac{x}{4}\rightarrow x=\frac{20\text{sen}\theta}{5\cos\theta+4}$$

El área de la región sombreada es:

$$S=\frac{1}{2}(5\cos\theta)\frac{20\text{sen}\theta}{5\cos\theta+4}=\frac{50\text{sen}\theta\cos\theta}{5\cos\theta+4}$$

Además

$$\alpha+\theta=180°\rightarrow \text{sen}\alpha=\text{sen}\theta\wedge-\cos\alpha=\cos\theta$$



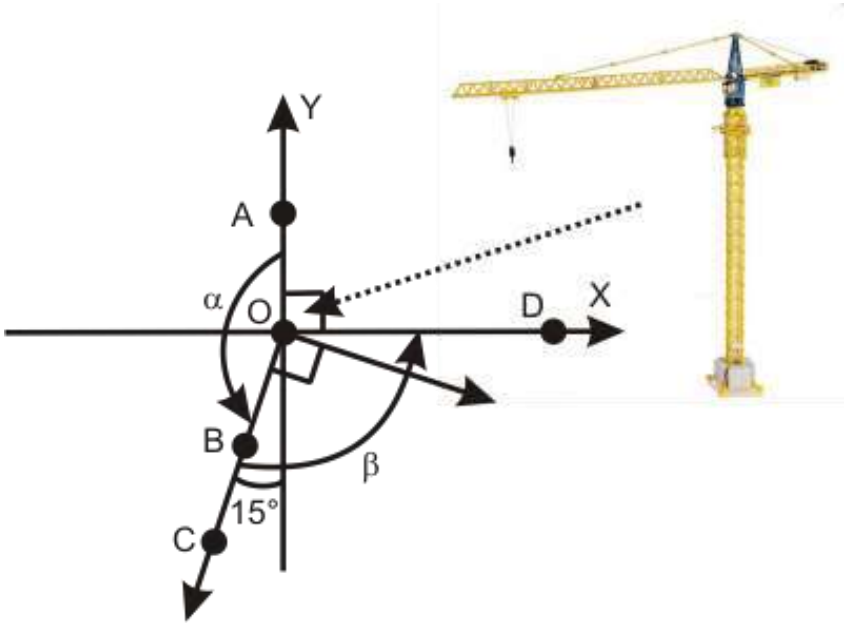
Luego el área $S=\dfrac{50\text{sen}\alpha\cos\alpha}{5\cos\alpha-4}$

Si por cada metro cuadrado de terreno cuesta $4-5\cos\alpha$ soles.

El terreno que corresponde al jardín cuesta $-50\text{sen}\alpha\cos\alpha$ soles.

Rpta.: B

2. En la figura se representa la vista desde lo alto de un drone cuando vuela por encima de una torre grúa ubicado en el punto O, éste gira su brazo en sentido antihorario formando un ángulo llevando una carga del punto A al punto B, luego estira su brazo recogiendo otra carga en el punto C llevándola hasta el punto D. Si la cantidad de gasolina en galones que la grúa consume es igual a la suma de los senos de los ángulos de giro que realiza la grúa, ¿Cuántos galones de gasolina consumió la grúa?



A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ galones B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ galones C) $3\sqrt{2}$ galones D) $4\sqrt{3}$ galones

Solución:

De la figura, tenemos que:

$$\alpha+15°=180°\rightarrow\alpha=180°-15°$$

$$\text{sen}\alpha=\text{sen}(180°-15°)=\text{sen}15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\beta - 15° = 90° \rightarrow \beta = 90° + 15°$

$\text{sen}\beta = \text{sen}(90° + 15°) = \cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Luego: La Grúa consume $\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ galones.

Rpta.: B

3. Indique el valor de verdad en el orden indicado de las siguientes proposiciones:

i. Se cumple que $\tan\left(2020\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cot\left(3015\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$

ii. Si $\alpha + \beta = 3\pi$ entonces $\text{sen}\alpha + \cos\beta = \text{sen}\beta - \cos\alpha$.

iii. Si α es coterminal a β entonces

$$\sec\left(\alpha - \beta + \frac{5\pi}{12}\right) + \tan\alpha \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = \sqrt{6}\,.$$

A) VVV B) VFV C) FFV D) FVF

<u>Solución</u>:

i.

$\tan\left(2020\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cot\left(3015\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (Verdad).

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

ii.

$\alpha + \beta = 3\pi$

$\rightarrow \alpha = 3\pi - \beta \rightarrow \text{sen}\alpha = \text{sen}(3\pi - \beta) = \text{sen}(\pi - \beta) = \text{sen}\beta$

$\rightarrow \alpha = 3\pi - \beta \rightarrow \cos\alpha = \cos(3\pi - \beta) = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$

$\text{sen}\alpha + \cos\alpha = \text{sen}\beta - \cos\beta$

$\text{sen}\alpha + \cos\beta = \text{sen}\beta - \cos\alpha$ (Verdad)

$$\sec\left(\alpha - \beta + \frac{5\pi}{12}\right) + \tan\alpha \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$$

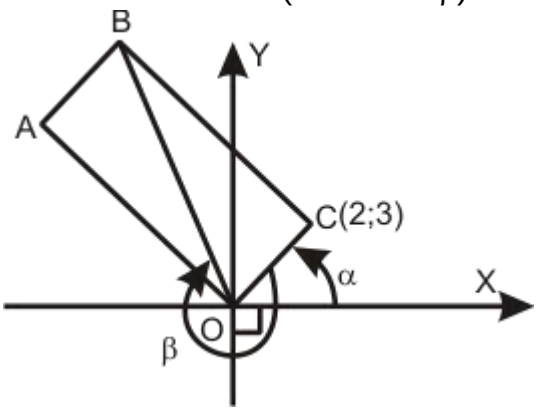
iii. $\alpha - \beta = 360°$ entonces $\sec\left(2n\pi + \dfrac{5\pi}{12}\right) - \sqrt{2}\tan\alpha\left(-\cot\beta\right)$

$$\sec\frac{5\pi}{12} + \sqrt{2}\tan\alpha\cot\alpha = \sec 75° + \sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{6}$$

(Verdad)

Rpta.: A

4. En la figura se representa un rectángulo ABCO, cuyo largo es el doble de su ancho, determine el valor de $\tan(270° - \alpha) + \dfrac{\text{sen}(540° + \alpha + \beta)}{\text{sen}(270° + \alpha + \beta)}$



A) $\dfrac{13}{12}$ B) $-\dfrac{13}{5}$ C) $\dfrac{7}{12}$ D) $-\dfrac{13}{12}$

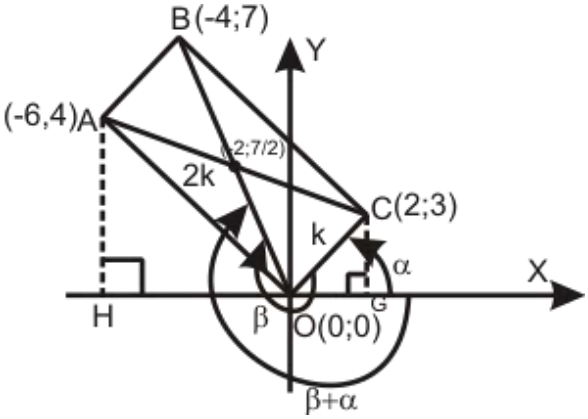
Solución:

$$\tan(270° - \alpha) + \frac{\text{sen}(540° + \alpha + \beta)}{\text{sen}(270° + \alpha + \beta)}$$

$$= \cot\alpha + \frac{\text{sen}(180° + \alpha + \beta)}{\text{sen}(270° + \alpha + \beta)}$$

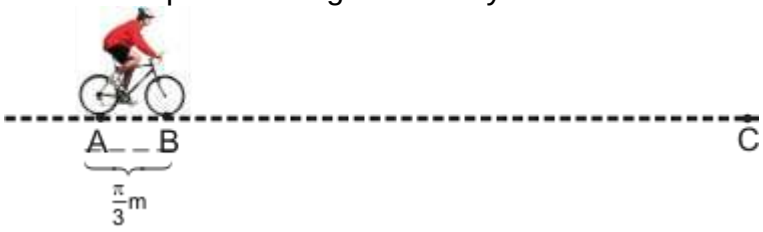
$$= \cot\alpha + \frac{-\text{sen}(\alpha + \beta)}{-\cos(\alpha + \beta)}$$

$$= \cot\alpha + \tan(\alpha + \beta) = \frac{2}{3} + \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{13}{12}$$



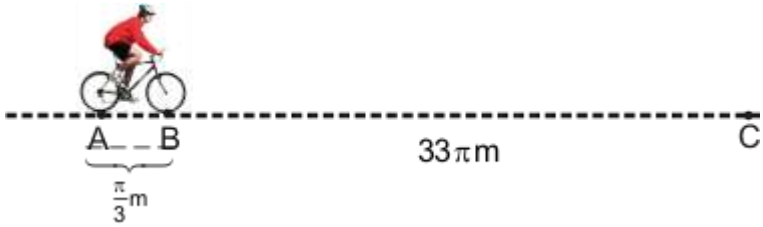
Rpta.:D

5. En la figura A y B, representan los puntos de contacto de las ruedas de una bicicleta con el suelo. Un día Thiago va manejando su bicicleta hasta que la rueda trasera pasa por el punto C, recorriendo 33π metros. Si las calorías perdidas por Thiago al manejar por dicho tramo son $(2000+7\cos\theta)$ calorías, donde θ es el ángulo de giro de la rueda, y los radios de las ruedas miden 20 centímetros cada una, ¿cuántas calorías perdió Thiago en el trayecto?



A) 166 cal B) 165 cal C) 170 cal D) 180 cal

Solución:



$$n_v = \frac{Lc}{2\pi r} = \frac{33\pi + \frac{\pi}{3}}{2\pi(0,2)} = \frac{\frac{100\pi}{3}}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{500}{6} = \frac{250}{3} \text{ vueltas}$$

El ángulo de giro es entonces: $\theta = \frac{250}{3}(2\pi) = \frac{500}{3}\pi = 166\pi + \frac{2\pi}{3}$

Las calorías que se quemaron son:

$$200 + 70\cos\left(166\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = 200 + 70\cos\frac{2\pi}{3} = 200 - 35 = 165$$

Thiago quemó 165 calorías.

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $J = \text{sen}540^\circ + \cos 2520^\circ + \text{sen}810^\circ$ y $P = \cos 1440^\circ + \text{tg}540^\circ - \cos 630^\circ$, determine el valor de la razón $\frac{J}{P}$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) –3

Solución:

$$R = \frac{J}{P} = \frac{\text{sen}540^\circ + \cos 2520^\circ + \text{sen}810^\circ}{\cos 1440^\circ + \text{tg}540^\circ - \cos 630^\circ} = \frac{\text{sen}(1V + 180^\circ) + \cos(7V + 0^\circ) + \text{sen}(2V + 90^\circ)}{\cos(4V + 0^\circ) + \text{tg}(1V + 180^\circ) - \cos(1V + 270^\circ)}$$

$$R = \frac{J}{P} = \frac{\text{sen}(180^\circ) + \cos(0^\circ) + \text{sen}(90^\circ)}{\cos(0^\circ) + \text{tg}(180^\circ) - \cos(270^\circ)} = \frac{0 + 1 + 1}{1 + 0 - 0} = 2$$

Rpta.: C

2. De los ángulos α, β y θ se sabe que:

I. Son cuadrantales diferentes, positivos y menores o iguales a 360°
II. $\sqrt{1 - \text{sen}\alpha} + \sqrt{\text{sen}\alpha - 1} = 1 + \cos\beta$
III. $\sqrt{\sec\beta + 2} = |\text{ctg}\theta + 1|$

Halle $\alpha - \beta + \theta$

A) 180° B) 540° C) 90° D) 360° E) 130°

Solución:

$1 - \text{sen}\alpha \geq 0 \quad \wedge \quad \text{sen}\alpha - 1 \geq 0 \rightarrow \text{sen}\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 90^\circ$
$1 + \cos\beta = 0 \rightarrow \cos\beta = -1 \rightarrow \beta = 180^\circ$
$|\text{ctg}\theta + 1| = 1 \rightarrow \text{ctg}\theta = 0 \vee \text{ctg}\theta = -2 \rightarrow \theta = 270^\circ$
$\alpha - \beta + \theta = 180^\circ$

Rpta.: A

3. Reducir la expresión $-\frac{\text{sen}(\frac{3\pi}{2} - x)}{\cos(2\pi - x)} - \frac{\text{tg}(\pi + x)}{\text{ctg}(\frac{\pi}{2} + x)} - \frac{\sec(2\pi - x)}{\csc(\frac{3\pi}{2} - x)}$

A) –1 B) 1 C) –2 D) 2 E) 3

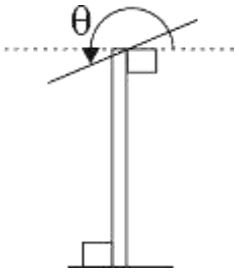
Solución:

$$K=-\frac{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}-x)}{\cos(2\pi-x)}-\frac{\operatorname{tg}(\pi+x)}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+x)}-\frac{\sec(2\pi-x)}{\csc(\frac{3\pi}{2}-x)}$$

$$K=-\frac{-\cos x}{\cos x}-\frac{\operatorname{tg}x}{-\operatorname{tg}x}-\frac{\sec x}{-\sec x}=1+1+1=3$$

Rpta.: E

4. Una empresa de telecomunicaciones construye una antena de telefonía celular que tiene la forma indicada en la figura. Si la frecuencia de la onda emitida está dada por $F=\left[\sqrt{\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\left(\frac{169\pi}{2}+\theta\right)}+\sqrt{-1+\operatorname{ctg}(218\pi+\theta)\operatorname{tg}^2\theta}\right]\text{Hz}$. Halle el máximo valor de $\operatorname{tg}\theta$



A) $-\sqrt{3}$
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) $-\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{3}$

Solución:

i) $F=\sqrt{\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\left(42V+\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\sqrt{-1+\operatorname{ctg}(104V+\theta)\operatorname{tg}^2\theta}$

$$F=\sqrt{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\theta}+\sqrt{-1+\operatorname{ctg}\theta\operatorname{tg}^2\theta}=\sqrt{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\theta}+\sqrt{-1+\operatorname{tg}\theta}$$

ii) F existe $\Leftrightarrow$ $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\theta\geq 0 \;\wedge\; -1+\operatorname{tg}\theta\geq 0 \;\wedge\; \exists\operatorname{tg}\theta$

$\operatorname{tg}\theta=\sqrt{3}$, positivo en IQ y IIIQ

Rpta.: C

5. Los números que representan la medida del largo y ancho, respectivamente, de una placa rectangular es A y B y si $A=\operatorname{sen}120^\circ\cos 240^\circ\operatorname{tg}300^\circ$ y $B=\sec 225^\circ$. Si $F=\frac{A}{B}$, hallar el valor de $8F$

A) $3\sqrt{5}$ B) $-3\sqrt{3}$ C) $-2\sqrt{3}$ D) $-3\sqrt{2}$ E) $-3\sqrt{7}$

Solución:

$$F=\frac{\text{sen}120^o\cos 240^o\,\text{tg}300^o}{\sec 225^o}\Rightarrow F=\frac{\text{sen}(90^o+30^o)\cos(270^o-30^o)\text{tg}(360^o-60^o)}{\sec(270^o-45^o)}$$

$$F=\frac{\cos 30^o(-\text{sen}30^o)(-\text{tg}60^o)}{-\csc 45^o}\Rightarrow F=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2})(-\sqrt{3})}{-\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{8}\Rightarrow 8F=-3\sqrt{2}$$

Rpta.: D

6. Una ruleta de casino es girada partiendo del eje horizontal positivo y en sentido horario, deteniéndose luego de girar un ángulo $\theta=-\frac{1287\pi}{4}$. Si la pelotita negra se ubica a $\frac{\pi}{6}$ de la posición inicial (eje positivo), calcule $\cos\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)$.

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

D) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

E) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

Solución:

$$E=\cos\left(-\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos(\frac{1287\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\left(160V+\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(5\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(75^o\right)\text{ Entonces } E=\cos\left(75^o\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Rpta.: C

7. Se tiene un terreno ABCD que tiene la forma de una región cuadrangular, el vértice B tiene coordenadas (7,12). Si el precio del terreno está dado por la expresión $P=800\sqrt{193}\left|\text{sen}\theta+\cos\theta\right|$ en soles. ¿Cuál es el precio?

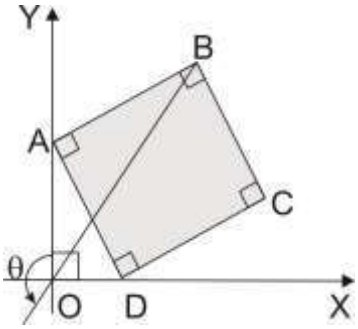
A) 1 000 soles

B) 2 000 soles

C) 3 000 soles

D) 4 000 soles

E) 5 000 soles



Solución:

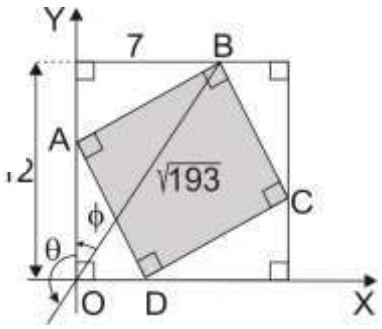
Se observa: $\phi+\theta=180°$ $P=800\sqrt{193}\left|\text{sen}\theta+\cos\theta\right|$

$P=800\sqrt{193}\left|\text{sen}(180°-\phi)+\cos(180°-\phi)\right|$

$P=800\sqrt{193}\left|\text{sen}\phi+(-\cos\phi)\right|$

$P=800\sqrt{193}\left|\dfrac{7}{\sqrt{193}}-\dfrac{12}{\sqrt{193}}\right|$

$P=4000$ soles



Rpta.: D

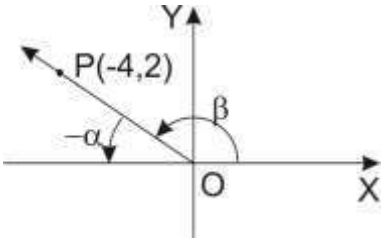
8. En un mapa del campus de la ciudad universitaria, en coordenadas rectangulares, el local del centro pre universitario se ubica en el lugar de coordenadas P (–4,2). Si α es el ángulo negativo que forma el rayo $\overrightarrow{OP}$ con el semieje negativo, calcule $\sqrt{5}(\cos\alpha-\csc\alpha)$

A) 7 B) 5 C) 8 D) 6 E) 9

Solución:

$\beta-\alpha=180^o \Rightarrow \cos(-\alpha)=\cos(180^o-\beta)=-\cos\beta$

$r=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5} \Rightarrow \cos\alpha=-\cos\beta=-\dfrac{x}{r}=-\dfrac{-4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$



También

$\csc(-\alpha)=\csc(180^0-\beta)=\csc\beta=\dfrac{r}{y}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

$\csc\alpha=-\sqrt{5} \Rightarrow E=\sqrt{5}(\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\sqrt{5})=7$

Rpta.: A

9. Indique el número de proposiciones que sean correctas:

i) $tg(90°+x)=ctgx$
ii) $ctg(270°+x)=tgx$
iii) $sec(180°+x)=-secx$
iv) $sen(180°-x)=senx$
v) $cos(90°+x)=senx$

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) Todas

Solución:

(i) (F) Por $tg(90° + x) = -ctgx$
(ii) (F) Por $ctg(270° + x) = -tgx$
(iii) (V) Por $sec(180° + x) = -secx$
(iv) (V) Por $sen(180° - x) = senx$
(v) (F) Por $cos(90° + x) = -senx$
Son correctas dos proposiciones

Rpta.: C

10. En el triángulo rectángulo ABC, $BD = m$, $DC = n$, halle el valor de $\frac{n^2}{m^2}$.

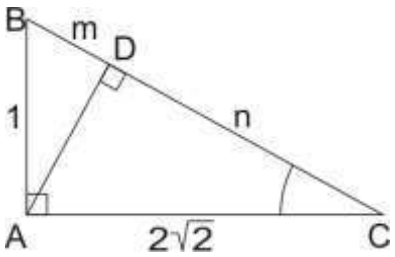
A) 8

B) 9

C) 16

D) 64

E) 81



Solución:

$BC = \sqrt{1 + (2\sqrt{2})} = 3$; $senC = \frac{1}{3} \wedge cos(90 - C) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Ley de proyecciones: $m = cos(90 - C) = senC = \frac{1}{3} \wedge n = 2\sqrt{2}\cos C = \frac{(2\sqrt{2})^2}{3}$

$F = \frac{n^2}{m^2} = 64$

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si α es la medida un ángulo en posición normal tal que: $sen\alpha < 0$, $cos\alpha > 0$, $R = sec^2\alpha$ y $tg\alpha = cos(17\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$. Halle el valor de $4R$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 4

Solución:

$\text{sen}\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in$ IIIQ ó IVQ
$\cos\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in$ IQ ó IVQ
$\Rightarrow \alpha \in \text{IVQ} \Rightarrow \text{tg}\alpha < 0$

$$\text{tg}\alpha = \cos(17\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \cos(4V + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = -\text{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha \Rightarrow R = 1 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow 4R = 7$$

Rpta.: C

2. Si $5\text{sen}\theta = 12\cos\theta$ θ es un ángulo agudo. Determinar el valor de $169\cos(\theta - 605\frac{\pi}{2})\text{sen}(\theta - 903\frac{\pi}{2})$

A) 10 B) 20 C) 60 D) 40 E) 50

Solución:

$$\cos(\theta - 605\frac{\pi}{2}) = \cos(605\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(151v + \frac{\pi}{2} - \theta) = \text{sen}\theta$$

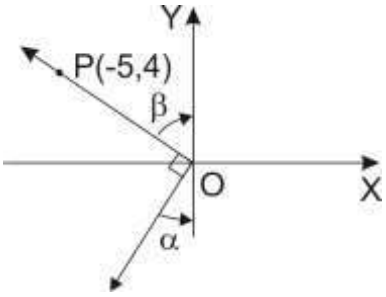
$$\text{sen}(\theta - 903\frac{\pi}{2}) = -\text{sen}(3\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$$

De $5\text{sen}\theta = 12\cos\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{12}{5}$; θ agudo $\in$ IQ $\Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{12}{13}$ y $\cos\theta = \frac{5}{13}$

$$E = 169\cos(\theta - 605\frac{\pi}{2})\text{sen}(\theta - 903\frac{\pi}{2}) = 169\text{sen}\theta\cos\theta = 169\frac{12(5)}{13(13)} = 60$$

Rpta.: C

3. Con la información dada en la figura, calcule el valor de $\sqrt{41}(\text{sen}\beta + \cos(1245\frac{\pi}{2} + \alpha))$.



A) -2
B) 5
C) -6
D) 4
E) -9

Solución:

Para P (-5,4) en $(90^o-\beta)$; $r=\sqrt{41}$

$\cos(90^o-\beta)=\text{sen}\beta=\dfrac{-5}{\sqrt{41}}$;

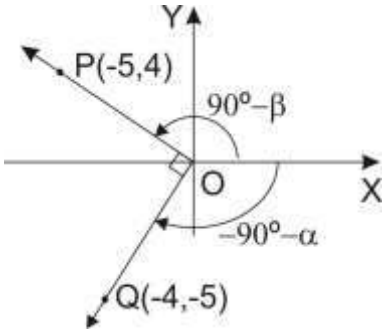
Para Q (-4,-5) en $(-90^o-\alpha)$; $r=\sqrt{41}$

$\cos(90^o+\alpha)=-\text{sen}\alpha=\dfrac{-4}{\sqrt{41}}\Rightarrow\ \text{sen}\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$

$E=\sqrt{41}[\text{sen}\beta+\cos(311V+\dfrac{\pi}{2}+\alpha)]$

$=\sqrt{41}[\text{sen}\beta+\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)]$

$E=\sqrt{41}(\text{sen}\beta-\text{sen}\alpha)=\sqrt{41}(\dfrac{-5}{\sqrt{41}}-\dfrac{4}{\sqrt{41}})=-9$



Rpta.: E

4. Daniela le dice a su padre que la cantidad de dinero que tiene ahorrado está representada mediante el cociente de A y B, siendo $A=640\text{sen}(\dfrac{49\pi}{6})\cos(2019\pi+\theta)$ y $B=2\text{sen}(\dfrac{203\pi}{2}+\theta)$ en soles. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado Daniela?

A) 160 soles B) 320 soles C) 240 soles
D) 120 soles E) 180 soles

Solución:

$$M=\frac{640\text{sen}(\frac{49\pi}{6})\cos(2019\pi+\theta)}{2\text{sen}(\frac{203\pi}{2}+\theta)}=\frac{640\text{sen}(4V+\frac{\pi}{6})\cos(1009V+\pi+\theta)}{2\text{sen}(50V+\frac{3\pi}{2}+\theta)}$$

$$M=\frac{640\text{sen}\frac{\pi}{6}(-\cos\theta)}{2(-\cos\theta)}$$

$M=160$

Rpta,: A

5. Reducir la expresión $\dfrac{\text{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\csc\left(\pi+\theta\right)}{\text{ctg}\left(540^o-\theta\right)\cos\left(810^o+\theta\right)\sec\left(1620^o-\theta\right)}$

A) 1 B) $\text{sen}^2\theta$ C) $\cos^2\theta$ D) $\text{tg}^2\theta$ E) $-\text{ctg}^2\theta$

Solución:

$$M=\frac{\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\csc\left(\pi+\theta\right)}{\operatorname{ctg}\left(540^{o}-\theta\right)\cos\left(810^{o}+\theta\right)\sec\left(1620^{o}-\theta\right)}$$

$$M=\frac{(-\cos\theta)(-\operatorname{ctg}\theta)(-\csc\theta)}{\operatorname{ctg}(1V+180^{o}+\theta)\cos(2V+90^{o}+\theta)\sec(4V+180^{o}-\theta)}$$

$$M=\frac{(-\cos\theta)(-\operatorname{ctg}\theta)(-\csc\theta)}{\operatorname{ctg}(180^{o}+\theta)\cos(90^{o}+\theta)\sec(180^{o}-\theta)}=\frac{-\cos\theta\operatorname{ctg}\theta\csc\theta}{\operatorname{ctg}\theta(-\operatorname{sen}\theta)(-\sec\theta)}=-\operatorname{ctg}^{2}\theta$$

Rpta,: E

Trigonometría

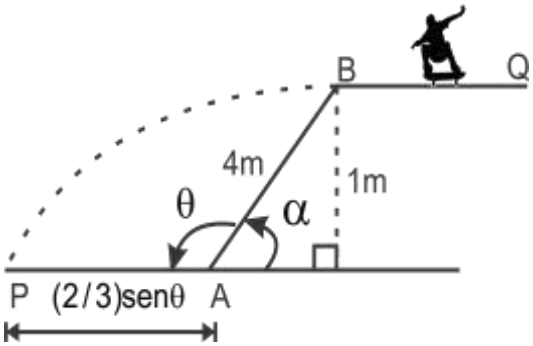
EJERCICIOS

1. Un joven realiza una acrobacia con su patineta iniciando en el punto Q y terminando en el punto P, como se muestra en la figura. Si $AB = BQ = 4m$, siendo $\overline{BQ}$ un camino rectilíneo tal que la medida de la altura con respecto a la superficie del suelo es 1m. Si la longitud $\overline{PA}$ es igual a $\left(\frac{2}{3}\text{sen}\theta\right)m$. Halle $\overline{PA}$

A) $\frac{1}{6}$ m B) $\frac{1}{8}$ m

C) 1 m D) $\frac{1}{4}$ m

E) $\frac{1}{2}$ m



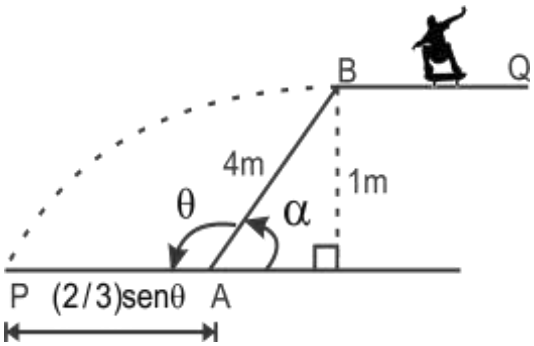
Solución:

De la figura $\theta + \alpha = 180^o$;

$\text{sen}\theta = \text{sen}(180^o - \alpha) = \text{sen}\alpha$;

$\text{sen}\theta = \frac{1}{4}$;

$PA = \frac{2}{3}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{6}m$



Rpta.: A

2. En la generación de corriente eléctrica alterna, se presentan las denominadas corrientes parásitas, que está representada por la expresión $I(\theta) = (\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta + 10)$ amperios y θ es positivo. Si el costo de operación del generador esta expresado por $C(\theta) = [5000 - 100\,I(\theta)]$ soles, siendo $C(\theta) > 0$, calcular el valor de $C(\pi/11)$.

A) S/ 6000 B) S/ 5000 C) S/ 4000 D) S/ 3000 E) S/ 3500

Solución:

Hallando $I(\frac{\pi}{11}) = \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + 10$

Ángulos suplementarios

$\frac{3\pi}{11} + \frac{8\pi}{11} = \frac{5\pi}{11} + \frac{6\pi}{11} = \pi$ Entonces $\cos\frac{8\pi}{11} = -\cos\frac{3\pi}{11}$; $\cos\frac{6\pi}{11} = -\cos\frac{5\pi}{11}$

Se tiene para I

$I(\pi/11) = 10A$, finalmente el costo es: $C(\pi/11) = [5000 - 100 \times 10] = 4000$ Soles

Rpta.: C

3. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $tg[(4532^2 + 1)\pi + \frac{\pi}{3}] = -\sqrt{3}$

II. Si α y β son ángulos coterminales entonces $\left|tg(\frac{\alpha - \beta}{4})\right| = 1$

III. Si θ y γ son ángulos en posición normal, talque $\theta - \gamma = 360^o n$, $n \in Z$, entonces $\cos^2\theta + sen^2\gamma = 1$

A) FFF B) VFV C) FFV D) VVF E) VFF

Solución:

I. $tg[(4532^2 + 1)\pi + \frac{\pi}{3}] = tg[4532^2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}] = tg[\pi + \frac{\pi}{3}] = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ **(F)**

II. Si α y β son coterminales $\alpha - \beta = 360^o n$, entonces $\frac{\alpha - \beta}{4} = 90^o n$, luego

$tg(\frac{\alpha - \beta}{4}) = tg(90^o n)$, si n=2 $tg(180^o) = 0$ **(F)**

III. Se cumple que $\theta = \gamma + 360^o n$, luego $\cos(\theta) = \cos(\gamma + 360^o n) = \cos\gamma$. Entonces $\cos^2\theta + sen^2\gamma = 1$ **(V)**

Rpta.: C

4. Un radar recoge la señal reflejada por un automóvil en movimiento. La diferencia (en megaciclos por segundo) entre la señal original y reflejada se obtiene a través de la siguiente expresión: $g(x)=\dfrac{f.\ \cos\left(\dfrac{27\pi}{2}+x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{37\pi}{2}+x\right)}$, donde f es la frecuencia de la señal original (megaciclos por segundo), x es el valor de la velocidad del automóvil en metros por segundo. Si un policía dirige el radar cuya frecuencia es 2 megaciclos por segundo y observa que la diferencia de frecuencias es $\sqrt{3}\sec x$ megaciclos por segundo, ¿cuál es el valor de la velocidad del automóvil?

A) $\dfrac{\pi}{3}$ m/s B) π m/s C) 2 m/s D) $\dfrac{\pi}{4}$ m/s E) 1 m/s

<u>Solución</u>:

$$(\sqrt{3}\sec x)\times 10^6\ \frac{\text{ciclos}}{\text{s}}=\frac{(2\times 10^6\ \frac{\text{ciclos}}{\text{s}})\cos(27\frac{\pi}{2}+x)}{\operatorname{sen}(37\frac{\pi}{2}+x)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sec x=\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+x)}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\ ;\ \operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\ \text{Entonces}\ \ v=\frac{\pi}{3}\text{m/s}$$

Rpta.: A

5. Se tiene un terreno ABCD que tiene la forma de una región cuadrangular cuya área es 5 u^2. Si el precio del terreno está dado por la expresión $P=1000\sqrt{13}(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)$ en soles, ¿cuál es el valor de dicho precio?

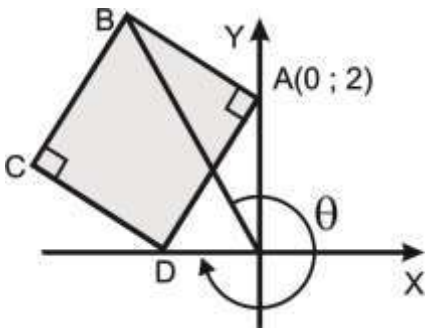
A) 4 000 soles

B) 5 000 soles

C) 6 000 soles

D) 7 000 soles

E) 8 000 soles



Solución:

$L^2 = 5$, entonces $L = \sqrt{5}$

$\alpha + (-\theta) = 360^o \quad \Rightarrow \quad \theta = \alpha - 360^o$

$P = 10^3\sqrt{13}(\text{sen}(\alpha - 360^o) + \cos(\alpha - 360^o))$

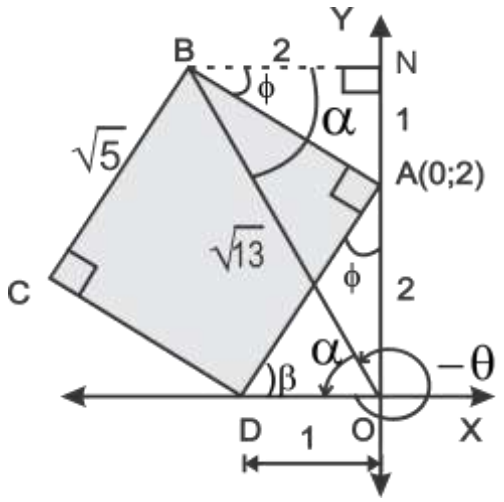
$P = 10^3\sqrt{13}(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$

$\triangle$BNA $\cong$ $\triangle$DOA; BN=AO=2 y DO=AN=1

$\triangle$BNO: $\text{sen}\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ y $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

Sustituyendo en P:

$P = 1000\sqrt{13}(5/\sqrt{13}) = 5000$



Rpta.: B

6. Un móvil se dirige del punto A hacia el punto B con velocidad constante y desde B se observa dos puntos P y C, localizados a igual distancia de B. Hallar el área de la región triangular formada por los puntos A, B y C sabiendo que el tiempo que demoró en trasladarse de A hacia B fue el triple del tiempo cuando se trasladó de B a C

A) 915 u^2

B) 1036 u^2

C) 838 u^2

D) 936 u^2

E) 963 u^2

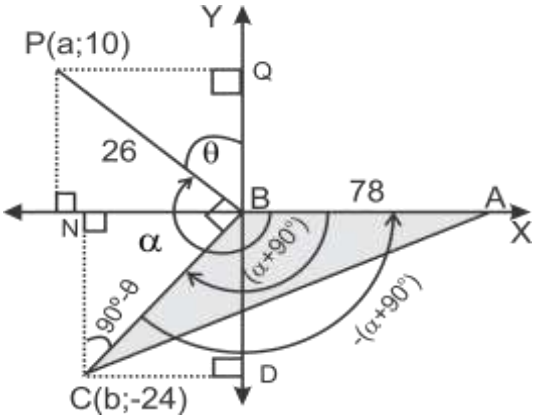
Solución:

$\triangle$ PQB $\cong$ $\triangle$ CNB

$b = -10$ y $a = -24$; $(BC)^2 = (-24)^2 + (-10)^2$

$BC = BP = 26$; $AB = 3BC = 3(26) = 78$

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}(26)(78)\text{sen}(-(\alpha + 90^o))$



$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(26)(78)(-\cos\alpha)\,;\ \cos\alpha = \frac{-24}{26}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(26)(78)(\frac{24}{26}) = 936u^2$$

Rpta.: D

7. Dos autos recorren por una pista circular de radio 2 km. Si se encuentran por primera vez en el punto P, hallar la longitud recorrida por el auto A y la distancia que se encuentra con respecto al diámetro de la circunferencia.

A) $\frac{2\pi}{3}$km, 1km

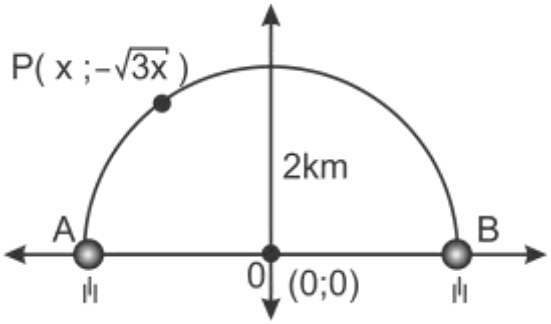
B) $\frac{\pi}{3}$km, $\sqrt{3}$ km

C) $\frac{2\pi}{3}$km, $\sqrt{3}$ km

θ

D) $\frac{\pi}{3}$km, 1km

E) $\frac{2\pi}{3}$km, 2km



<u>Solución</u>:

, en posición normal

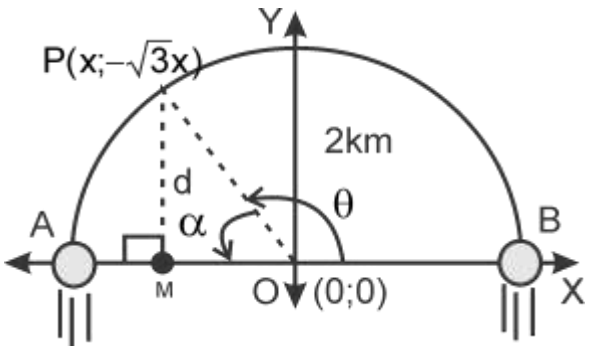
$2^2 = x^2 + 3x^2 \Rightarrow x = -1$

△PMO Notable 30º y 60º

$d = \sqrt{3}\,km\,;\quad \alpha = 60^o = \frac{\pi}{3}$ y $\theta = 120^o = \frac{2\pi}{3}$

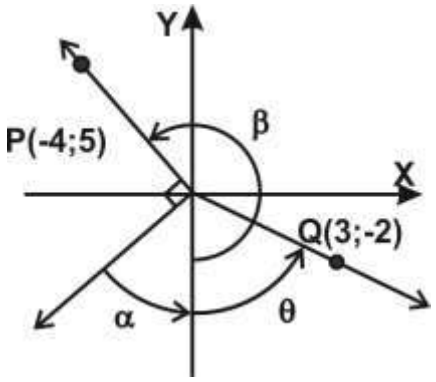
Longitud de arco AP

$L_{AP} = (2km)(\frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}km$



Rpta.: C

8. Durante una prueba de explosiones controladas, para conocer el efecto de estas, se ha observado que tres partes del objeto de prueba salen disparados desde el origen de coordenadas, en las direcciones mostradas en la figura. Calcule $\text{tg}(\alpha+\beta+\theta)+\sqrt{41}\text{sen}\alpha$



A) 1 B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{13}{3}$ D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{4}{9}$

Solución:

$\alpha+\beta=270^o$

$E=\text{tg}(\alpha+\beta+\theta)=(\text{tg}(270^o+\theta)$

$\text{tg}(\alpha+\beta+\theta)=-\text{ctg}\theta$

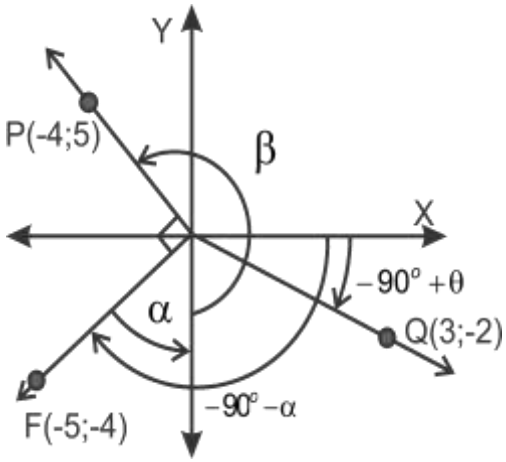
También

$\text{tg}(-90^o+\theta)=-\frac{2}{3};\quad -\text{ctg}\theta=-\frac{2}{3}$

Además

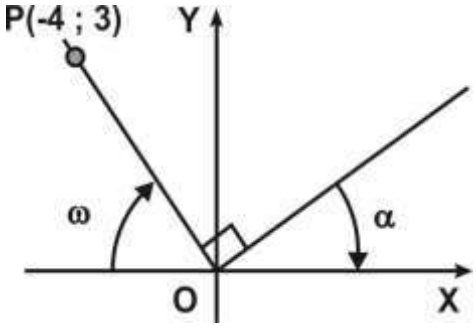
$\cos(-90^o-\alpha)=-\frac{5}{\sqrt{41}}$

$-\text{sen}\alpha=-\frac{5}{\sqrt{41}};E=-\frac{2}{3}+\sqrt{41}(\frac{5}{\sqrt{41}})=\frac{13}{3}$



Rpta.: C

9. Con la información presentada en la figura, calcule el valor de la expresión $\cos(\frac{25\pi}{2}+\alpha)+\text{sen}(323\pi-\omega)$



A) 2 B) $\frac{3}{2}$

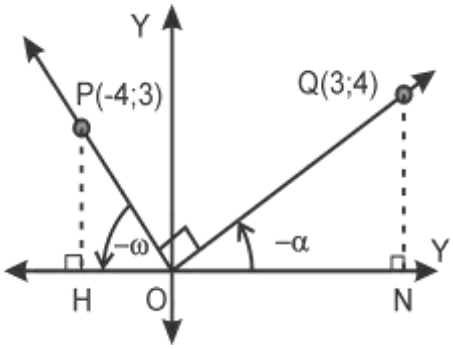
C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{6}{5}$

E) $\frac{1}{5}$

Solución:

$\triangle$PHO $\cong$ $\triangle$ ONQ; ON=3, NQ=4

$\triangle$PHO: $-\omega$ es agudo



$$E = \cos(25\frac{\pi}{2} + \alpha) + \text{sen}(323\pi - \omega)$$

$$E = \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \text{sen}(\pi - \omega) = -\text{sen}\alpha + \text{sen}\omega$$

$$E = -\text{sen}\alpha - \text{sen}(-\omega)$$

$$E = \text{sen}(-\alpha) - \text{sen}(-\omega) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

Rpta.: E

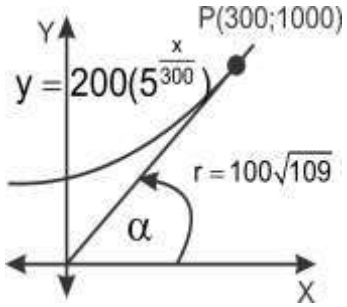
10. El número de bacterias representado por y(x) que están presentes en un experimento biológico, para cualquier instante del tiempo x, es $y(x) = 200\ (5^{\frac{x}{300}})$. Halle el valor de $\dfrac{\text{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \text{tg}(\pi - \alpha)}{\text{sen}(48\pi - \alpha)}$, siendo α la medida de un ángulo en posición normal, cuyo lado final pasa por el punto $P(x, y)$, cuando $y = 1000$

A) $\dfrac{2\sqrt{109}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{109}}{6}$ C) $\sqrt{109}$ D) $\dfrac{\sqrt{109}}{3}$ E) $\dfrac{2\sqrt{109}}{5}$

Solución:

Si $y = 1000$; $1000 = 200(5^{\frac{x}{300}})$

$x = 300$, $r = 100\sqrt{109}$; Entonces P(300,1000)



$$H = \frac{\text{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \text{tg}(\pi - \alpha)}{\text{sen}(48\pi - \alpha)};$$

$$H = \frac{-\text{tg}\alpha - \text{tg}\alpha}{-\text{sen}\alpha} = \frac{2\text{tg}\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{300}{100\sqrt{109}}; \quad H = \frac{2\sqrt{109}}{3}$$

Rpta.: A

θ

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si es la medida de un ángulo en posición normal con $S = \text{sen}\theta$ y $S^S = \sqrt{\text{sen}(12456\pi + \frac{5\pi}{6})}$, halle el menor valor de $\text{tg}\theta$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{15}$ E) $-\sqrt{15}$

Solución:

$\text{sen}\theta^{\text{sen}\theta} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, Luego $\text{sen}\theta = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \theta \in$ IQ ó $\theta \in$ IIQ

$\text{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ó $\text{tg}\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Rpta.: B

2. Si $\text{sen}(\alpha - \pi) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2} - 2\pi k) - 1$, halle la secante del suplemento del ángulo agudo α.

A) -1 B) -2 C) $-\sqrt{2}$ D) $-\sqrt{3}$ E) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Solución:

$\text{sen}(\alpha - \pi) = -\text{sen}\alpha$ y $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2} - 2\pi k) = -\text{sen}\alpha$

$-\text{sen}\alpha = \text{sen}\alpha - 1 \Rightarrow \text{sen}\alpha = 1/2 \Rightarrow \sec(\pi - \alpha) = -\sec\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Rpta.: E

3. Si α es la medida de un ángulo en posición normal tal que $\text{sen}\alpha\cos\alpha < 0$ y $\sec\alpha = \frac{a+b}{a-b}$, $b < a < 0$; calcule el valor de $\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}$

A) $-\text{tg}\alpha$ B) $\text{ctg}\alpha$ C) $\text{tg}\alpha$ D) 1 E) $\sec\alpha$

Solución:

Como $\text{sen}\alpha\cos\alpha < 0 \Rightarrow \text{tg}\alpha < 0 \quad \wedge \quad \cos\alpha \neq 0$

De la identidad: $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$;

$\text{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$ y $a - b > 0 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{b-a}$

Rpta.: C

4. De acuerdo a la figura, calcule $\dfrac{\text{tg}\alpha - \sec\alpha}{\text{tg}\alpha + \sec\alpha}$

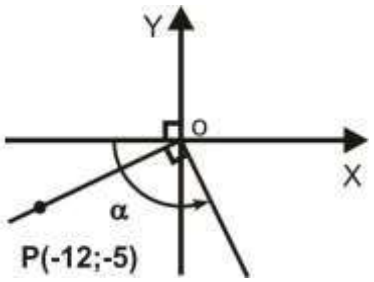
A) $1/5$

B) -1

C) 5

D) $-1/5$

E) $-1/25$



<u>Solución</u>:

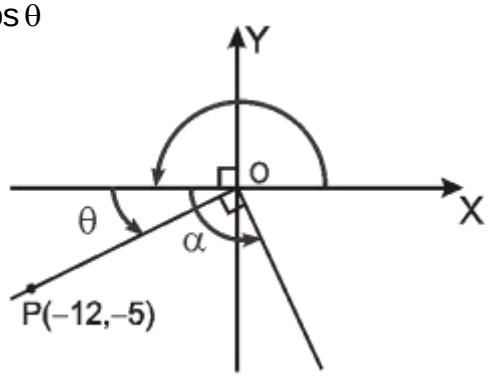
$$E = \frac{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} - 1}{\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + 1} = \frac{\text{sen}\alpha - 1}{\text{sen}\alpha + 1}$$

$\Rightarrow\ \alpha = \theta + 90^{\circ}$ y $\text{sen}\alpha = \text{sen}(90^{\circ} + \theta) = \cos\theta$

En P: $x = -12, y = -5, r = 13$

$\cos(180^{\circ} + \theta) = -\dfrac{12}{13} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{12}{13}$

$$E = \frac{\dfrac{12}{13} - 1}{\dfrac{12}{13} + 1} = -\frac{1}{25}$$



Rpta.: E

5. Un ciclista recorre con rapidez constante una distancia dada por $\text{tg}\alpha$ metros, luego se detiene y continua girando 90° a la derecha también, recorriendo una distancia dada por $\text{tg}\beta$ metros. Si R es el valor que representa la distancia recorrida en total, calcule 12R

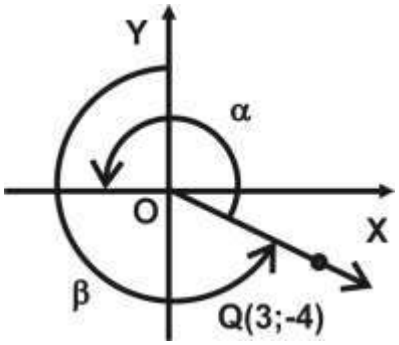
A) 24 m

B) 27 m

C) 37 m

D) 25 m

E) 35 m

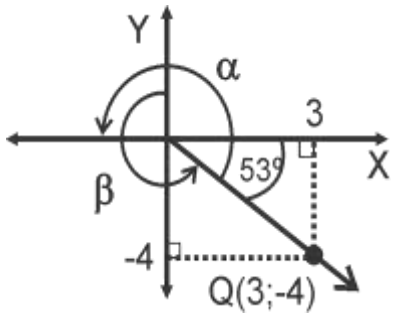


Solución:

$\alpha = 180 + 53^o \Rightarrow tg(180^o + 53^o) = tg53^o = \frac{4}{3}$

$\beta = (180 + 37^o) \Rightarrow tg(180 + 37^o) = tg37^o = \frac{3}{4}$

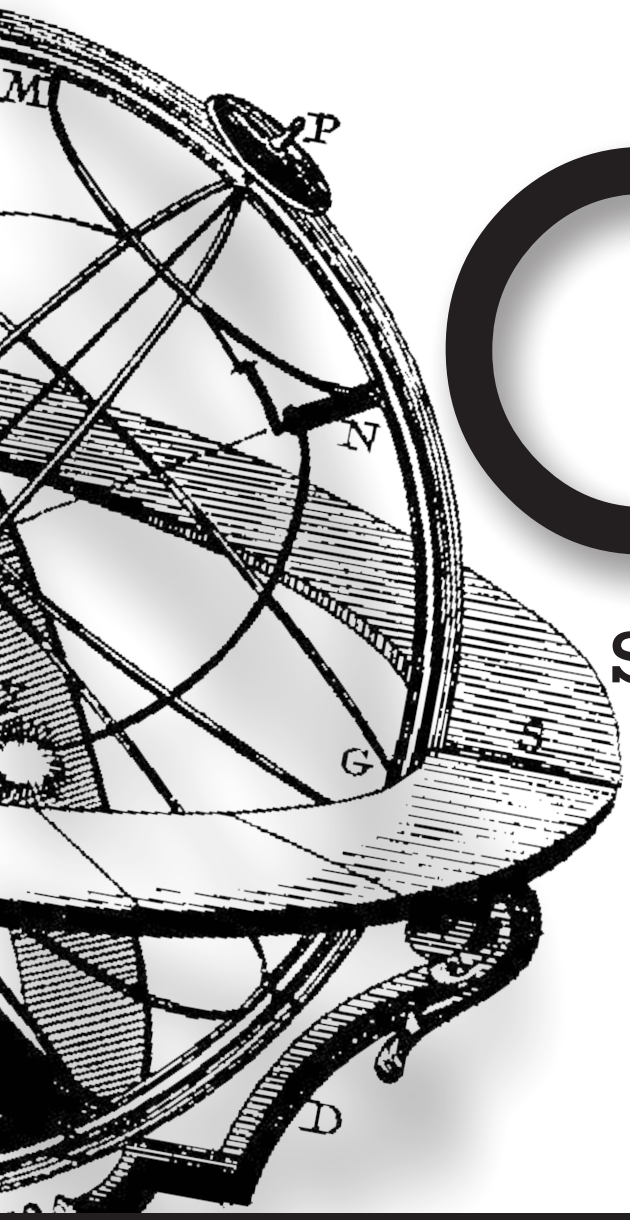
$R = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} \Rightarrow 12R = 25$



Rpta.: D

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



07

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

1. IDENTIDADES RECÍPROCAS. -

$\text{sen}\,\alpha \,.\, \csc\alpha = 1 \quad , \quad \alpha \neq n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

$\cos\alpha \,.\, \sec\alpha = 1 \quad , \quad \alpha \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

$\tan\alpha \,.\, \cot\alpha = 1 \quad , \quad \alpha \neq \dfrac{n\pi}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

2. IDENTIDADES POR COCIENTE.-

$\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \alpha \neq \dfrac{1}{2}(2n+1)\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

$\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \quad , \quad \alpha \neq n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

3. IDENTIDADES PITAGÓRICAS.-

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \quad , \quad \alpha \neq \dfrac{1}{2}(2n+1)\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \quad , \quad \alpha \neq n\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

4. IDENTIDADES AUXILIARES.-

$\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$

$\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\,\text{sen}^2\alpha \,.\, \cos^2\alpha$

$\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha \,.\, \csc\alpha \,, \quad \alpha \neq \dfrac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\sec^2\alpha + \csc^2\alpha = \sec^2\alpha \,.\, \csc^2\alpha, \quad \alpha \neq \dfrac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$

5. OPERACIONES ALGEBRAICAS Y FACTORIZACIONES BÁSICAS.-

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

EJERCICIOS

1. Si x es un ángulo no cuadrantal, simplifique la expresión

$$\frac{1+\operatorname{sen}x-\cos x}{\cos x+1+\operatorname{sen}x}+\frac{\operatorname{sen}x+\cos x+1}{1+\operatorname{sen}x-\cos x}.$$

A) 2senx B) 2tanx C) 2cscx D) 2cos x

2. Con un automóvil se parte en dirección Norte llegando a la estación A. Saliendo de esta estación se dirige en dirección $E\alpha S$. Si se detuvo el automóvil para llenar combustible en un grifo que se ubica a una distancia de 4 km y en dirección $N\alpha E$ del punto de partida, luego se continua con el recorrido llegando a la estación B ubicado al Este del punto de partida, determine la mínima distancia entre las estaciones A y B.

A) 12 km B) 6 km C) 4 km D) 8 km

3. Si $(\sec\theta+\tan\theta)(1+\sec\theta)=7$ y $\theta\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$, calcule el valor de $6\sec\theta-7\tan\theta$.

A) 3 B) 1 C) 2 D) 7

4. Si $1+\operatorname{sen}^2x=31\cos^2x$, $|\sec x|=-\sec x$ y $|\tan x|=\tan x$, calcule el valor de $\sec x-\tan x+\sqrt{15}$.

A) –5 B) –6 C) –3 D) –4

5. Una empresa dedicada al rubro de producción y venta de golosinas, estima que sus ventas en el n-ésimo mes del año comercial 2020, ascenderán a E(n) millones de soles . Si $E(n)=\sqrt{1+\dfrac{3-\sec^2\left(\frac{3n\pi}{4}\right)-\csc^2\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{\tan^4\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+\cot^2\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}}$, ¿en qué meses se tendrá la máxima venta?

A) Julio y agosto
B) Enero
C) Abril, setiembre y diciembre
D) Febrero, junio y octubre

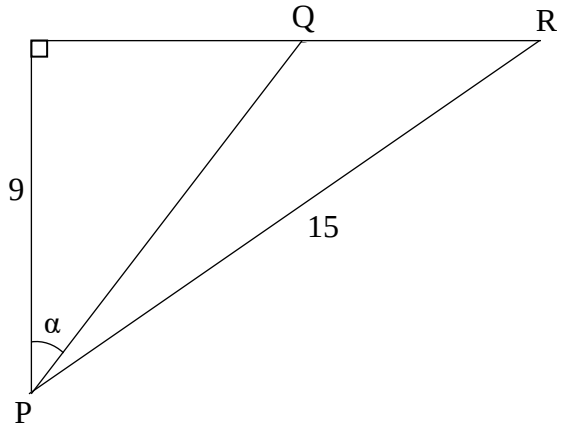
6. Una mujer ubicada en un punto P de una isla desea llegar a un punto R, sobre una playa recta. El punto P está situada a 9 millas de la costa y a 15 millas del punto R como se muestra en la figura. Si la mujer rema en un bote de P hacia un punto Q en tierra, después camina en línea recta hacia R en tierra y $4\text{sen}\alpha=\cos\alpha-4$, calcule la distancia que recorre la mujer para llegar al punto R.

A) 50 millas

B) 40 millas

C) 48millas

D) 46 millas



7. La utilidad diaria de la empresa VINOS DULCES dedicada a la producción y venta de vinos está dada por la expresión $4\csc^2 x+24\cot x+36$ en cientos de soles, donde x es agudo. Si la utilidad de la empresa está expresada por un número entero de soles, determine la menor utilidad de dicha empresa.

A) S/ 4001
B) S/ 4051
C) S/ 4049
D) S/ 3999

8. La edad de Vanessa en el 2020 es $50\left[\dfrac{\cos x(\tan x+2)(2\tan x+1)}{4\sec x+10\text{sen}x}\right]$ años. Si x es la medida de un ángulo agudo, halle su edad en el año 2035.

A) 25 años
B) 30 años
C) 35 años
D) 40 años

9. El ingreso trimestral de una empresa desarrolladora de software está determinada por la expresión $(1+\cos x-\text{sen}x)^4[(\text{sen}x+\tan x)(\cot x-\cos x)]^{-2}$, en millones de soles. Calcule el ingreso anual de la empresa.

A) 8 millones B) 12 millones C) 16 millones D) 13 millones

10. El costo de una laptop está de terminada por la expresión

$$\sec^2 x \cdot \csc^2 x - \frac{\tan^3 x + \cot^3 x}{\tan x + \cot x}$$

en miles de soles. ¿Cuánto se pagará por media docena de laptops?

A) S/ 15 000 B) S/ 18 000 C) S/ 12 000 D) S/ 21 000

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La expresión $60(\text{sen}^6 x + \cos^6 x) - 45(\text{sen}^4 x + \cos^4 x - 2\,\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x)$ determina la medida del ancho de un terreno rectangular en metros y su largo es el cuádruplo de su ancho. Si el metro cuadrado cuesta S/ 100, halle el costo del terreno.

A) S/ 80 000 B) S/ 100 000 C) S/ 90 000 D) S/ 95 000

2. El costo de una máquina de torno está determinada por la expresión

$$\frac{(1+\tan^2 x)^3}{\tan x} + \frac{(1+\cot^2 x)^3}{\cot x}$$

en miles de soles, x agudo. Si $\tan^2 x + \cot^2 x = 7$, halle el costo del torno.

A) S/ 180 000 B) S/ 190 000 C) S/ 170 000 D) S/ 189 000

3. El valor mínimo de la expresión $\left(\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x} + \frac{1}{\cot x}\right)^4 \left(\frac{\text{sen}\,x}{1-\cos x} - \frac{1}{\tan x}\right)^4$ en miles de dólares es el premio de una lotería. Halle a cuánto asciende dicho premio.

A) \$16 000 B) \$15 000 C) \$18 000 D) \$14 000

4. Si $\cos^2 x + \text{sen}^4 x = a$, halle el valor de la expresión

$$\text{sen}^4 x + \cos^4 x - 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x.$$

A) $5a-4$ B) $4a-5$ C) $7a-5$ D) $3a-2$

5. La expresión $\cos^2 x \cdot \cot^2 x$ en miles de dólares determina el costo de una camioneta. Si $\text{sen}x + \csc x = 6$, halle el costo de la camioneta.

A) \$ 34 000 B) \$ 39 000 C) \$ 30 000 D) \$ 32 000

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si x es un ángulo no cuadrantal, simplifique la expresión

$$\frac{1+\text{sen}x-\cos x}{\cos x+1+\text{sen}x}+\frac{\text{sen}x+\cos x+1}{1+\text{sen}x-\cos x}.$$

A) 2senx B) 2tanx C) 2cscx D) 2cos x

Solución:

$$M=\frac{1+\text{sen}x-\cos x}{1+\text{sen}x+\cos x}+\frac{1+\text{sen}x+\cos x}{1+\text{sen}x-\cos x}$$

$$=\frac{(1+\text{sen}x-\cos x)^2+(1+\text{sen}x+\cos x)^2}{(1+\text{sen}x+\cos x)(1+\text{sen}x-\cos x)}$$

$$=\frac{2(1+\text{sen}x)(1-\cos x)+2(1+\text{sen}x)(1+\cos x)}{(1+\text{sen}x)^2-\cos^2 x}$$

$$=\frac{2(1+\text{sen}x)[1-\cos x+1+\cos x]}{1+2\text{sen}x+\text{sen}^2x-(1-\text{sen}^2x)}$$

$$=\frac{2(1+\text{sen}x)(2)}{2\text{sen}x+2\text{sen}^2x}$$

$$=\frac{2(1+\text{sen}x)}{\text{sen}x(1+\text{sen}x)}=\frac{2}{\text{sen}x}=2\csc x$$

Rpta.: C

2. Con un automóvil se parte en dirección Norte llegando a la estación A. Saliendo de esta estación se dirige en dirección $E\alpha S$. Si se detuvo el automóvil para llenar combustible en un grifo que se ubica a una distancia de 4 km y en dirección $N\alpha E$ del punto de partida, luego se continua con el recorrido llegando a la estación B ubicado al Este del punto de partida, determine la mínima distancia entre las estaciones A y B.

A) 12 km B) 6 km C) 4 km D) 8 km

Solución:

Del gráfico:

$d(A,B) = 4(\tan\alpha + \cot\alpha)$ km

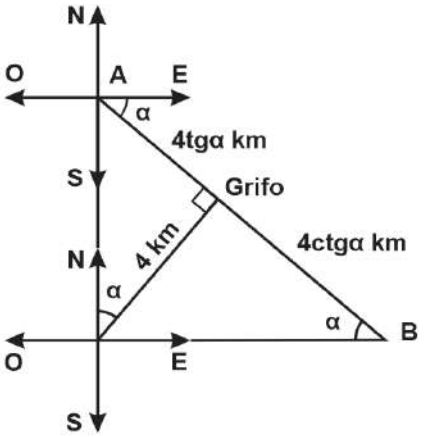
Como α es agudo:

$\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2$

Luego:

$d(A,B) \geq 8$ km

$\therefore\ d(A,B)_{min} = 8$ km



Rpta.: D

3. Si $(\sec\theta + \tan\theta)(1 + \sec\theta) = 7$ y $\theta \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, calcule el valor de $6\sec\theta - 7\tan\theta$.

A) 3 B) 1 C) 2 D) 7

Solución:

Del dato:

$$1 + \sec\theta = \frac{7}{\sec\theta + \tan\theta} \quad \rightarrow \quad 1 + \sec\theta = 7(\sec\theta - \tan\theta)$$

$\therefore\ 6\sec\theta - 7\tan\theta = 1.$

Rpta.: B

4. Si $1 + \text{sen}^2 x = 31\cos^2 x$, $|\sec x| = -\sec x$ y $|\tan x| = \tan x$, calcule el valor de $\sec x - \tan x + \sqrt{15}$.

A) –5 B) –6 C) –3 D) –4

Solución:

$1+\text{sen}^2x=31\cos^2 x \Rightarrow \sec^2 x+\dfrac{\text{sen}^2x}{\cos^2 x}=31$

$\Rightarrow \sec^2 x+\tan^2 x=31$

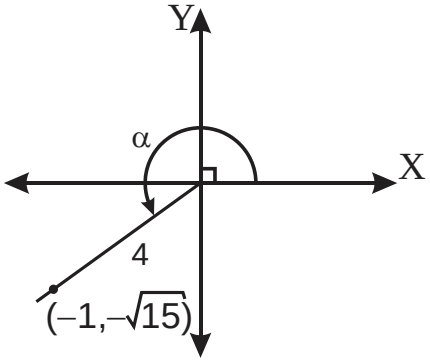
Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$\sec^2 x+\tan^2 x=31$

$\sec^2 x-\tan^2 x=1$

$\Rightarrow 2\sec^2 x=32 \Rightarrow \sec x=\pm 4,\ x\in \text{IIIC}$

$\therefore\ \sec x-\tan x+\sqrt{15}=-4-\sqrt{15}+\sqrt{15}=-4.$



Rpta.: D

5. Una empresa dedicada al rubro de producción y venta de golosinas, estima que sus ventas en el n-ésimo mes del año comercial 2020, ascenderán a E(n) millones de soles. Si $E(n)=\sqrt{1+\dfrac{3-\sec^2\left(\frac{3n\pi}{4}\right)-\csc^2\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{\tan^4\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+\cot^2\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}}$, ¿en qué meses se tendrá la máxima venta?

A) Julio y agosto
B) Enero
C) Abril, setiembre y diciembre
D) Febrero, junio y octubre

Solución:

(1) Denotando $u=\frac{3n\pi}{4}$, se tiene:

$$\sqrt{1+\frac{3-\sec^2 u-\csc^2 u}{\tan^4 u+\cot^2 u}}=\sqrt{1+\frac{3-\left(1+\tan^2 u\right)-\left(1+\cot^2 u\right)}{\tan^4 u+\cot^2 u}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1-\tan^2 u-\cot^2 u}{\tan^4 u+\cot^2 u}}=\sqrt{\frac{\tan^4 u-\tan^2 u+1}{\tan^4 u+\cot^2 u}}=\sqrt{\frac{\tan^4 u-\tan^2 u+1}{\tan^4 u+\frac{1}{\tan^2 u}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\tan^2 u\left(\tan^4 u-\tan^2 u+1\right)}{\tan^6 u+1}}=\sqrt{\frac{\tan^2 u}{\tan^2 u+1}}=\sqrt{\frac{\tan^2 u}{\sec^2 u}}=\sqrt{\text{sen}^2 u}=|\text{sen}u|$$

$$\Rightarrow\ E(n)=\left|\text{sen}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right|\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+$$

(2) $E(n)=1 \Leftrightarrow \left|\text{sen}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right|=1\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+\quad 1\le n\le 12$

Luego, $\frac{3n\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\ \Rightarrow\ n=2$

$\frac{3n\pi}{4}=\frac{9\pi}{2}\ \Rightarrow\ n=6$

$\frac{3n\pi}{4}=\frac{15\pi}{2}\ \Rightarrow\ n=10$

$\therefore$ máxima venta en los meses de febrero, junio y octubre.

Rpta.: D

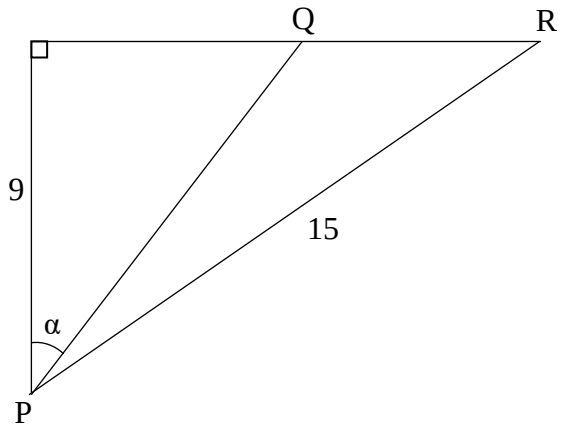
6. Una mujer ubicada en un punto P de una isla desea llegar a un punto R, sobre una playa recta. El punto P está situada a 9 millas de la costa y a 15 millas del punto R como se muestra en la figura. Si la mujer rema en un bote de P hacia un punto Q en tierra, después camina en línea recta hacia R en tierra y $4\text{sen}\alpha=\cos\alpha-4$, calcule la distancia que recorre la mujer para llegar al punto R.

A) 50 millas

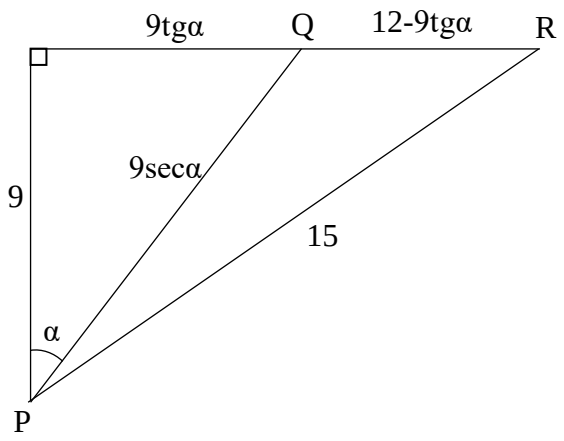
B) 40 millas

C) 48millas

D) 46 millas



Solución:



$4\text{sen}\alpha = \cos\alpha - 4$

$4 + 4\text{sen}\alpha = \cos\alpha$

$\dfrac{4 + 4\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 1$

$4\sec\alpha + 4\text{tg}\alpha = 1$

$\sec\alpha + \text{tg}\alpha = \dfrac{1}{4}$

$\rightarrow \sec\alpha - \text{tg}\alpha = 4$

Luego,

$d(P,Q) + d(Q,R) = 12 + 9(\sec\alpha - \text{tg}\alpha)$

$d(P,Q) + d(Q,R) = 12 + 9(4)$

$d(P,Q) + d(Q,R) = 48$ millas

Rpta.: C

7. La utilidad diaria de la empresa VINOS DULCES dedicada a la producción y venta de vinos está dada por la expresión $4\csc^2 x + 24\cot x + 36$ en cientos de soles, donde x es agudo. Si la utilidad de la empresa está expresada por un número entero de soles, determine la menor utilidad de dicha empresa.

A) S/ 4001 B) S/ 4051 C) S/ 4049 D) S/ 3999

Solución:

$U(x) = 4\csc^2 x + 24\cot x + 36 \;\Rightarrow\; U(x) = 4(1+\cot^2 x) + 24\cot x + 36$

$\Rightarrow\; U(x) = 4\cot^2 x + 24\cot x + 40 \;\Rightarrow U(x) = (2\cot x + 6)^2 + 4$

como $\quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 6 < 2\cot x + 6 \;\Rightarrow\; 36 < (2\cot x + 6)^2$

$\Rightarrow\; 40 < (2\cot x + 6)^2 + 4 \;\Rightarrow\; 4000 < U$

$\therefore\; U = S/\,4001.$

Rpta.: A

8. La edad de Vanessa en el 2020 es $50\left[\dfrac{\cos x(\tan x + 2)(2\tan x + 1)}{4\sec x + 10\text{sen}x}\right]$ años. Si x es la medida de un ángulo agudo, halle su edad en el año 2035.

A) 25 años B) 30 años C) 35 años D) 40 años

Solución:

Sea E la edad de Vanessa.

$$E = 50\left[\frac{\cos x(\tan x+2)(2\tan x+1)}{4\sec x+10\text{sen}x}\right] = 50\left[\frac{\cos x\left(2\tan^2 x+\tan x+4\tan x+2\right)}{4\sec x+10\text{sen}x}\right]$$

$$= 50\left[\frac{\cos x\left(2\sec^2 x+5\tan x\right)}{4\sec x+10\text{sen}x}\right]$$

$$= 50\left[\frac{2\cos x.\sec^2 x+5\tan x.\cos x}{4\sec x+10\text{sen}x}\right]$$

$$= 50\left[\frac{(2\sec x+5\text{sen}x)}{2(2\sec x+5\text{sen}x)}\right]$$

$\therefore\ E = 25.$

Entonces, la edad de Vanessa en el 2020 es 25 años. Por lo tanto, su edad en el año 2035 es 40 años.

Rpta.: D

9. El ingreso trimestral de una empresa desarrolladora de software está determinada por la expresión $(1+\cos x-\text{sen}x)^4[(\text{sen}x+\tan x)(\cot x-\cos x)]^{-2}$, en millones de soles. Calcule el ingreso anual de la empresa.

A) 8 millones B) 12 millones C) 16 millones D) 13 millones

Solución:

$$(1+\cos x-\text{sen}x)^4[(\text{sen}x+\tan x)(\cot x-\cos x)]^{-2}$$
$$=[(1+\cos x-\text{sen}x)^2]^2[\tan x(1+\cos x)\cot x(1-\text{sen}x)]^{-2}$$
$$=[2(1+\cos x)(1-\text{sen}x)]^2[(1+\cos x)(1-\text{sen}x)]^{-2}$$
$$=2^2$$
$$=4$$

Por consiguiente, el ingreso anual es de 16 millones de soles.

Rpta.: C

10. El costo de una laptop está de terminada por la expresión

$$\sec^2 x\cdot\csc^2 x-\frac{\tan^3 x+\cot^3 x}{\tan x+\cot x}$$

en miles de soles. ¿Cuánto se pagará por media docena de laptops?

A) S/ 15 000 B) S/ 18 000 C) S/ 12 000 D) S/ 21 000

Solución:

$$\sec^2 x\cdot\csc^2 x - \frac{\tan^3 x+\cot^3 x}{\tan x+\cot x} = \sec^2 x + \csc^2 x - \frac{(\tan x+\cot x)(\tan^2 x-1+\cot^2 x)}{\tan x+\cot x}$$

$$= \tan^2 x + \cot^2 x + 2 - (\tan^2 x - 1 + \cot^2 x)$$

$$= 3 \text{ en miles de soles}$$

Por lo tanto, media docena de laptops cuesta 18 mil soles.

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La expresión $60(\text{sen}^6 x + \cos^6 x) - 45(\text{sen}^4 x + \cos^4 x - 2\,\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x)$ determina la medida del ancho de un terreno rectangular en metros y su largo es el cuádruplo de su ancho. Si el metro cuadrado cuesta S/ 100, halle el costo del terreno.

A) S/ 80 000 B) S/ 100 000 C) S/ 90 000 D) S/ 95 000

Solución:

$$60(\text{sen}^6 x + \cos^6 x) - 45(\text{sen}^4 x + \cos^4 x - 2\,\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x)$$

$$= 15[4(1-3\,\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x) - 3(1-4\,\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x)]$$

$$= 15(4-3)$$

$$= 15$$

$$\text{Luego, el costo del terreno} = (15)(60)(100) = \text{S/ } 90\,000.$$

Rpta.: C

2. El costo de una máquina de torno está determinada por la expresión

$$\frac{(1+\tan^2 x)^3}{\tan x} + \frac{(1+\cot^2 x)^3}{\cot x}$$

en miles de soles, x agudo. Si $\tan^2 x + \cot^2 x = 7$, halle el costo del torno.

A) S/ 180 000 B) S/ 190 000 C) S/ 170 000 D) S/ 189 000

Solución:

$\tan^2 x + \cot^2 x = 7 \Rightarrow (\tan^2 x + 1) + (\cot^2 x + 1) = 9 \Rightarrow \sec^2 x + \csc^2 x = 9$

$\Rightarrow \sec^2 x \cdot \csc^2 x = 9 \Rightarrow \sec x \cdot \csc x = 3 ...(1)$

Por otro lado: $\dfrac{(1+\tan^2 x)^3}{\tan x} + \dfrac{(1+\cot^2 x)^3}{\cot x} = \dfrac{\sec^6 x}{\tan x} + \dfrac{\csc^6 x}{\cot x}$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} x . \cos^5 x} + \frac{1}{\cos x \cdot \operatorname{sen}^5 x}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} x . \cos x}\left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{\operatorname{sen}^5 x . \cos^5 x}$$

$$= \sec^5 x \cdot \csc^5 x (1 - 2\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x)$$

$$= \sec^5 x \cdot \csc^5 x - 2\sec^3 x \cdot \csc^3 x$$

De (1) $= (3)^5 - 2(3)^3 = 3^3(9-2) = 189$

Luego, el costo del torno es de S/ 189 000.

Rpta.: D

3. El valor mínimo de la expresión $\left(\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{\cot x}\right)^4 \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)^4$ en miles de dólares es el premio de una lotería. Halle a cuánto asciende dicho premio.

A) \$16 000 B) \$15 000 C) \$18 000 D) \$14 000

Solución:

$$\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cot x}\right)^4 \left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} - \frac{1}{\tan x}\right)^4$$

$$= \left(\frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cot x}\right)^4 \left(\frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\tan x}\right)^4$$

$$= \sec^4 x \cdot \csc^4 x = (\sec^2 x + \csc^2 x)^2$$

$$= (\tan^2 x + \cot^2 x + 2)^2$$

Luego, $2 \leq \tan^2 x + \cot^2 x \Rightarrow 4 \leq \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow 16 \leq (\tan^2 x + \cot^2 x + 2)^2$

$\therefore$ El premio que paga la lotería $=$ \$16000.

Rpta.: A

4. Si $\cos^2 x + \text{sen}^4 x = a$, halle el valor de la expresión

$$\text{sen}^4 x + \cos^4 x - 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x.$$

A) $5a-4$ B) $4a-5$ C) $7a-5$ D) $3a-2$

Solución:

$\cos^2 x + \text{sen}^4 x = a \Rightarrow a = \cos^2 x + (1-\cos^2 x)^2 = \cos^2 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$

$= 1 - \cos^2 x + \cos^4 x = 1 - \cos^2 x(1-\cos^2 x) = 1 - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$

$\Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = a \Rightarrow \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - a \quad (1)$

Luego, $\text{sen}^4 x + \cos^4 x - 3\,\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 5\,\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 5(1-a) = 5a - 4.$

Rpta.: A

5. La expresión $\cos^2 x \cdot \cot^2 x$ en miles de dólares determina el costo de una camioneta. Si $\text{sen}x + \csc x = 6$, halle el costo de la camioneta.

A) \$ 34 000 B) \$ 39 000 C) \$ 30 000 D) \$ 32 000

Solución:

$\text{sen}x + \csc x = 6 \Rightarrow (\text{sen}x + \csc x)^2 = 36 \Rightarrow \text{sen}^2 x + 2 + \csc^2 x = 36$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x + \csc^2 x = 34 \cdots (1)$

Por otra parte $\cos^2 x \cdot \cot^2 x = (1 - \text{sen}^2 x)(\csc^2 x - 1)$

$= \text{sen}^2 x + \csc^2 x - 2$

De (1) $= 34 - 2 = 32.$

Por consiguiente, el costo de la camioneta es de \$ 32 000.

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Determine el máximo valor que puede tomar la expresión

$$\frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x} + \csc\frac{\pi}{6} \quad , \quad \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}.$$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{5}{2}$

Solución:

$$\frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x} + \csc\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} + \csc\frac{\pi}{6} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} + \csc\frac{\pi}{6}$$

$$= 2\cos^2 x - 1 + 2 = 2\cos^2 x + 1, \quad \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore \text{Max. valor} = 2(\cos^2\frac{\pi}{6}) + 1 = \frac{5}{2}.$$

Rpta.: D

2. Un constructor desea colocar mayólicas en el patio de una residencia que tiene forma circular cuyo radio en metros está determinado por la expresión $3\operatorname{sen} x\left(\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$, donde x es agudo. Si el metro cuadrado de mayólicas colocadas cuesta 40 soles, ¿cuánto debe pagar el propietario de la residencia al constructor?

A) S/ 1240 π B) S/ 1420 π C) S/ 1440 π D) S/ 1460 π

Solución:

$$3\operatorname{sen} x\left(\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right) = 3\operatorname{sen} x\left(\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$$

$$= 3\left(1 + \cos x + \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\right)$$

$$= 6$$

Luego el área $= 36\pi \text{ m}^2$

$\therefore$ Costo de mayólicas $= S/\ 36\pi(40) = S/\ 1\,440\pi.$

Rpta.: C

3. El laboratorio de una institución educativa adquiere la cantidad de x^2+y^2+67 computadoras, donde $x\cos\alpha+y\ \text{sen}\alpha=2$ y $y\cos\alpha-x\ \text{sen}\alpha=3$. Si α es agudo y cada computadora cuesta S/ 2 500, halle el costo total de las computadoras.

A) S/ 200 000 B) S/ 250 000 C) S/ 180 000 D) S/ 280 000

Solución:

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\ \text{sen}\alpha=2 \\ y\cos\alpha-x\ \text{sen}\alpha=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\cos^2\alpha+y^2\text{sen}^2\alpha+2xy\,\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=4 \\ x^2\text{sen}^2\alpha+y^2\cos^2\alpha-2xy\,\text{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=9 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2+y^2=13 \Rightarrow x^2+y^2+67=80$

$\therefore \text{Costo total}=S/80(2500)=S/200\ 000.$

Rpta.: A

4. La cantidad de autos importados por una compañía automotriz está determinado por la expresión $(1+3\sec^2\alpha)^2-(1+3\tan^2\alpha)^2$, donde es agudo. Si cada auto cuesta \$ 30 000 y $1-\text{sen}^4\alpha=9\cos^4\alpha$, ¿cuánto pagó la compañía por los autos importados?

A) \$ 2 510 000 B) \$ 2 700 000 C) \$ 2 650 000 D) \$ 2 610 000

Solución:

$1-\text{sen}^4\alpha=9\cos^4\alpha \Rightarrow \sec^4\alpha-\tan^4\alpha=9 \Rightarrow \sec^2\alpha+\tan^2\alpha=9$

$\Rightarrow 1+2\tan^2\alpha=9 \Rightarrow \tan\alpha=2\cdots(1)$

$$\begin{aligned}(1+3\sec^2\alpha)^2-(1+3\tan^2\alpha)^2 &= 6(\sec^2\alpha-\tan^2\alpha)+9(\sec^2\alpha-\text{tg}^2\alpha)(\sec^2\alpha+\tan^2\alpha) \\ &= 6+9(1+2\tan^2\alpha) \\ &= 6+81=87 \text{ autos, por (1)}\end{aligned}$$

Lo que paga la compañía $=\$87(30000)=\$2\ 610\ 000$

Rpta.: D

5. El número de canicas que se encuentra en una caja está dada por la expresión $\tan^4 x+\cot^4 x$. Si $\tan x-\cot x=5$, ¿cuántas canicas hay en la caja?

A) 729 B) 726 C) 727 D) 730

Solución:

$\tan x-\cot x=5 \Rightarrow (\tan x-\cot x)^2=25 \Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=27$

$\Rightarrow (\tan^2 x+\cot^2 x)^2=729 \Rightarrow \tan^4 x+\cot^4 x=727$

Luego, 727 es el número de canicas que hay en la caja.

Rpta.: C

6. La cantidad de tornos que importa una empresa del rubro metalmecánica está dada por la expresión $\dfrac{18[(1+\text{sen}^2\alpha)^3+(1+\cos^2\alpha)^3]+162}{2-\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$. Si se paga 10 000 dólares, por cada torno, ¿cuánto se pagará por el total de los tornos importados?

A) \$ 1 800 000 B) \$ 1 720 000 C) \$ 1 540 000 D) \$ 1 620 000

Solución:

$$\frac{18(1+\text{sen}^2\alpha)^3+18(1+\cos^2\alpha)^3+162}{2-\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{18[(1+\text{sen}^2\alpha)^3+(1+\cos^2\alpha)^3+9]}{2-\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{18(1+3\text{sen}^2\alpha+3\text{sen}^4\alpha+\text{sen}^6\alpha+\ 1+3\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha+\cos^6\alpha+9}{2-\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{18[\,2+3(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)+3(\text{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha)+\text{sen}^6\alpha+\cos^6\alpha+9]}{2-\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{18(9-9\,\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+9)}{2-\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{162(2-\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)}{2-\text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

$$=162.$$

Luego, se pagará por número total de tornos = \$ (162)(10 000)= \$ 1 620 000

Rpta.: D

7. Se está construyendo el primer piso de un hospital, para el techado se requiere la cantidad de $(1+\text{sen}\alpha+\cos\alpha)^4(1-\text{sen}\alpha-\cos\alpha)^4\sec^4\alpha\cdot\csc^4\alpha$ ladrillos de techo en millares. Si cada millar de ladrillos cuesta S/ 1 500, ¿cuánto se debe pagar por los ladrillos requeridos?

A) S/ 24 500 B) S/ 24 000 C) S/ 23 000 D) S/ 23 500

Solución:

$$(1+\text{sen}\alpha+\cos\alpha)^4(1-\text{sen}\alpha-\cos\alpha)^4\sec^4\alpha\cdot\csc^4\alpha=$$

$$=[2(1+\text{sen}\alpha)(1+\cos\alpha)]^2[2(1-\text{sen}\alpha)(1-\cos\alpha)]^2\sec^4\alpha\cdot\csc^4\alpha$$

$$=16(1-\text{sen}^2\alpha)^2(1-\cos^2\alpha)^2\sec^4\alpha\cdot\csc^4\alpha$$

$$=16\,\text{sen}^4\alpha\cdot\cos^4\alpha\cdot\sec^4\alpha\cdot\csc^4\alpha$$

$$=16.$$

Luego el costo total $=$ S/ $(16)(1\,500)=$ S/ $24\,000$.

Rpta.: B

8. La propina diaria que recibe Juan es de $4a+2b+c$ soles, donde a, b y c se obtiene a partir de la expresión $\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{\sec x-1}=a+b\cot^c x$. ¿Cuánto de propina recibe Juan?

A) S/ 10 B) S/ 15 C) S/ 5 D) S/ 8

Solución:

$$\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{\sec x-1}=\frac{1}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1-\cos x}=\frac{1-\cos x+\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$=\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\frac{1+\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}=\csc^2 x+\cot^2 x=1+2\cot^2 x$$

$$\Rightarrow 1+2\cot^2 x=a+b\cot^c x \Rightarrow a=1,\ b=2 \text{ y } c=2$$

$$\therefore 4a+2b+c=S/10.$$

Rpta.: A

9. La expresión $\frac{25}{\csc x-1}+\frac{25}{\sec x-1}-\frac{25}{\csc x+1}-\frac{25}{\sec x+1}$, determina la mínima cantidad de cocinas a gas que un distribuidor debe tener en stock. Si cada cocina cuesta S/ 1 500, ¿cuál es la inversión mínima que debe hacer el distribuidor?

A) S/ 170 000 B) S/ 200 400 C) S/ 120 000 D) S/ 150 000

Solución:

$$\frac{25}{\csc x-1}+\frac{25}{\sec x-1}-\frac{25}{\csc x+1}-\frac{25}{\sec x+1}$$

$$=25\left(\frac{1}{\csc x-1}-\frac{1}{\csc x+1}+\frac{1}{\sec x-1}-\frac{1}{\sec x+1}\right)$$

$$=25\left(\frac{\csc x+1-\csc x+1}{\csc^2 x-1}+\frac{\sec x+1-\sec x+1}{\sec^2 x-1}\right)$$

$$=25\left(\frac{2}{\csc^2 x-1}+\frac{2}{\sec^2 x-1}\right)=25\left(\frac{2}{\cot^2 x}+\frac{2}{\tan^2 x}\right)$$

$$=50(\tan^2 x+\cot^2 x)\geq 50(2)=100.$$

Por lo tanto, la inversión mínima que debe hacer el distribuidor es de S/. 150 000.

Rpta.: D

10. En el primer examen del Centro Preuniversitario de la UNMSM, el mayor y menor puntaje obtenidos están dados por las expresiones

$$\frac{100[(2-\cos x)(12-\sec x)+2\sec x(1+\cos x)-6\cos x]}{3-2\cos x} \quad \text{y}$$

$$90(\sec^4 x+\tan^4 x-1)\cos^2 x\cdot\cot^2 x,$$

respectivamente. Halle la media aritmética del máximo y mínimo puntaje.

A) 640 B) 520 C) 540 D) 620

Solución:

$$\text{Pmáx}=\frac{100[(2-\cos x)(12-\sec x)+2\sec x(1+\cos x)-6\cos x]}{3-2\cos x}=$$

$$=\frac{100(24-2\sec x-12\cos x+1+2\sec x+2-6\cos x)}{3-2\cos x}$$

$$=\frac{100(27-18\cos x)}{3-2\cos x}=\frac{100(9)(3-2\cos x)}{3-2\cos x}=900$$

$$\text{Pmín}=90(\sec^4 x+\text{ta}^{\ 4} x-1)\cos^2 x\cdot\cot^2 x=90[(1+\text{ta}^{\ 2} x)^2+\tan^4 x-1]\cos^2 x\cdot\cot^2 x$$

$$=90(2\tan^2 x)(1+\tan^2 x)\cos^2 x\cdot\cot^2 x$$

$$=90(2\tan^2 x)\sec^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cot^2 x=180$$

$$\therefore \text{MA}=\frac{900+180}{2}=540.$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una fábrica determina que la producción de cierto artículo en el año 2019 está dada por la expresión $\text{sen}^4\frac{\pi t}{12}-\cos^4\frac{\pi t}{12}-2\text{sen}\frac{\pi t}{12}+\frac{21}{2}$, donde t denota los meses. En base a la información dada, determine los meses en que la producción es mínima.

A) Febrero y octubre
B) Enero y octubre
C) Febrero y julio
D) Mayo y octubre

Solución:

$$\text{sen}^4\frac{\pi t}{12}-\cos^4\frac{\pi t}{12}-2\text{sen}\frac{\pi t}{12}+\frac{21}{2}=\text{sen}^2\frac{\pi t}{12}-\cos^2\frac{\pi t}{12}-2\text{sen}\frac{\pi t}{12}+\frac{21}{2}$$

$$=\ 2\text{sen}^2\frac{\pi t}{12}-2\text{sen}\frac{\pi t}{12}+\frac{19}{2}=2(\text{sen}^2\frac{\pi t}{12}-\text{sen}\frac{\pi t}{12})+\frac{19}{2}$$

$$=\ 2(\text{sen}^2\frac{\pi t}{12}-\text{sen}\frac{\pi t}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+\frac{19}{2}=2(\text{sen}\frac{\pi t}{12}-\frac{1}{2})^2+9$$

El mínimo valor se da cuando $\text{sen}\frac{\pi t}{12}-\frac{1}{2}=0$

$$\Rightarrow\quad \text{sen}\frac{\pi t}{12}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad \frac{\pi t}{12}=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad t=2,10$$

Por lo tanto, los meses donde la producción es mínima de acuerdo al modelo planteado por la fábrica son febrero y octubre.

Rpta.: A

2. Simplifique la expresión $\sqrt{1-4\text{sen}^2x\cdot\cos^2x}-1,\ \frac{3\pi}{4}<x<\pi$.

A) $-2\cos^2x$ B) -2sen^2x C) $-2\text{sen}\,x$ D) 2sen^2x

Solución:

$$,\sqrt{1-4\text{sen}^2x\cdot\cos^2x}-1=\sqrt{1-4(1-\cos^2x)\cos^2x}-1$$

$$=\sqrt{(2\cos^2x-1)^2}-1=2\cos^2x-2$$

$$=-2\text{sen}^2x.$$

Rpta.: B

3. Las edades de un padre y su hijo están dadas por las expresiones $(\sec x + \csc x)^2 + 6$ y $\tan x + \cot x = 6$, respectivamente, donde x es agudo. Halle la media geométrica de dichas edades.

A) 24 B) 16 C) 15 D) 18

Solución:

$\tan x + \cot x = 6 \Rightarrow (\tan x + \cot x)^2 = 36 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = 34$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}(\sec x + \csc x)^2 + 6 &= (\sec^2 x + \csc^2 x + 2\sec x \cdot \csc x) + 6\\ &= [1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 2(\tan x + \cot x)] + 6\\ &= [\tan^2 x + \cot^2 x + 2 + 2(\tan x + \cot x)] + 6\\ &= 48 + 6\\ &= 54\end{aligned}$$

$\therefore MG = \sqrt{(54)(6)} = 18.$

Rpta.: D

4. Si $\text{sen}^2 x \cdot \text{sen}^6 y + \cos^2 x \cdot \cos^6 y + \text{sen}^2 x \cdot \cos^6 y + \cos^2 x \cdot \text{sen}^6 y - \cos^2 y + \cos^4 y = a,\ a \neq 1,$ halle $\sec^2 y + \csc^2 y$.

A) $\dfrac{4}{1-a}$ B) $\dfrac{4}{1+a}$ C) $\dfrac{2}{1-2a}$ D) $\dfrac{2}{1-a}$

Solución:

$\text{sen}^2 x(\text{sen}^6 y + \cos^6 y) + \cos^2 x(\cos^6 y + \text{sen}^6 y) - \cos^2 y(1 - \cos^2 y) = a$

$\text{sen}^6 y + \cos^6 y - \cos^2 y \cdot \text{sen}^2 y = a$

$1 - 4\cos^2 y \cdot \text{sen}^2 y = a \Rightarrow \dfrac{1-a}{4} = \cos^2 y \cdot \text{sen}^2 y$

$\therefore \sec^2 y + \csc^2 y = \dfrac{4}{1-a}.$

Rpta.: A

5. La distancia entre dos ciudades es $32(2 - \text{sen}^4 x - \cos^4 x - \text{sen}^6 x - \cos^6 x)$ kilómetros. Si $\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2}$, donde x es agudo, halle dicha distancia.

A) 35 km B) 40 km C) 50 km D) 48 km

Solución:

$\text{sen}\, x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow 1 + 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x = 2 \Rightarrow \text{sen}\, x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2} \cdots (1)$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&32(2-\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x-\operatorname{sen}^6 x-\cos^6 x)\\
&\quad=32(2-1+2\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x-1+3\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x)\\
&\quad=32(5\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x)\\
&\quad=32(5)(\tfrac{1}{4})\quad \text{Por } \cdots(1)\\
&\quad=40.
\end{aligned}
$$

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $\cos^2 x = 2\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}^2 x \cdot \text{ctg}^2 y$, halle $\text{sen}^2 x \cdot \csc^2 y$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Solución:

$$1 - \text{sen}^2 x = 2\,\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}^2 x \cdot \text{ctg}^2 y \Rightarrow 1 = 3\,\text{sen}^2 x\,(1 + \text{ctg}^2 y)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \text{sen}^2 x\,(\csc^2 y).$$

Rpta.: A

2. Simplificar la expresión $\sqrt{\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x - 2} - \sqrt{\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x + 2}$, $\frac{\pi}{2} < 2x < \pi$.

A) $2\text{ctg}\,x$ B) $-2\text{tg}\,x$ C) $-2\text{ctg}\,x$ D) $\text{tg}\,x$ E) $-\text{ctg}x$

Solución:

$$\sqrt{(\text{tg}\,x - \text{ctg}\,x)^2} - \sqrt{(\text{tg}\,x + \text{ctg}\,x)^2} = |\text{tg}\,x - \text{ctg}\,x| - |\text{tg}\,x + \text{ctg}\,x|, \ \frac{\pi}{2} < 2x < \pi$$
$$= (\text{tg}\,x - \text{ctg}\,x) - (\text{tg}\,x + \text{ctg}\,x)$$
$$= -2\text{ctg}\,x.$$

Rpta.: C

3. Si $\frac{a}{\text{sen}\,x} = \frac{b}{\cos x} = \frac{c}{\text{ctg}\,x}$, halle la relación entre a, b y c.

A) $b(a^2 + b^2) = a^2c^2$ B) $b^2(a^2 + b^2) = ac$ C) $b^2(a + b) = a^2c^2$
D) $b(a^2 + b^2) = ac$ E) $b^2(a^2 + b^2) = a^2c^2$

Solución:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} x}=\frac{b}{\cos x}=\frac{c}{\operatorname{ctg} x}=k \Rightarrow \begin{cases} a=k\operatorname{sen} x\cdots(1) \\ b=k\cos x\cdots(2) \\ c=k\operatorname{ctg} x\cdots(3) \end{cases}$$

De (1) y (3): $a^2c^2=k^4\cos^2 x\cdots(4)$

De (1) y (2): $a^2+b^2=k^2 \quad \cdots(5)$

De (2): $b^2=k^2\cos^2 x \quad \cdots(6)$

De (5), (6) y (4): $b^2(a^2+b^2)=k^4\cos^2 x = a^2c^2$.

$\therefore\ b^2(a^2+b^2)=a^2c^2$.

Rpta.: E

4. Si $12\operatorname{sen} x+5\cos x=13$, siendo x agudo, halle $12\operatorname{ctg} x$.

A) 4 B) 5 C) 3 D) 13 E) 12

Solución:

$12\operatorname{sen} x+5\cos x=13 \Rightarrow 25(1-\operatorname{sen}^2 x)=169-312\operatorname{sen} x+144\operatorname{sen}^2 x$

$\Rightarrow 169\operatorname{sen}^2 x-312\operatorname{sen} x+144=0 \Rightarrow (13\operatorname{sen} x-12)^2=0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x=\frac{12}{13} \Rightarrow \cos x=\frac{5}{13}$

$\therefore\ 12\operatorname{ctg} x=5$.

Rpta.: B

5. Durante la campaña escolar, un padre de familia compra $N=\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x+3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+9$ cuadernos al precio de $M=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+\sec\frac{\pi}{3}+\csc\frac{\pi}{6}$ soles cada uno. ¿Cuánto paga por los N cuadernos?

A) S/ 45 B) S/ 50 C) S/ 55 D) S/ 40 E) S/ 60

Solución:

$NM=(\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x+3\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+9)(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x+\sec\frac{\pi}{3}+\csc\frac{\pi}{6})$

$=(10)(5)$

$\therefore S/50$

Rpta.: B

6. Cristóbal ayuda a su padre que está pintando la fachada de su casa, sosteniendo la escalera apoyada sobre la pared formando un ángulo de inclinación x con el suelo. Si $\operatorname{tg}x - \operatorname{sen}x = 1$, calcule $\operatorname{sen}x.\cos x + 1$.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución:

$$\operatorname{tg}x - \operatorname{sen}x = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} - \operatorname{sen}x = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x\cos x}{\cos x} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}x - \operatorname{sen}x\cos x = \cos x \Rightarrow \operatorname{sen}x - \cos x = \operatorname{sen}x\cos x$$

$$\Rightarrow (\operatorname{sen}x - \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x \Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} - 2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 1 = \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + 2\operatorname{sen}x\cos x$$

$$\Rightarrow 2 = \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + 2\operatorname{sen}x\cos x + 1$$

$$\Rightarrow 2 = (\operatorname{sen}x\cos x + 1)^2 \qquad \Rightarrow \operatorname{sen}x\cos x + 1 = \sqrt{2}$$

Rpta.: D

7. En la figura, se muestra un terreno de forma rectangular, cuya superficie es $9\,m^2$, si para cercar con alambre el perímetro del terreno se utilizó la menor longitud posible de alambre, calcule $\sec^2\theta$.

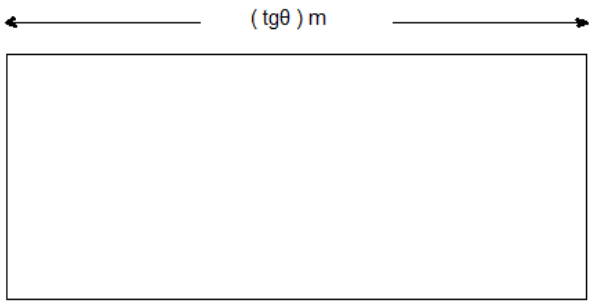
A) 20

B) 15

C) 16

D) 18

E) 10



Solución:

Del enunciado:

$* \; x\,\text{tg}\theta = 9 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{9}{\text{tg}\theta}$

$* \; \text{Perímetro} = 2\,\text{tg}\theta + \dfrac{18}{\text{tg}\theta} \geq 12$

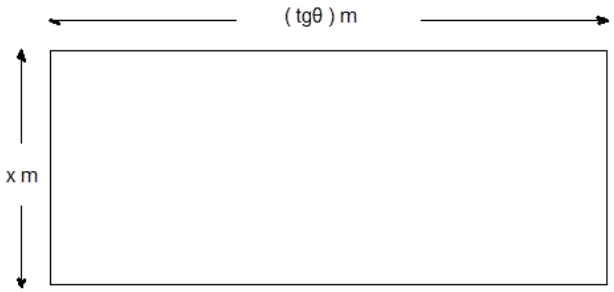
$\rightarrow \quad \text{tg}\theta = 3.$

Luego:

$\sec^2\theta = \text{tg}^2\theta + 1 = 10.$

Recordar:

$a\,x + \dfrac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}; \quad \text{si } a,b \in \mathbb{R}^+; \; x > 0$



Rpta.: E

8. Si $\csc^3\theta - \sec^5\theta = 0$ y el ingreso trimestral de una empresa, en dólares, está dada por la expresión $6000\left(\text{tg}^{10}\theta + 2\text{tg}^8\theta + \text{tg}^6\theta\right)$, donde θ es ángulo agudo. Calcule el ingreso anual de la empresa.

A) \$ 4 000 B) \$ 10 000 C) \$ 15 000 D) \$ 24 000 E) \$ 26 000

Solución:

De la condición:

$$\csc^3\theta = \sec^5\theta$$
$$\text{sen}^3\theta = \cos^5\theta \quad ...(1)$$

Sea I el ingreso trimestral de la empresa

$$\text{I} = 6000\left(\text{tg}^{10}\theta + 2\text{tg}^8\theta + \text{tg}^6\theta\right) = 6000\,\text{tg}^6\theta\left(\text{tg}^4\theta + 2\text{tg}^2\theta + 1\right) = 6000\,\text{tg}^6\theta\left(\text{tg}^2\theta + 1\right)^2$$

$$= 6000\,\text{tg}^6\theta.\sec^4\theta = 6000.\frac{\text{sen}^6\theta}{\cos^{10}\theta} = 6000\left(\frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^5\theta}\right)^2$$

$$\therefore \quad \text{I} = 6000$$

Luego, el ingreso anual de la empresa es 24 000 dólares.

Rpta.: D

9. El ancho de un terreno rectangular mide

$$\frac{4}{1+4\,\text{sen}^2x}+\frac{16}{4+\csc^2 x}+\frac{8}{1+8\cos^2 x}+\frac{64}{8+\sec^2 x}\ \text{metros.}$$

Si el largo del terreno es el doble del ancho y cada metro cuadrado cuesta S/ 800, halle el costo del terreno.

A) S/ 230 400 B) S/ 235 400 C) S/ 220 300
D) S/ 230 300 E) S/ 230 500

Solución:

$$A=\frac{4}{1+4\,\text{sen}^2x}+\frac{16}{4+\csc^2 x}+\frac{8}{1+8\cos^2 x}+\frac{64}{8+\sec^2 x}$$
$$=4\left(\frac{1}{1+4\,\text{sen}^2x}+\frac{4}{4+\csc^2 x}\right)+8\left(\frac{1}{1+8\cos^2 x}+\frac{8}{8+\sec^2 x}\right)$$
$$=4\left(\frac{1}{1+4\,\text{sen}^2x}+\frac{4\,\text{sen}^2x}{1+4\,\text{sen}^2x}\right)+8\left(\frac{1}{1+8\cos^2 x}+\frac{8\cos^2 x}{1+8\cos^2 x}\right)$$
$$=4+8=12$$
$$S=12(24)=288\,m^2$$
$\therefore$ Costo del terreno $=S/\ (288)(800)=S/\,230\,400.$

Rpta.: A

10. Una empresa que ensambla automóviles compra cada motor en $(\text{tg}\,x+240\,\text{ctg}\,x)^2-(\text{tg}\,x-240\,\text{ctg}\,x)^2$ en dólares. ¿Cuánto pagará la empresa por 300 motores?.

A) \$ 298 000 B) \$ 258 000 C) \$ 288 000
D) \$ 388 000 E) \$ 288 500

Solución:

$$(\text{tg}\,x+240\,\text{ctg}\,x)^2-(\text{tg}\,x-240\,\text{ctg}\,x)^2=480+480=960\,\text{dólares}$$
$\therefore$ Costo $=(960)(300)=288\,000$ dólares.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{b}+\dfrac{\cos^2\alpha}{a}=\dfrac{1}{a+b}$, $a<b$, halle $b\,\text{sen}^2\alpha+a\cos^2\alpha-\dfrac{b^2}{a+b}$.

A) $\dfrac{a}{b}$ B) b C) a D) $\dfrac{b}{a}$ E) ab

Solución:

$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{b}+\frac{\cos^2\alpha}{a}=\frac{1}{a+b}\Rightarrow a\,\text{sen}^2\alpha+b\cos^2\alpha=\frac{ab}{a+b}$$

$$\Rightarrow a\,\text{sen}^2\alpha+b(1-\text{sen}^2\alpha)=\frac{ab}{a+b}\Rightarrow(a-b)\text{sen}^2\alpha=\frac{ab}{a+b}-b$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\alpha=-\frac{b^2}{a^2-b^2}\quad \text{y}\quad \cos^2\alpha=1+\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}$$

Luego

$$b\,\text{sen}^2\alpha+a\cos^2\alpha-\frac{b^2}{a+b}=b\left(-\frac{b^2}{a^2-b^2}\right)+a\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)-\frac{b^2}{a+b}$$

$$=\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}-\frac{b^2}{a+b}$$

$$=\frac{a^2+ab}{a+b}=a.$$

Rpta.: C

2. Hallar el valor mínimo de la expresión $(3+\text{sen}^2x)^2+(3+\cos^2x)^2$.

A) 25,5 B) 25,4 C) 24,6
D) 24,4 E) 24,5

Solución:

$$(3+\text{sen}^2x)^2+(3+\cos^2x)^2=18+6(\text{sen}^2x+\cos^2x)+\text{sen}^4x+\cos^4x$$

$$=25-2\,\text{sen}^2x\cdot\cos^2x\geq 25-\frac{1}{2}=\frac{49}{2}$$

$\therefore$ El valor mínimo es 24,5.

Rpta.: E

3. Simplificar la expresión $\dfrac{(1-\sec^2 x)(1-\csc^2 x)}{(\text{tg}^2 x-\text{sen}^2 x)(\text{ctg}^2 x-\cos^2 x)}-\sec^2 x.$

A) $\sec^2 x$ B) $\csc^2 x$ C) $\csc^2 x\cdot\csc^2 x$

D) $\text{tg}^2 x$ E) $\text{ctg}^2 x$

Solución:

$$\frac{(1-\sec^2 x)(1-\csc^2 x)}{(\text{tg}^2 x-\text{sen}^2 x)(\text{ctg}^2 x-\cos^2 x)}-\sec^2 x=\frac{\sec^2 x(1-\cos^2 x)\csc^2 x(1-\text{sen}^2 x)}{\text{tg}^2 x(1-\cos^2 x)\text{ctg}^2 x(1-\text{sen}^2 x)}-\sec^2 x$$

$$=\sec^2 x\cdot\csc^2 x-\sec^2 x$$

$$=\csc^2 x.$$

Rpta.: B

4. Un empresario invierte $\sqrt{10}(\csc^3 x+\text{sen}^3 x)$ en millones de soles en la pesca de anchoveta. Si $\csc^3 x-\text{sen}^3 x=6$, halle la inversión del empresario.

A) 25 millones de soles B) 22 millones de soles

C) 18 millones de soles D) 15 millones de soles

E) 20 millones de soles

Solución:

$\csc^3 x-\text{sen}^3 x=6 \Rightarrow (\csc^3 x-\text{sen}^3 x)^2=36 \Rightarrow \csc^6 x+\text{sen}^6 x=38$

$\Rightarrow \csc^6 x+\text{sen}^6 x+2=40 \Rightarrow (\csc^3 x+\text{sen}^3 x)^2=40$

$\Rightarrow \csc^3 x+\text{sen}^3 x=2\sqrt{10}$

$\therefore \sqrt{10}(\csc^3 x+\text{sen}^3 x)=20$ millones de soles.

Rpta.: E

5. Si $\operatorname{sen} x + \csc x = 6$, halle la altura de un edificio que está determinada por la expresión $\cos^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x$ en metros.

A) 30 metros B) 32 metros C) 34 metros D) 28 metros E) 29 metros

Solución:

$(\operatorname{sen} x + \csc x)^2 = 36 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \csc^2 x = 34.$

Luego, $\cos^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \left(\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \left(\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = (\csc x - \operatorname{sen} x)^2$

$= \csc^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 2$

$= 34 - 2 = 32$ metros.

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $P=\dfrac{2+\text{sen}^6x+\cos^6x}{1+\text{sen}^4x+\cos^4x}$, halle $2P-P^2$.

A) $\dfrac{4}{3}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) $\dfrac{1}{4}$

Solución:

$$P=\frac{2+\text{sen}^6x+\cos^6x}{1+\text{sen}^4x+\cos^4x}=\frac{2+1-3\text{sen}^2x\cdot\cos^2x}{1+1-2\text{sen}^2x\cdot\cos^2x}=\frac{3(1-\text{sen}^2x\cdot\cos^2x)}{2(1-\text{sen}^2x\cdot\cos^2x)}$$

$$\Rightarrow P=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 2P-P^2=\frac{6}{2}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

Rpta.: B

2. Si $\dfrac{\csc^2x-\text{sen}^2x}{\sec^2x-\cos^2x}=\dfrac{M(1+\text{sen}^2x)}{1+\cos^2x}$, halle M.

A) tg^4x B) ctg^2x C) sen^2x D) tg^2x E) ctg^4x

Solución:

$$\frac{M(1+\text{sen}^2x)}{1+\cos^2x}=\frac{\csc^2x-\text{sen}^2x}{\sec^2x-\cos^2x}=\frac{(1-\text{sen}^4x)\cos^2x}{(1-\cos^4x)\text{sen}^2x}$$

$$=\frac{(1-\text{sen}^2x)(1+\text{sen}^2x)\cos^2x}{(1-\cos^2x)(1+\cos^2x)\text{sen}^2x}$$

$$=\frac{(1+\text{sen}^2x)\cos^4x}{(1+\cos^2x)\text{sen}^4x}=\text{ctg}^4x\frac{(1+\text{sen}^2x)}{(1+\cos^2x)}$$

$$\therefore M=\text{ctg}^4x.$$

Rpta.: E

3. Sea $\sec\alpha+\text{tg}\alpha=3$ y $\csc\beta-\text{ctg}\beta=\dfrac{1}{5}$, donde α y β son ángulos agudos. Si la expresión $5(48\sec\alpha+\csc\beta)+5(\text{ctg}\beta-48\,\text{tg}\alpha)$ denota el costo mensual en soles del mantenimiento de un motor, calcule dicho costo.

A) 95 soles B) 110 soles C) 120 soles D) 115 soles E) 105 soles

Solución:

$\sec\alpha+\text{tg}\alpha=3 \Rightarrow \sec\alpha-\text{tg}\alpha=\frac{1}{3}$

$\csc\beta-\text{ctg}\beta=\frac{1}{5} \Rightarrow \csc\beta+\text{ctg}\beta=5$

$$\Rightarrow 5(48\sec\alpha+\csc\beta)+5(\text{ctg}\beta-48\,\text{tg}\alpha)=240(\sec\alpha-\text{tg}\alpha)+5(\csc\beta+\text{ctg}\beta)$$
$$=240(\frac{1}{3})+5(5)$$
$$=105.$$

Rpta.: E

4. Una plancha de aluminio tiene la forma de un sector circular de radio $(4\,\text{sen}\theta)$ m y longitud de arco $(1+\text{sen}\theta)$m. Si el área de dicha plancha es de 2m^2 y el costo por m^2 en soles está dada por la expresión $500\sqrt{\sec^4\theta-\text{ctg}^2\theta}$, determine ¿cuánto cuesta la plancha?.

A) 2 000 soles B) 1 000 soles C) 1 500 soles
D) 1 400 soles E) 1 200 soles

Solución:

Area del sector circular: $2=\frac{4\,\text{sen}\theta(\text{sen}\theta+1)}{2}$

$\Rightarrow \text{sen}^2\theta+\text{sen}\theta=1 \Rightarrow \cos^2\theta=\text{sen}\theta \Rightarrow \sec^2\theta=\csc\theta$

Luego, $500\sqrt{\sec^4\theta-\text{ctg}^2\theta}=500\sqrt{\csc^2\theta-\text{ctg}^2\theta}=500$

$\therefore 2(500)=1\,000$ soles.

Rpta.: B

5. Si $\text{sen}^3\theta=\cos\theta(1+\cos\theta\cdot\text{sen}^3\theta)$ y la utilidad de una empresa, en miles de dólares, está dada por la expresión $4(2\,\text{sen}^{12}\theta+\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta)$, θ ángulo agudo; calcule dicha utilidad.

A) \$ 2 500 B) \$ 3 500 C) \$ 4 000
D) \$ 5 000 E) \$ 4 500

Solución:

$\text{sen}^3\theta\,(1-\cos^2\theta)=\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\text{sen}^5\theta \Rightarrow \cos^2\theta=\text{sen}^{10}\theta$

Luego, $4(2\text{sen}^{12}\theta+\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta)=4(2\text{sen}^{10}\theta\cdot\text{sen}^2\theta+\text{sen}^4\theta+\cos^4\theta)$

$=4(2\cos^2\theta\cdot\text{sen}^2\theta+1-2\text{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta)$

$=4.$

$\therefore$ La utilidad es de \$4 000.

Rpta.: C

6. Dos ciudades A y B están unidas mediante una autopista rectilínea. Un automóvil sale de la ciudad A hacia la ciudad B con velocidad constante de $3(\sec^4 x-\text{tg}^4 x+1)$ km/h, donde x es un ángulo agudo, y después de $(4\cos^2 x)$ horas sufre un desperfecto. Si la distancia entre las ciudades A y B es 30km, ¿a qué distancia de la ciudad B se produjo el desperfecto?.

A) 8 km B) 4 km C) 5km D) 6 km E) 7km

Solución:

Sea $AB=AC+CB$, donde C es el lugar donde se produce el desperfecto

$\Rightarrow 30=4\cos^2 x[3(\sec^4 x-\text{tg}^4 x+1)]+CB$

$\Rightarrow CB=30-12\cos^2 x[(\sec^2 x-\text{tg}^2 x)(\sec^2 x+\text{tg}^2 x)+1]$

$\Rightarrow CB=30-12\cos^2 x\,(\sec^2 x+\text{tg}^2 x+1)$

$\Rightarrow CB=30-12\cos^2 x\,(2\sec^2 x)$

$\therefore CB=30-24=6\text{km}.$

Rpta.: D

7. Una empresa de telefonía móvil predice que sus utilidades mensuales están dadas por la expresión $\text{sen}^2 t+\cos t,\ 0\le t\le 12$, para el t-ésimo mes del año comercial 2019. ¿En qué mes o meses obtendrá las mayores utilidades?

A) Marzo y abril
B) Enero, abril y mayo
C) Febrero, junio, agosto y diciembre
D) Febrero, marzo, julio y setiembre
E) Enero, agosto, noviembre y diciembre

Solución:

$$\text{sen}^2 t + \cos t = 1 - (\cos^2 t - \cos t) = 1 - (\cos^2 t - \cos t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4})$$

$$= \frac{5}{4} - (\cos t - \frac{1}{2})^2,\ t \in [0, 12]$$

La expresión toma su valor máximo cuando $\cos t = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow t = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \approx 1{,}014, \text{ que corresponde al segundo mes.} \\ \frac{5\pi}{3} \approx 5{,}23, \text{ que corresponde al sexto mes.} \\ \frac{7\pi}{3} \approx 7{,}322, \text{ que corresponde al octavo mes.} \\ \frac{11\pi}{3} \approx 11{,}506, \text{ que corresponde al doceavo mes.} \end{cases}$$

$\therefore$ La mayor utilidad se obtiene en los meses de febrero, junio, agosto y diciembre.

Rpta.: C

8. Hallar el valor de la expresión $\dfrac{\sqrt{16(1+\text{sen}\,x + \cos x)^4(\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x + 2)}}{(\sec x + \text{sen}\,x \cdot \sec x)(\csc x + \cos x \cdot \csc x)}$, donde x es un ángulo agudo.

A) $\sec x \cdot \csc x$ B) 8 C) $\text{sen}\,x + \cos x$
D) 7 E) 6

Solución:

$$\frac{\sqrt{16(1+\text{sen}\,x + \cos x)^4(\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x + 2)}}{(\sec x + \text{sen}\,x \cdot \sec x)(\csc x + \cos x \cdot \csc x)} = \frac{4(1+\text{sen}\,x + \cos x)^2\sqrt{\sec^2 x + \csc^2 x}}{(1+\text{sen}\,x)(1+\cos x)\sec x \cdot \csc x}$$

$$= \frac{4 \cdot 2(1+\text{sen}\,x)(1+\cos x)}{(1+\text{sen}\,x)(1+\cos x)}$$

$$= 8.$$

Rpta.: B

9. El precio de lista y el descuento en miles de dólares de un producto en un centro comercial están determinadas por las expresiones $\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta$ y $\frac{\sqrt{5}}{8}(\text{sen}^3\theta - \cos^3\theta)$ respectivamente, siendo $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Halle el precio de venta de dicho producto si el precio de lista es de 0,52 en miles de dólares.

A) \$ 420 B) \$ 249 C) \$ 345 D) \$ 348 E) \$ 396

Solución:

Denotamos por:

Precio de lista = PL, Descuento = D y Precio de venta = PV

$\Rightarrow PV = PL - D$

(1) $PL = \text{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\,\text{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta = 0{,}520$

$\Rightarrow 0{,}480 = 3\,\text{sen}^2\theta\cdot\cos^2\theta \Rightarrow 0{,}4 = \text{sen}\theta\cdot\cos\theta$

(2) $D = \frac{\sqrt{5}}{8}(\text{sen}^3\theta - \cos^3\theta) = \frac{\sqrt{5}}{8}(\text{sen}\theta - \cos\theta)(1 + \text{sen}\theta\cdot\cos\theta)$

$= \frac{\sqrt{5}}{8}\sqrt{(\text{sen}\theta - \cos\theta)^2}\,(1 + \text{sen}\theta\cdot\cos\theta)$

$= \frac{\sqrt{5}}{8}\sqrt{1 - 2\,\text{sen}\theta\cdot\cos\theta}\,(1 + \text{sen}\theta\cdot\cos\theta)$

$= \frac{\sqrt{5}}{8}\sqrt{1 - 2(0{,}4)}\,(1 + 0{,}4) = \frac{\sqrt{5}}{8}\sqrt{\frac{1}{5}}\,(1{,}4) = 0{,}175$

$\therefore PV = 0{,}520 - 0{,}175 = 0{,}345$ miles de dólares = 345 dólares.

Rpta.: C

10. El ingreso trimestral de una empresa minera es $3\csc 20^o + 3\sec 20^o\cdot\text{ctg}^3 20^o(1 + \sec^2 20^o)$ millones de soles. Calcule el ingreso anual de la empresa.

A) $24\csc^3 20^o$ millones de soles

B) $24\sec^3 20^o$ millones de soles

C) $23\csc^3 20^o$ millones de soles

D) $25\,\text{ctg}^3 20^o$ millones de soles

E) $24\,\text{tg}^3 20^o$ millones de soles

Solución:

$$3\csc 20^o + 3\sec 20^o \cdot \text{ctg}^3 20^o (1+\sec^2 20^o) = 3[\csc 20^o + \frac{\cos^3 20^o (1+\cos^2 20^o)}{\cos^3 20^o \cdot \text{sen}^3 20^o}]$$

$$= 3(\csc 20^o + \csc^3 20^o + \frac{\cos^2 20^o}{\text{sen}^3 20^o}) = 3(\frac{\text{sen}^2 20^o + \cos^2 20^o}{\text{sen}^3 20^o} + \csc^3 20^o)$$

$= 6\ \csc^3 20^o$ ingreso trimestral $= 24\ \csc^3 20^o$ millones de soles es el ingreso anual.

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\text{tg}\,x = \sqrt[3]{3}$, halle el valor de la expresión $\dfrac{\text{sen}^6 x + 7\cos^6 x}{\text{sen}^6 x - \cos^6 x}$.

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{4}{3}$ C) 4 D) 2 E) 3

Solución:

$$\frac{\text{sen}^6 x + 7\cos^6 x}{\text{sen}^6 x - \cos^6 x} = \frac{\text{tg}^6 x + 7}{\text{tg}^6 x - 1} = \frac{9+7}{9-1} = 2.$$

Rpta.: D

2. Un terreno de cultivo de forma rectangular tiene $(1+\text{ctg}\,x + \csc x)$m de largo y $[40(1+\text{ctg}\,x - \csc x)\text{tg}\,x]$m de ancho, donde el ángulo x es agudo. Si cada metro cuadrado del terreno cuesta 1 800 soles, calcule el precio del terreno.

A) S/ 140 000 B) S/ 144 000 C) S/ 145 000
D) S/ 160 000 E) S/ 130 000

Solución:

$$(1+\text{ctg}\,x + \csc x)[40(1+\text{ctg}\,x - \csc x)\text{tg}\,x] = 40\text{tg}\,x[(1+\text{ctg}\,x)^2 - \csc^2 x]$$

$$= 40\text{tg}\,x\,(1+\text{ctg}^2 x + 2\text{ctg}\,x - \csc^2 x) = 40\text{tg}\,x \cdot 2\text{ctg}\,x = 80$$

Luego, precio del terreno $= 80(1800) = 144\ 000$ soles.

Rpta.: B

3. Para el primer cumpleaños de Pablito se compra la cantidad de $\dfrac{400(\text{sen}^6x+\cos^6 x-1)}{\cos^4 x+\text{sen}^4x-1}$ chupetines, donde x es un ángulo agudo. Si cada docena de chupetines cuesta 6 soles, ¿cuánto se pagó por la compra?.

A) S/ 300 B) S/ 250 C) S/ 330 D) S/ 280 E) S/ 310

Solución:

$$\frac{400(\text{sen}^6x+\cos^6 x-1)}{\cos^4 x+\text{sen}^4x-1}=\frac{400(1-3\text{sen}^2x\cdot\cos^2 x-1)}{1-2\text{sen}^2x\cdot\cos^2 x-1}$$

$=400(\frac{3}{2})=600$ que equivale a 50 docenas

$\therefore 50(6 \text{ soles})=300$ soles.

Rpta.: A

4. Sea $100\left(\dfrac{\text{sen}^6x-\cos^6 x}{\sec^3 x-\csc^3 x}\right)=N(\text{sen}^3x\cdot\cos^3 x-\text{sen}^4x\cdot\cos^4 x)(\text{sen}\,x+\cos x)$, donde x es un ángulo agudo. Si N denota la cantidad de lapiceros que compra un comerciante y cada lapicero cuesta cinco soles, ¿cuánto pagó el comerciante por la compra de los N lapiceros?.

A) S/ 520 B) S/ 550 C) S/ 450 D) S/ 480 E) S/ 500

Solución:

$$N(\text{sen}^3x\cdot\cos^3 x-\text{sen}^4x\cdot\cos^4 x)(\text{sen}\,x+\cos x)=100\left(\frac{\text{sen}^6x-\cos^6 x}{\sec^3 x-\csc^3 x}\right)$$

$$=100\left(\frac{\text{sen}^3x\cdot\cos^3 x\,(\text{sen}^3x-\cos^3 x)(\text{sen}^3x+\cos^3 x)}{\text{sen}^3x-\cos^3 x}\right)$$

$$=100\,\text{sen}^3x\cdot\cos^3 x\,(\text{sen}\,x+\cos x)(1-\text{sen}x\cdot\cos x)$$

$$=100(\text{sen}\,x+\cos x)(\text{sen}^3x\cdot\cos^3 x-\text{sen}^4x\cdot\cos^4 x)$$

$\Rightarrow N=100$

$\therefore$ El precio de los N lapiceros $=5(100)$soles $=500$ soles.

Rpta.: E

5. Si $0<x<\dfrac{\pi}{4}$, simplificar la expresión

$$\sqrt{\sec^2 x+\csc^2 x}\left(1+\sqrt{1-4\text{sen}^2x\cdot\cos^2 x}\right).$$

A) $2\text{tg}\,x$ B) $-2\text{ctg}\,x$ C) $-2\text{tg}\,x$ D) $2\text{ctg}\,x$ E) $\text{ctg}^2 x$

Solución:

$$\sqrt{\sec^2 x + \csc^2 x}\left(1+\sqrt{1-4\,\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}\right)=\sqrt{\sec^2 x\cdot\csc^2 x}\left(1+\sqrt{1-4\,\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}\right)$$

$$=\left|\sec x\cdot\csc x\right| + \sqrt{\sec^2 x\cdot\csc^2 x - 4\sec^2 x\cdot\csc^2 x\cdot\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}$$

$$=\left|\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x\right| + \sqrt{1+\text{tg}^2 x+1+\text{ctg}^2 x-4}$$

$$=\left|\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x\right| + \sqrt{(\text{tg}\,x-\text{ctg}\,x)^2}$$

$$=\left|\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x\right| + \left|\text{tg}\,x-\text{ctg}\,x\right|$$

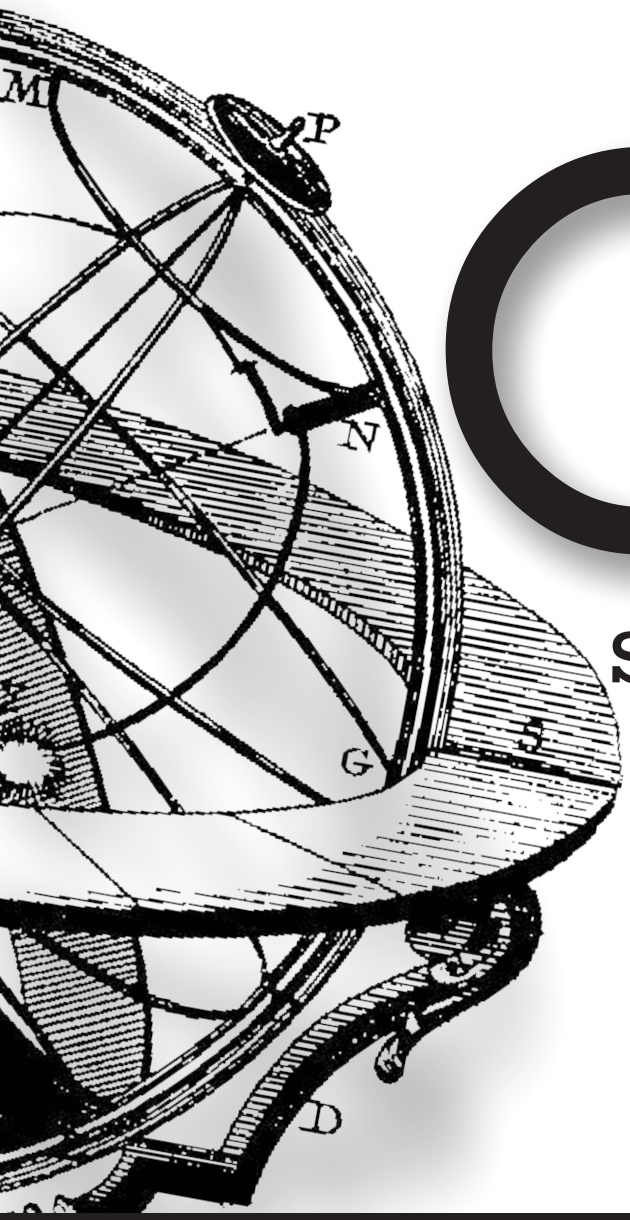
$$=\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x-\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x$$

$$=2\,\text{ctg}\,x.$$

Rpta.: D

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



08

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

SEMANA Nº 8

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE ÁNGULOS

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad ; \quad \tan\alpha\ \tan\beta \neq 1$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE ÁNGULOS

$$\text{sen}(\alpha-\beta) \quad \text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta) \quad \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad ; \quad \tan\alpha\ \tan\beta \neq -1$$

$$\cot(\alpha\pm\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha} \quad ; \quad \cot\beta \neq \mp\cot\alpha$$

3. IDENTIDADES AUXILIARES

$$\text{sen}(A+B)\text{sen}(A-B) = \text{sen}^2A - \text{sen}^2B$$

$$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \text{sen}^2B$$

Geometría

EJERCICIOS

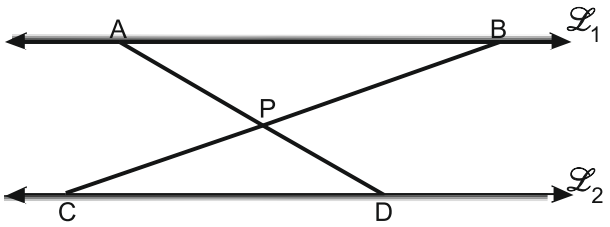
1. En la figura, ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas y representan las orillas de un río. Para poder cruzar de una orilla a otra se han construido caminos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ secantes en P. Una persona recorre los tramos $\overline{CP}$ y $\overline{PB}$ cuyas longitudes son 30 m y 36 m respectivamente y otra persona recorre el tramo $\overline{AP}$ de longitud 24 m. Halle la longitud del tramo $\overline{PD}$.

A) 22 m

B) 20 m

C) 26 m

D) 28 m

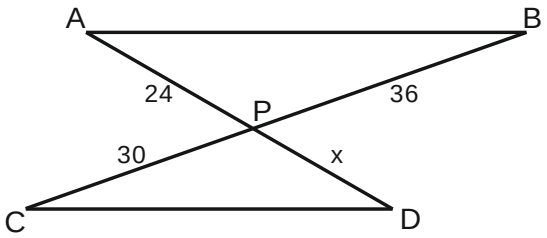


Solución:

- Por Thales:

$$\frac{24}{x} = \frac{36}{30}$$

$\therefore$ x = 20 m



Rpta.: B

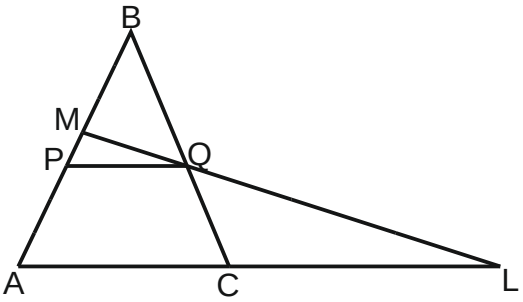
2. En la figura, $\overline{PQ} // \overline{AC}$, AP = MB, QL = 3MQ y QC = 12 cm. Halle BQ.

A) 16 cm

B) 15 cm

C) 14 cm

D) 18 cm



Solución:

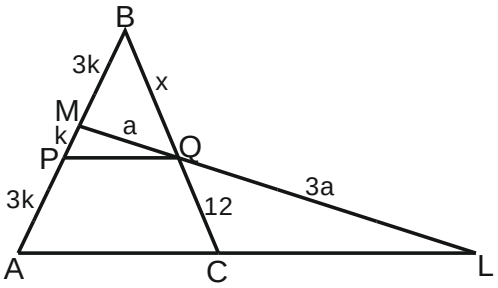
- ΔAML: T. Thales

  MP = k y AP = 3k

- ΔABC: T. Thales

$$\frac{4k}{3k} = \frac{x}{12}$$

$\therefore$ x = 16 cm



Rpta.: A

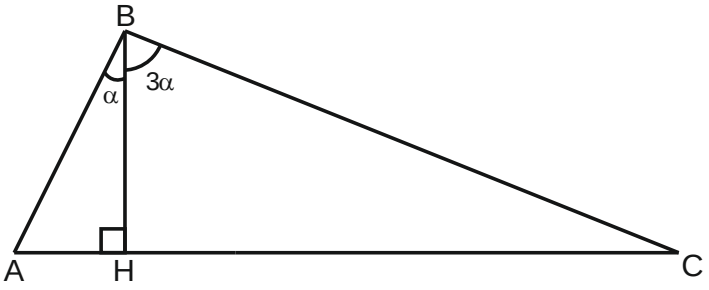
3. En la figura, BC = 2AB y AH = 2 cm. Halle HC.

A) 11 cm

B) 9 cm

C) 10 cm

D) 12 cm



Solución:

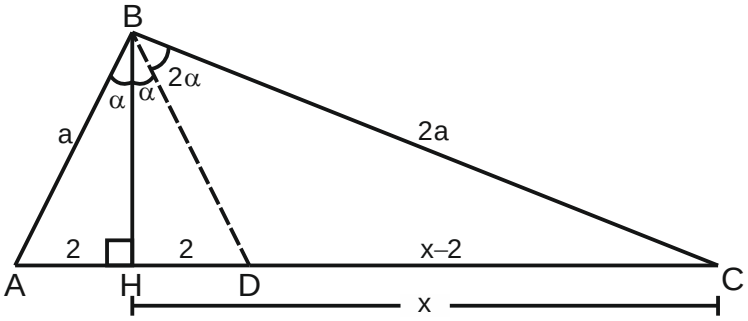
- ΔABC isósceles

  $\rightarrow$ AH = HD = 2 cm

- ΔABC: TBI

  $\frac{a}{2a} = \frac{4}{x-2}$

  $\therefore$ x = 10 cm



Rpta.: C

4. En un triángulo escaleno ABC, m$\widehat{ABC}$ = 120° y numéricamente $\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{8}$. Halle la longitud de la bisectriz interior $\overline{BD}$ en centímetros.

A) 8 cm B) 7 cm C) 6 cm D) 9 cm

Solución:

- ΔABC: TBI

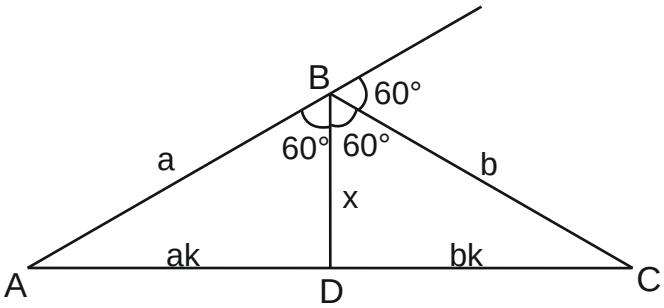
  AD = ak y DC = bk

- ΔABC: TBE

  $\frac{a}{x} = \frac{(a+b)k}{bk}$

  $\frac{1}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$

  $\therefore x = 8$ cm



Rpta.: A

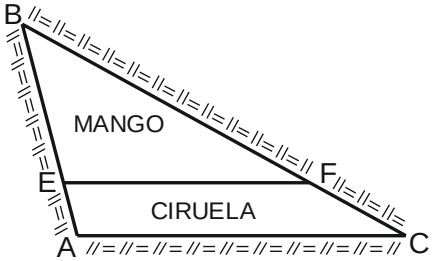
5. En la figura, el triángulo ABC representa un terreno de cultivo dividido por el lindero EF tal que $\overline{EF} // \overline{AC}$, los linderos del terreno son AB = 16 m y BC = 32 m, AC = 24 m. Si los perímetros de los cultivos de mango y ciruela son iguales, halle la longitud del lindero $\overline{EF}$.

A) 15 m

B) 16 m

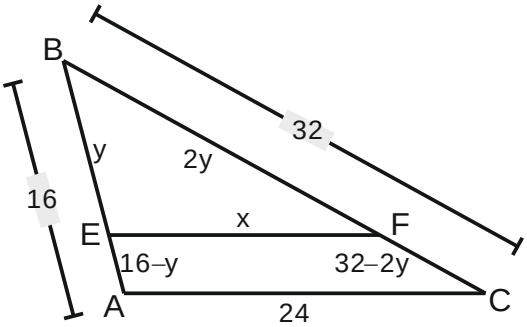
C) 17 m

D) 18 m



Solución:

- $\Delta EBF \sim \Delta ABC$ (A-A)
  BE = y, BF = 2y
- Condición:
  3y + x = 72 – 3y + x
  y = 12
- $\Delta EBF \sim \Delta ABC$ (A-A)
  Semejanza:
  $\frac{12}{16} = \frac{x}{24}$
  $\therefore$ x = 18 m



Rpta.: D

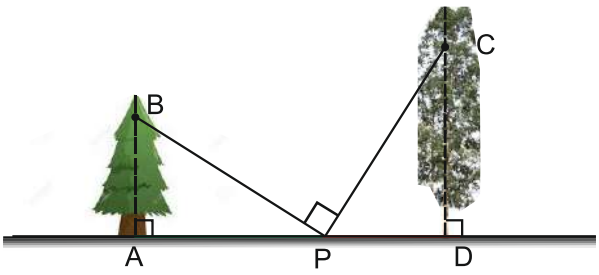
6. La figura muestra un pino y un eucalipto perpendiculares al suelo cuyas alturas de B y C son 15 m y 20 m respectivamente, debido a los constantes vientos los troncos de ambos árboles están sujetos con cables tensados a una estaca en P. Si 3AP = 4PD y A, P y D son colineales, halle PC.

A) 22 m

B) 24 m

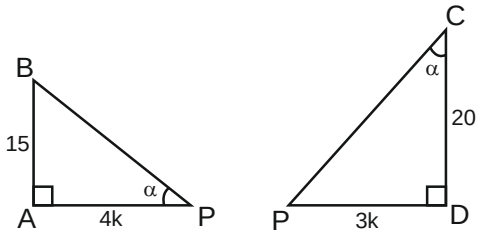
C) 25 m

D) 20 m



Solución:

- ◺BAP ~ ◺PDC
- $\frac{15}{3k} = \frac{4k}{20}$
- CP = 5(5) $\therefore$ CP = 25 m



Rpta.: C

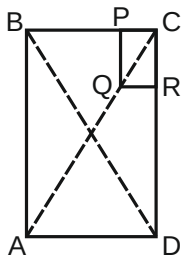
7. En la figura, ABCD representa el borde de un terreno cuyo perímetro es 50 m y PQRC el borde de una caseta de vigilancia. Si las diagonales de los rectángulos ABCD y PQRC están en relación de 5 a 2. Halle el perímetro de la caseta.

A) 25 m

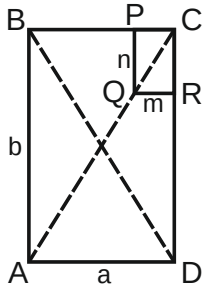
B) 20 m

C) 28 m

D) 30 m



Solución:



- Por semejanza de rectángulos:

$$\frac{AC}{QC}=\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$$

$$\frac{5}{2}=\frac{2(a+b)}{2(m+n)}=\frac{50}{(2p)}$$

$$\therefore (2p)=20 \text{ m}$$

Rpta.: B

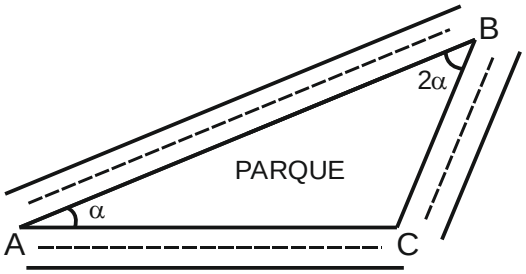
8. La figura muestra la vista de un parque limitado por tres avenidas tal que AB = 30 m y BC = 24 m. Halle el perímetro del parque ABC.

A) 95 m

B) 80 m

C) 90 m

D) 100 m



Solución:

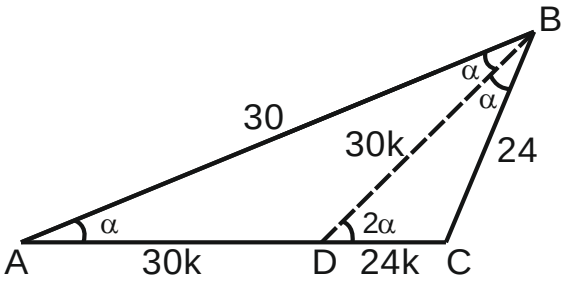
- ΔADB isósceles:

  AD = DB = 30k

- $\Delta ADB \sim \Delta BCD$

$$\frac{30}{30k}=\frac{54k}{24}\rightarrow k=\frac{2}{3}$$

- AC = $54\left(\frac{2}{3}\right)$ = 36 m



- $2p_{ABC}$ = 36 + 24 + 30 = 90 m

Rpta.: C

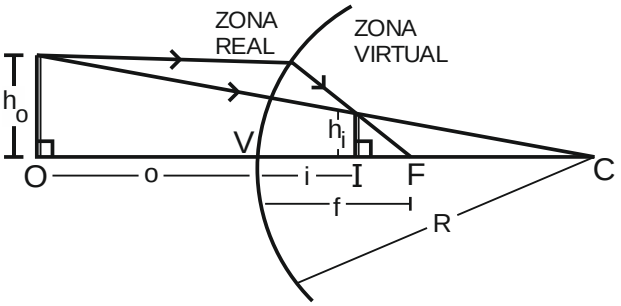
9. La figura muestra un espejo esférico convexo, donde C es el centro, F es el foco, O es el objeto, I es la imagen, VF = FC y la ecuación de los focos conjugados para convexos es $\frac{1}{i}=\frac{1}{f}+\frac{1}{o}$. Si un objeto de h_o = 30 cm de altura se encuentra a o = 60 cm del espejo y el radio es R = 60 cm, halle la altura de la imagen h_i.

A) 12 cm

B) 11 cm

C) 10 cm

D) 14 cm



Solución:

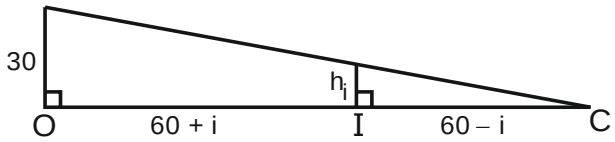
- Reemplazando en: $\frac{1}{i}=\frac{1}{f}+\frac{1}{o}$

  $\Rightarrow \frac{1}{i}=\frac{1}{30}+\frac{1}{60} \Rightarrow i = 20$ cm

- Semejanza:

  $\frac{30}{h_i}=\frac{120}{40}$

  $\therefore h_i = 10$ cm



Rpta.: C

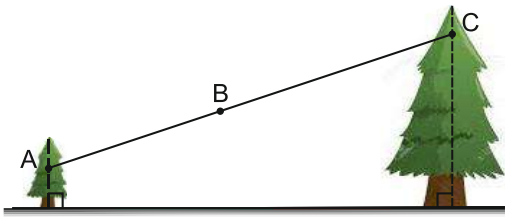
10. En la figura, los árboles están en posición vertical respecto al suelo. Para cada árbol, los puntos A y C están a 3 m y 9 m del suelo, respectivamente, de modo que se unen con un cable tensado $\overline{AC}$. Si una paloma se ubica en el punto B del cable tensado, halle la altura que se encuentra la paloma respecto al suelo.

A) 5,0 m

B) 6,0 m

C) 5,5 m

D) 6,5 m

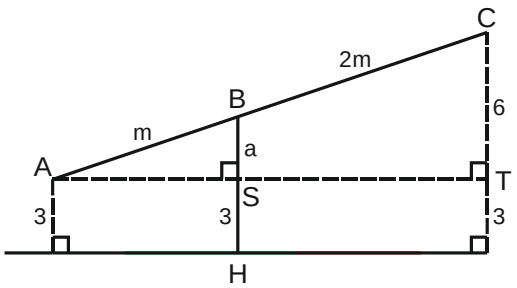


Solución:

- ◺ASB ~ ◺ATC

  $\frac{m}{3m}=\frac{a}{6} \rightarrow a = 2$

- Altura = BH = 2 + 3 = 5 m



Rpta.: A

11. En el triángulo acutángulo ABC, las cevianas $\overline{AD}$ y $\overline{BF}$ se intersectan en E, D en $\overline{BC}$ y F en $\overline{AC}$. Si FC = 3AF, BE = 2EF y BC = 24 cm, halle BD.

A) 6 cm B) 7 cm C) 8 cm D) 9 cm

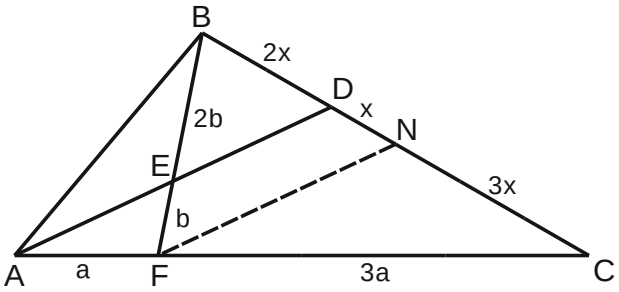
Solución:

- Trazar $\overline{FN} // \overline{AD}$
- Por T. Thales:

  BD = 2x, DN = x y NC = 3x
- 2x + x + 3x = 24

  2x = 8

  ∴ BD = 8 cm



Rpta.: C

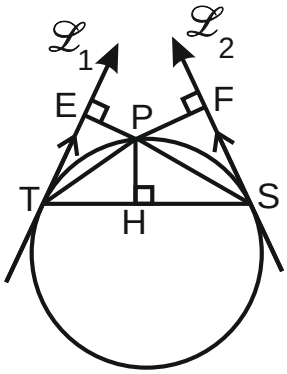
12. En la figura se muestran las pistas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\overline{TS}$ y una circular, dos móviles parten simultáneamente desde los puntos T y S siguiendo tangencialmente $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. Si una persona ubicada en P está directo a 40 m y 90 m de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente, halle la distancia de dicha persona a la pista $\overline{TS}$.

A) 55 m

B) 60 m

C) 65 m

D) 70 m



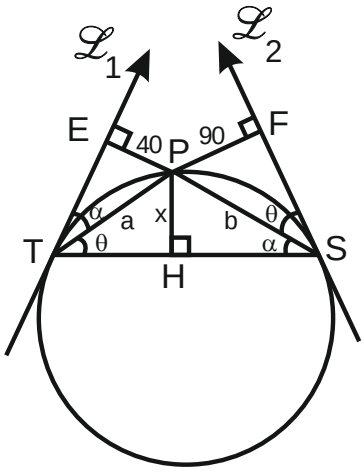
Solución:

- ◺TEP ~ ◺SHP

  $\frac{a}{b} = \frac{40}{x}$
- ◺THP ~ ◺SFP

  $\frac{a}{b} = \frac{x}{90}$
- $\frac{40}{x} = \frac{x}{90}$

  ∴ x = 60 m



Rpta.: B

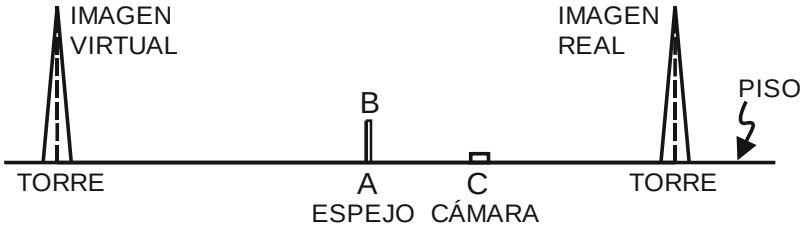
13. En la figura se muestra un espejo plano $\overline{AB}$ de 1 m de altura perpendicular al piso y una torre de 31 m de altura, tal que se desea fotografiar la torre con una cámara situada a 58 m de la torre. Si la imagen real está a igual distancia que la imagen virtual, halle la distancia entre el espejo y la cámara de modo que la torre se observe en todo el espejo.

A) 1 m

B) 2 m

C) 1,5 m

D) 2,5 m



Solución:

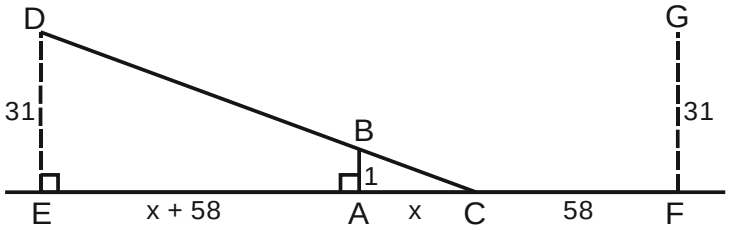
- Dato:

  EA = AF = x + 58

- ◺DEC ~ ◺BAC

  $\frac{31}{1} = \frac{2x+58}{x}$

  $\therefore x = 2$ m



Rpta.: B

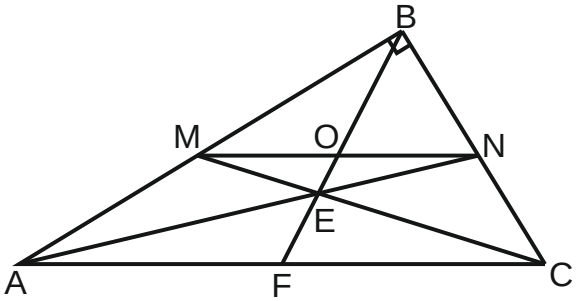
14. En la figura, $\overline{MN} // \overline{AC}$. Si BO = 6 cm, MO = ON y EF = 4 cm, halle AC.

A) 24 cm

B) 22 cm

C) 20 cm

D) 18 cm



Solución:

- Propiedad:

  MO = ON = BO = 6 y AF = FC = 10 + x

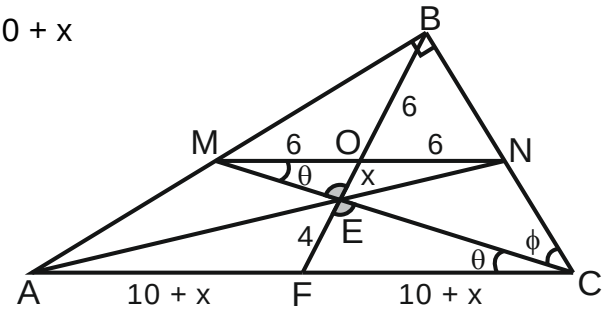
- ΔMEO ~ ΔCEF (A-A)

  $\frac{6}{10+x} = \frac{x}{4}$

- $x^2 + 10x - 24 = 0$

  $\rightarrow x = 2$

  $\therefore$ AC = 2(10 + 2) = 24 cm



Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

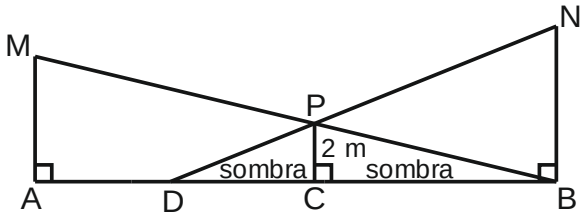
1. Dos postes de luz ubicados en A y en B tienen alturas de 4,5 m y 5 m respectivamente y producen una sombra sobre el suelo de $\overline{CB}$ y $\overline{DC}$ como muestra la figura. Si CB = 6 m y DC = 4 m, halle AD.

A) 3 m

B) 3,5 m

C) 4 m

D) 5 m

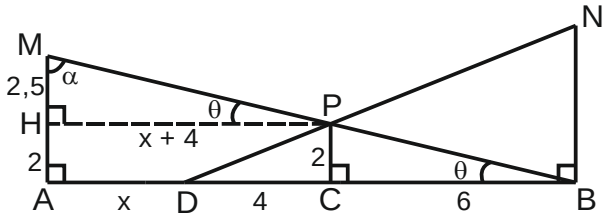


Solución:

- ◺MHP ~ ◺PCB (A-A)

$$\frac{2,5}{2} = \frac{x+4}{6}$$

$$\therefore\ x = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ m}$$



Rpta.: B

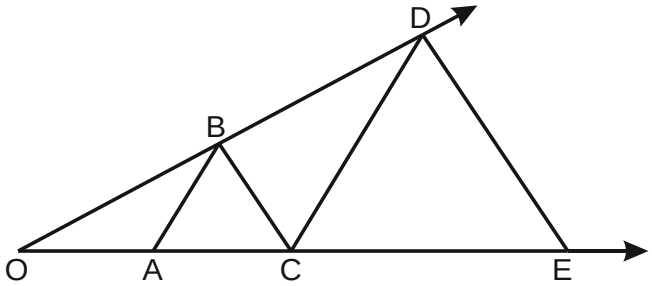
2. En la figura, $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{BC} // \overline{DE}$. Si OA = 9 cm y OE = 36 cm, halle AC.

A) 9 cm

B) 10 cm

C) 11 cm

D) 8 cm



Solución:

- Por teorema de Thales:

  OB = 9k y BD = xk

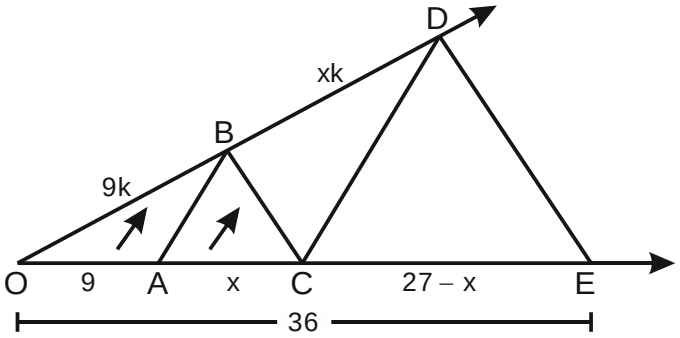
- Por teorema de Thales:

$$\frac{9k}{xk} = \frac{9+x}{27-x}$$

$243 - 9x = 9x + x^2$

$0 = x^2 + 18x - 243$

$\therefore$ AC = 9 cm

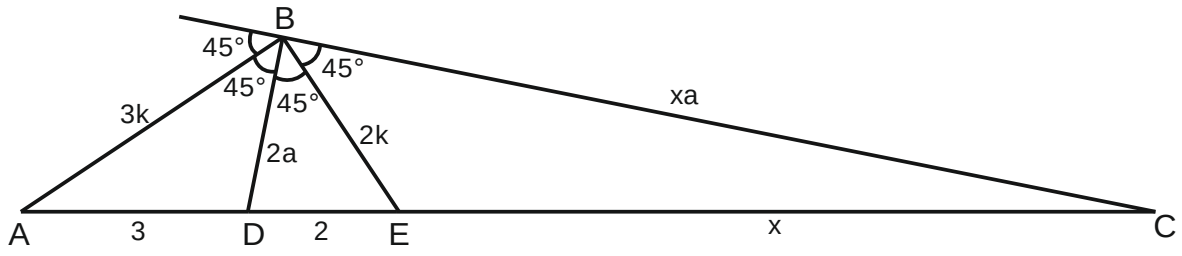


Rpta.: A

3. En un triángulo obtusángulo ABC obtuso en B se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ (D en $\overline{AE}$) tal que AD = 3 cm, DE = 2 cm y $m\widehat{ABD} = m\widehat{DBE} = m\widehat{EDC} = 45°$. Halle EC.

A) 10 cm B) 11 cm C) 12 cm D) 13 cm

Solución:



- ΔABE: TBI: AB = 3k, BE = 2k
- ΔDBC: TBE: $\dfrac{xa}{2a} = \dfrac{3+2+x}{3}$

  $\therefore$ x = 10 cm

Rpta.: A

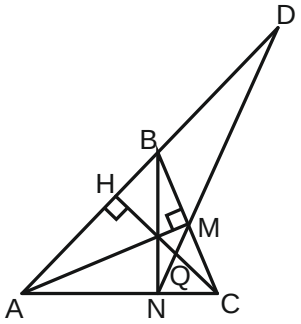
4. En cierto momento, Nancy, María y Daniel se encuentran juntos en el punto H, según la figura, luego se dirigen cada uno a N, M y D respectivamente. Si NQ = 3 m y QM = 2 m, halle la distancia entre Daniel y María.

A) 12 m

B) 8 m

C) 9 m

D) 10 m



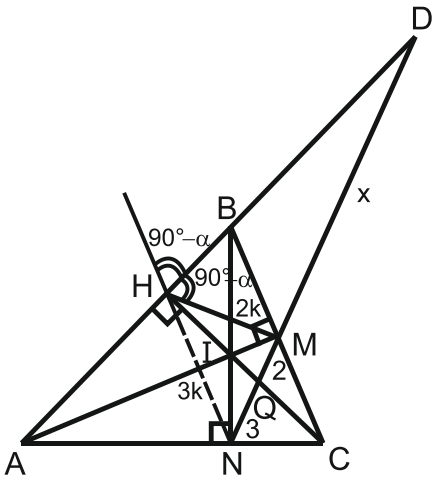
Solución:

- ⏢AHMC y ⏢AHIN: inscriptibles

  $\rightarrow m\widehat{MAC} = m\widehat{MHC} = m\widehat{NHI} = \alpha$
- $\overline{HD}$ es bisectriz exterior
- ΔNHM: T.B.E.

  $\dfrac{3k}{2k} = \dfrac{5+x}{x}$

  $\therefore$ x = 10 m



Rpta.: D

5. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las cevianas concurrentes $\overline{AH}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CF}$, H en $\overline{BC}$, P en $\overline{AC}$ y F en $\overline{AB}$, tal que AP = 2 cm, AF = 3 cm, BF = 6 cm, BH = 4 cm y PC = 8 cm. Halle HC.

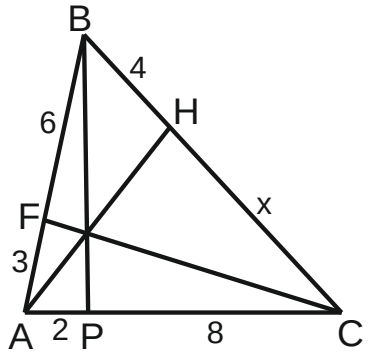
A) 7 cm B) 8 cm C) 9 cm D) 6 cm

Solución:

- ΔABC: T. de Ceva

  $3 \cdot 4 \cdot 8 = 6 \cdot x \cdot 2$

  $\therefore$ x = 8 cm



Rpta.: B

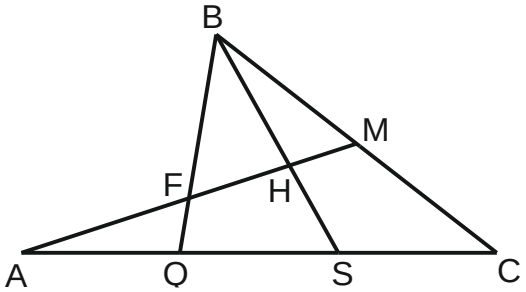
6. En la figura, AM = 40 cm, BM = MC y AQ = QS = SC. Halle FH.

A) 15 cm

B) 14 cm

C) 13 cm

D) 12 cm



Solución:

- ΔBCQ: $\overline{MS} // \overline{BQ}$

- ΔSAM: T. Base media

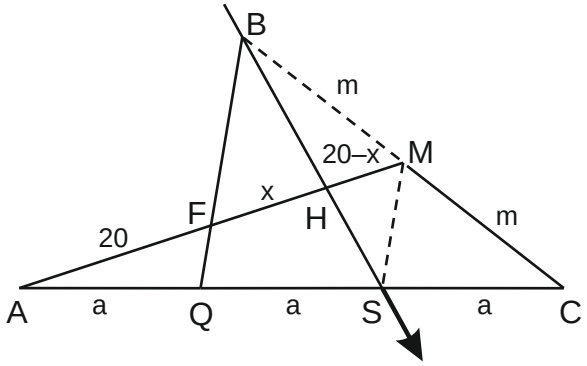
  $\rightarrow$AF = FM = 20

- ΔCAM: Teorema de Menelao

  $a \cdot (20 + x) \cdot m = 2a \cdot (20 - x) \cdot 2m$

  $\rightarrow$ x = 12

  $\therefore$ FH = 12 cm



Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS DE LA SEMANA Nº 8

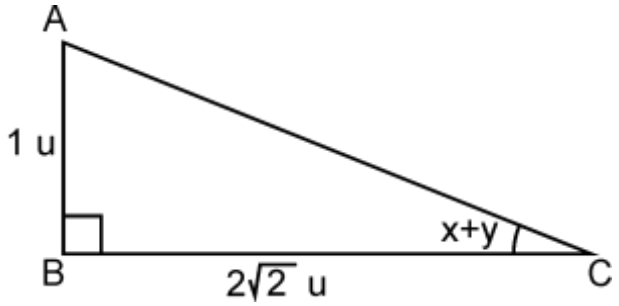
1. En la figura adjunta se representa el triángulo rectángulo ABC. En base a la información dada, determine $\text{sen}(135° - x - y)$.

A) $\dfrac{\sqrt{2}+4}{3}$

B) $\dfrac{\sqrt{2}+4}{6}$

C) $\dfrac{2\sqrt{2}+4}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}+3}{6}$



Solución:

A partir de la información brindada en la representación gráfica, se obtiene la medida del segmento AC aplicando el Teorema de Pitágoras; esto es:

$AC = 3\text{ u}$.

Nos piden $H = \text{sen}(135° - x - y) = \text{sen}\left[180° - (45° + x + y)\right] = \text{sen}\left(45° + (x + y)\right)$

Entonces $H = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4}{6} + \dfrac{\sqrt{2}}{6} = \dfrac{4+\sqrt{2}}{6}$.

Rpta.: B

2. Se sabe que $7N$ representa la cantidad de años que le falta a Valentina para obtener la mayoría de edad, de acuerdo a las leyes peruanas. Si $\text{sen}(\alpha+\beta) - 8\text{sen}(\alpha-\beta) = 0$ y $N = \tan\alpha \cdot \cot\beta$, determine la edad actual de Valentina.

A) 8 B) 11 C) 9 D) 10

Solución:

A partir de la información brindada, se tiene que:

$\text{sen}(\alpha+\beta) - 8\text{sen}(\alpha-\beta) = 0$

Entonces $\text{sen}(\alpha+\beta) = 8\text{sen}(\alpha-\beta)$

Entonces $9\text{sen}\beta\cos\alpha = 7\text{sen}\alpha\cos\beta$

Luego, $\dfrac{9}{7} = \tan\alpha \cdot \cot\beta$

Por lo tanto, $7N = \underbrace{9}_{\text{EDAD de VALENTINA}}$

Luego, la edad actual de Valentina es de 9 años.

Rpta.: C

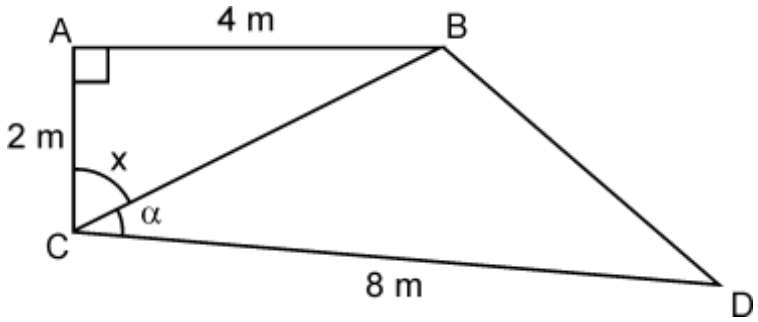
3. Con la información dada en la figura, halle $\left(\sqrt{3}-2\right)\tan\left(x+\alpha\right)$ si se sabe, además, que el área de la región triangular BCD es $4\sqrt{5}\ m^2$.

A) $2\sqrt{3}+1$

B) $2\sqrt{3}-1$

C) $2\sqrt{2}+1$

D) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$



Solución:

En el triángulo ABC, por el Teorema de Pitágoras, se obtiene que: $CB=2\sqrt{5}$ m

Luego, $\text{Área}_{\triangle}(BCD)=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}\right)\left(8\text{sen}\alpha\right)=4\sqrt{5}$

Entonces, $\text{sen}\alpha=\frac{1}{2}$

Por lo tanto, $\alpha=\frac{\pi}{6}$

Por consiguiente, $\tan\left(x+\alpha\right)=\dfrac{2+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-2}$

Por lo tanto, $\left(\sqrt{3}-2\right)\tan\left(x+\alpha\right)=2\sqrt{3}+1$.

Rpta.: A

4. Se sabe que 2R representa la cantidad de dinero en dólares que Antonio gastó en dulces. Si $R=4\cos^2 x+4\text{sen}^2 y-8\text{sen}x\cos y\cos x\text{sen}y-8\cos^2 x\text{sen}^2 y$, donde 3x y 3y son ángulos agudos y $\cos\left(720°-3y\right)=-\text{sen}\left(1440°-3x\right)$; determine la cantidad de dinero que Antonio gastó en dulces.

A) \$ 4 B) \$ 8 C) \$ 6 D) \$ 10

Solución:

Sea $R=4\left(\cos^2 x-\cos^2 x\text{sen}^2 y+\text{sen}^2 y-\cos^2 x\text{sen}^2 y-2\text{sen}x\cos y\cos x\text{sen}y\right)$

Entonces $R=4\left[\cos^2 x\left(1-\text{sen}^2 y\right)+\text{sen}^2 y\left(1-\cos^2 x\right)-2\text{sen}x\cos y\cos x\text{sen}y\right]$

Entonces $R=4\left(\cos^2 x\cos^2 y+\text{sen}^2 y\text{sen}^2 x-2\text{sen}x\cos y\cos x\text{sen}y\right)$

Entonces $R = 4(\cos x \cos y - \text{sen}x\text{sen}y)^2$

Entonces $R = 4\cos^2(x+y)$

Como $\cos(720° - 3y) = -\text{sen}(1440° - 3x)$, entonces $\cos 3y = \text{sen}3x$

Por lo tanto, $x + y = \frac{\pi}{6}$

Luego, $R = 4\cos^2(x+y) = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3$.

Finalmente, Antonio gastó en dulces 6 dólares.

Rpta.: C

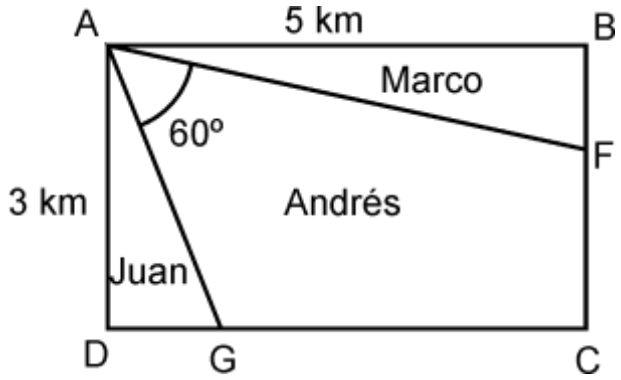
5. En la figura, se representa un terreno en litigio de forma rectangular. Después de diversos trámites judiciales, llegaron al acuerdo de que este sea repartido entre los tres accionistas mayoritarios Juan, Andrés y Marco. Si se sabe que Juan y Marco recibieron partes iguales, calcule $DG^2 + \frac{34}{\sqrt{3}}DG$.

A) 50

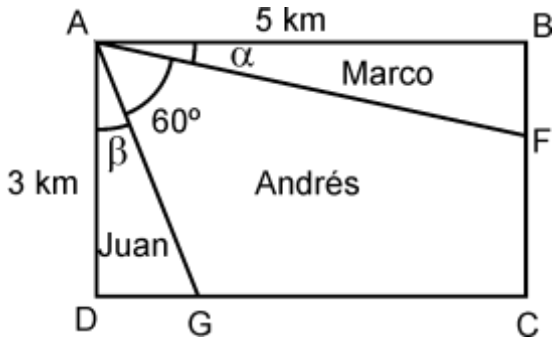
B) 30

C) 45

D) 25



<u>Solución</u>:
A partir de la información brindada y del gráfico se tiene que:



$$\frac{5BF}{2} = \frac{3DG}{2} \quad \Rightarrow \quad BF = \frac{3}{5}DG$$

Además, se tiene que: $\tan\alpha = \frac{BF}{5} = \frac{3}{25}DG \quad \wedge \quad \tan\beta = \frac{DG}{3}$

Por lo tanto, $\tan 30° = \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\dfrac{3DG}{25}+\dfrac{DG}{3}}{1-\dfrac{DG^2}{25}}$

Finalmente, nos piden: $\sqrt{3}\left(25-DG^2\right)=34DG$.

Entonces $DG^2+\dfrac{34}{\sqrt{3}}DG=25$.

Rpta.: D

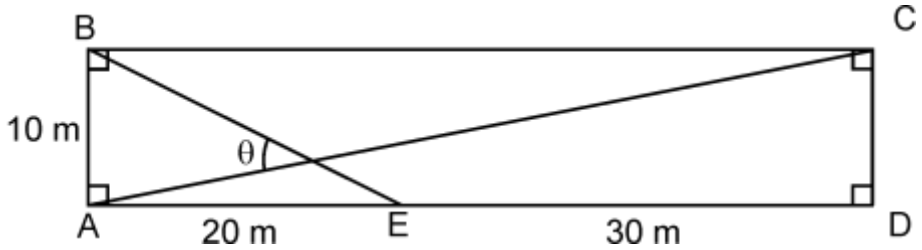
6. El Sr. Alejandro Leyva decide vender el terreno de forma rectangular que se representa en la figura adjunta a $(900\ \tan\theta)$ soles el metro cuadrado. Determine la cantidad de dinero que recibe el Sr. Leyva, si se sabe que solo logra vender la región de forma triangular BAE.

A) S/. 50 000

B) S/. 70 000

C) S/. 60 000

D) S/. 80 000

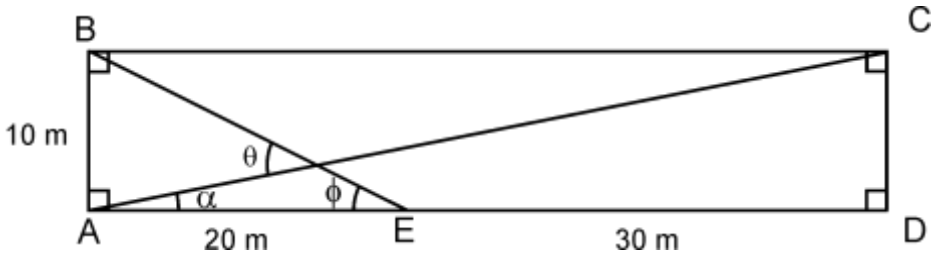


<u>Solución</u>:

A partir de la representación gráfica, podemos notar que:

$\theta=\alpha+\phi$

Entonces



$$\tan\theta=\tan(\alpha+\phi)=\frac{\tan\alpha+\tan\phi}{1-\tan\alpha.\tan\phi}=\frac{7}{9}$$

Por lo tanto, el pago que recibe el Sr. Alejandro Leyva por la venta del área vendida es de S/. 70 000.

Rpta.: B

7. Un terreno que tiene la forma de sector circular tiene las siguientes medidas: el ángulo central mide $(\cos\beta)$rad, el radio $(\cos\alpha)$u y el arco de circunferencia m u. Si $\operatorname{sen}\alpha=n\csc\beta$, ¿cuál es la relación entre $\cos(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$?

A) $\dfrac{m-n}{m+n}$ B) $\dfrac{m^2+n^2}{m-n}$ C) $\dfrac{m-2n}{n+2m}$ D) $\dfrac{m+n}{n+1}$

Solución:

A partir de la información dada, se tiene que $m = \cos\alpha\cos\beta$

Por otro lado, como $\operatorname{sen}\alpha = n\csc\beta \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = n$

Luego,

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = n \quad y \quad \cos\alpha\cos\beta = m$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - n = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ m + n = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - n = \cos(\alpha+\beta) \\ m + n = \cos(\alpha-\beta) \end{cases} \Rightarrow \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{m-n}{m+n}.$$

Rpta.: A

8. Las estaturas de Fabiana y Lucero son $1{,}2\left(\cos 20^o + \sqrt{3}\operatorname{sen}20^o\right)m$ y $1{,}3\left(\sqrt{3}\cos 10^o - \operatorname{sen}10^o\right)m$, respectivamente. Determine la razón entre las edades de Fabiana y Lucero.

A) $\frac{13}{11}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{12}{13}$ D) $\frac{10}{13}$

Solución:

A partir de la información brindada, denotamos:

$F =$ Estatura de Fabiana

$L =$ Estatura de Lucero

$R =$ Razón entre las estaturas de Fabiana y Lucero

Luego, nos piden la razón entre las estaturas de Fabiana y Lucero.

Por lo tanto, $R = \dfrac{1{,}2\left(\cos 20^o + \sqrt{3}\operatorname{sen}20^o\right)}{1{,}3\left(\sqrt{3}\cos 10^o - \operatorname{sen}10^o\right)} = \dfrac{2{,}4\left(\frac{1}{2}\cos 20^o + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}20^\circ\right)}{2{,}6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^o - \frac{1}{2}\operatorname{sen}10^o\right)}$

Entonces $R = \dfrac{2{,}4\ (\operatorname{sen}50^o)}{2{,}6\ (\operatorname{sen}50^o)} = \dfrac{12}{13}$.

Rpta.: C

9. En el año 1965, el puntaje máximo obtenido en el Examen de Admisión a la carrera de Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos fue $2M$. Si se sabe que Raúl Moisés ingresó en primer lugar a Matemática ese año y que M es el máximo valor que asume esta expresión $24\cos x - 7\operatorname{sen}x + 35$, determine el puntaje que obtuvo Raúl Moisés.

A) 120 puntos B) 126 puntos C) 110 puntos D) 116 puntos

Solución:

A partir de la información brindada, consideremos:

$P(x) = 24\cos x - 7\text{sen}x + 35$

Entonces $P(x) = 25\left(\frac{24}{25}\cos x - \frac{7}{25}\text{sen}x\right) + 35$

Entonces $P(x) = 25\text{sen}(\alpha - x) + 35$

Como $-1 \le \text{sen}(\alpha - x) \le 1 \quad \Rightarrow \quad -25 \le 25\text{sen}(\alpha - x) \le 25$

Luego $-25 + 35 \le 25\text{sen}(\alpha - x) + 35 \le 25 + 35$

Entonces $10 \le P(x) \le \underbrace{60}_{\text{Máximo Puntaje}}$

Por lo tanto, en el Examen de Admisión a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Raúl Moisés obtuvo 120 puntos en su ingreso a la carrera de Matemática.

Rpta.: A

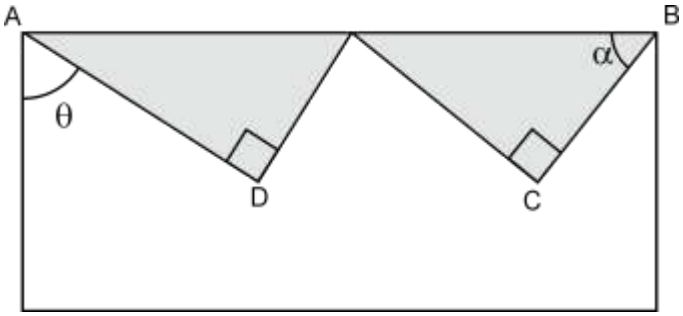
10. En la figura adjunta, se representa una ventana de forma rectangular, en la cual se han colocado unos banderines de forma triangular hechos de papel metálico (región sombreada). Si $AD = BC = 20$ cm y $\cos(\theta - \alpha) = \text{sen}\theta\cos\alpha$, determine la cantidad de papel metálico que se utilizó para elaborar dichos banderines.

A) 0,15 m^2

B) 0,5 m^2

C) 0,02 m^2

D) 0,25 m^2

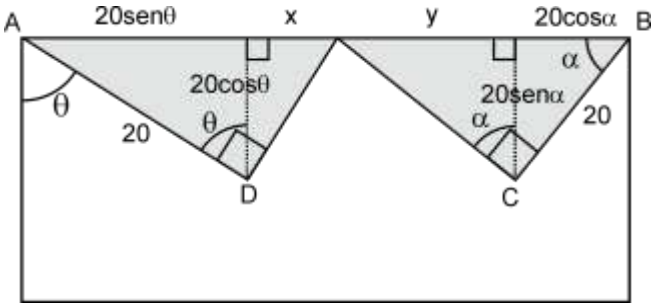


Solución:

A partir de la información dada en la representación gráfica, se tiene:

$$\frac{x}{20\cos\theta} = \text{ctg}\theta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20\cos^2\theta}{\text{sen}\theta}$$

$$\frac{y}{20\text{sen}\alpha} = \text{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad y = \frac{20\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$$



Luego,

$$\text{Área} = \frac{20\cos\theta}{2}\left(20\text{sen}\theta + \frac{20\cos^2\theta}{\text{sen}\theta}\right) + \frac{20\text{sen}\alpha}{2}\left(\frac{20\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} + 20\cos\alpha\right)$$

$$\text{Área} = 200\left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} + \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) = 200\left[\frac{\cos(\theta - \alpha)}{\text{sen}\theta\cos\alpha}\right] = 200 \text{ cm}^2 = 0{,}02 \text{ m}^2.$$

Por lo tanto, para elaborar dichos banderines se utilizó $0{,}02\ m^2$ de papel metálico.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Las edades de los hijos de mi hermana son $(6\tan\alpha)$ años y $(7\tan\beta)$ años. Si se sabe que $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ y $\tan\alpha=\frac{1}{6}$, determine la diferencia de sus edades en años.

A) 6 años B) 4 años C) 8 años D) 7 años

Solución:

A partir de la información brindada, se tiene: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

Entonces $\tan(\alpha+\beta)=1$

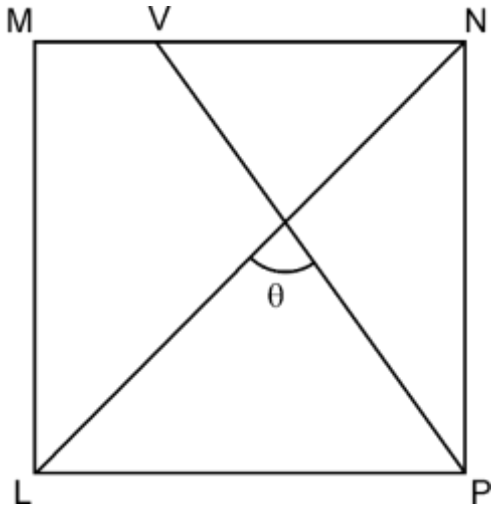
Luego, $\dfrac{\frac{1}{6}+\tan\beta}{1-\frac{1}{6}\tan\beta}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{6}+\tan\beta=1-\frac{\tan\beta}{6}$

Por lo tanto, $\dfrac{7\tan\beta}{6}=\dfrac{5}{6} \quad\Rightarrow\quad 7\tan\beta=5$

Luego, las edades de mis sobrinos son 1 año y 5 años. Por lo tanto, la diferencia de sus edades es de 4 años.

Rpta.: B

2. En la figura, el cuadrado representa un parque. Luisa **(L)**, Maggie **(M)**, Nora **(N)** y Pierina **(P)** se encuentran ubicadas en las esquinas de dicho parque, como se indica en la figura. Si Víctor **(V)** se encuentra ubicado a 2 metros de Maggie y a 5 metros de Nora, calcule $\cot\theta$.



A) 6

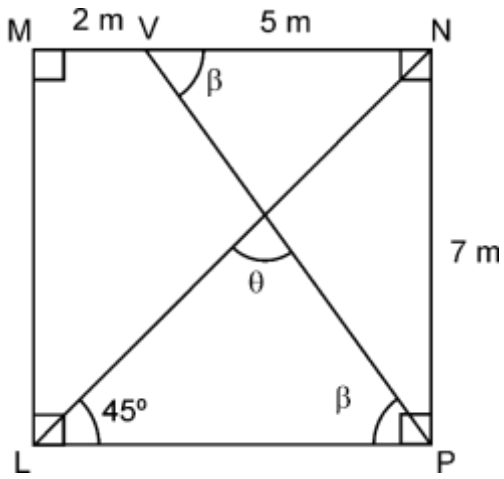
B) 5

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{5}$

Solución:

A partir de la representación gráfica, se tiene:



$45° + \theta + \beta = 180° \quad \Rightarrow \quad \theta + \beta = 180° - 45°$

Luego, $\tan\theta + \frac{7}{5} = \frac{7\tan\theta}{5} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\tan\theta}{5} = \frac{12}{5}$

Entonces $\cot\theta = \frac{1}{6}$.

Rpta.: C

3. Si la edad de mi mejor amigo Mario es el máximo valor de la expresión $B = (3\text{sen}\alpha + 4\cos\alpha)^2 + 12$ y la cantidad de años que no lo veo viene a ser el máximo valor de $T = \text{sen}\beta + \sqrt{3}\cos\beta + 1$, determine la edad que tenía mi mejor amigo la última vez que lo vi.

A) 34 años B) 36 años C) 38 años D) 32 años

Solución:

A partir de la información brindada, se tiene:

$$B = (3\text{sen}\alpha + 4\cos\alpha)^2 + 12 = \left[5\left(\frac{3}{5}\text{sen}\alpha + \frac{4}{5}\cos\alpha\right)\right]^2 + 12$$

Entonces $B = 25\text{sen}^2(\alpha + x) + 12$

Como $-1 \le \text{sen}(\alpha + x) \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le 25\text{sen}^2(\alpha + x) \le 25$

Luego $12 \le 25\text{sen}^2(\alpha + x) + 12 \le 25 + 12$

Entonces $12 \le B \le \underbrace{37}_{\text{EDAD DE MARIO}}$

Asimismo, $T = \text{sen}\beta + \sqrt{3}\cos\beta + 1 = 2\text{sen}\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Entonces $-1 \le T \le \underbrace{3}_{\text{AÑOS QUE NO VEO A MARIO}}$

Por lo tanto, la última vez que vi a mi mejor amigo, él tenía 34 años de edad.

Rpta.: A

4. El número de hermanos que tiene Cristóbal viene dado por el valor de la expresión $(1 + \cot 50°)(1 + \tan 5°)$. En base a la información dada, determine la cantidad de hermanos que tiene Cristóbal.

A) 3 B) 1 C) 2 D) 0

Solución:

A partir de la información brindada, se tiene:

$$(1+\cot 50°)(1+\tan 5°)=(1+\text{tg}40°)(1+\tan 5°)=1+\underbrace{\tan 5°+\tan 40°+\tan 40°\tan 5°}_{1}=2$$

Por lo tanto, Cristóbal tiene 2 hermanos.

Rpta.: C

5. El profesor de Tomás, al hallar el valor aproximado de la expresión $\text{sen}^2\theta$ obtiene $0{,}16$. Si se sabe que Tomás obtiene el valor real de dicha expresión considerando que $\tan(765°+\theta)+\tan(405°-\theta)=3$, determine el error porcentual.

Sugerencia: Considere que el error porcentual se define de la siguiente manera:

$$\text{Error Porcentual}=\left(\frac{\text{Valor Exacto} - \text{Aproximación}}{\text{Valor Exacto}}\right)\cdot 100\%$$

A) 6 % B) 8 % C) 5 % D) 4 %

Solución:

Como

$$\tan(765°+\theta)+\tan(405°-\theta)=3 \Rightarrow \tan\left(2(360°)+45°+\theta\right)+\tan(360°+45°-\theta)=3$$

Entonces

$$\tan(45°+\theta)+\tan(45°-\theta)=3$$

Es decir,

$$\tan(45°+\theta)+\tan(45°-\theta)=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1+2\tan\theta+\tan^2\theta+1-2\tan\theta+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}=3$$

Luego, $5\tan^2\theta=1$

Por lo tanto, $5\text{sen}^2\theta=\cos^2\theta$

De donde se puede obtener que: $\text{sen}^2\theta=\frac{1}{6}$

Finalmente, $\text{Error Porcentual}=\left(\dfrac{\frac{1}{6}-0{,}16}{\frac{1}{6}}\right)\cdot 100\%=4\%$

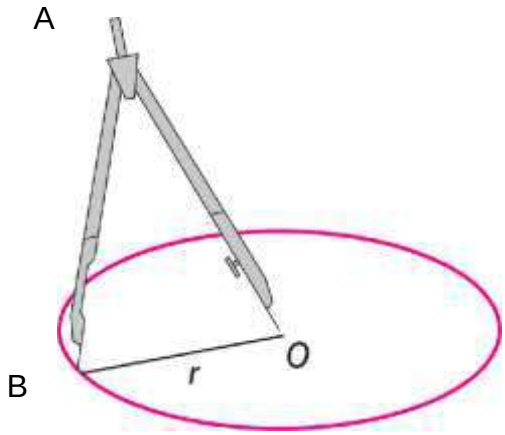
Por lo tanto, el error porcentual es de 4 %.

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Un arquitecto utiliza un compás en el trazo de sus planos. En un momento dado, los extremos B y O forman con la superficie un triángulo ABO según el gráfico. Si la tangente del ángulo BAO es 11/10 y la altura trazada desde A divide BO en dos segmentos de longitudes 3 cm y 7 cm, ¿cuál es el área de la región triangular ABO?



A) $100\ cm^2$ B) $56{,}5\ cm^2$ C) $60\ cm^2$ D) $50\sqrt{2}\ cm^2$ E) $55\ cm^2$

Solución:

Al trazar la altura AH = h, sobre BO divide el ángulo ABO en x e y

$$tg(x+y)=\frac{11}{10}\quad,\quad tg\,x=\frac{3}{h}\quad,\quad tg\,y=\frac{7}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{h}+\frac{7}{h}}{1-\frac{3}{h}\times\frac{7}{h}}=\frac{11}{10}\quad\Rightarrow\ 0=11h^2-100h-21\times 11$$

$$(11h+21)(h-11)=0\quad\Rightarrow\quad h=11 \qquad \text{Área}=\frac{11\times 10}{2}=55\ cm^2$$

Rpta.: E

2. En un triángulo ABC, simplifique

$$\frac{\cos(A+B)}{\text{sen}A\ \text{sen}B}+\frac{\cos(A+C)}{\text{sen}A\ \text{sen}C}+\frac{\cos(B+C)}{\text{sen}B\text{sen}C}$$

A) -2 B) -1 C) 2 D) 1 E) -3

Solución:

$$M = \frac{\cos A\cos B - \text{sen}A\,\text{sen}B}{\text{sen}A\,\text{sen}B} + \frac{\cos A\cos C - \text{sen}A\,\text{sen}C}{\text{sen}A\,\text{sen}C} + \frac{\cos B\cos C - \text{sen}B\,\text{sen}C}{\text{sen}B\,\text{sen}C}$$

$$= \text{ctg}A\,\text{ctg}B - 1 + \text{ctg}A\,\text{ctg}C - 1 + \text{ctg}B\,\text{ctg}C - 1$$

$$= \text{ctg}A\,\text{ctg}B + \text{ctg}A\,\text{ctg}C + \text{ctg}B\,\text{ctg}C - 3$$

$$= \frac{1}{\text{tg}A}\frac{1}{\text{tg}B} + \frac{1}{\text{tg}A}\frac{1}{\text{tg}C} + \frac{1}{\text{tg}B}\frac{1}{\text{tg}C} - 3$$

$$= \frac{\text{tg}C + \text{tg}B + \text{tg}A}{\text{tg}A\ \text{tg}B\ \text{tg}C} - 3 = 1 - 3 = -2$$

Rpta.: A

3. Determine el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{\cos(45° - \theta)\sqrt{2}}{\text{sen}\theta} - \text{ctg}\theta$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) -2

Solución:

$$U = \frac{(\cos 45°\cos\theta + \text{sen}45°\text{sen}\theta)\sqrt{2}}{\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$$

$$U = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \text{sen}\theta)\sqrt{2}}{\text{sen}\theta} - \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} = 1$$

Rpta.: A

4. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $\text{tg}(15° + 90°) = \dfrac{\text{tg}15° + \text{tg}90°}{1 - \text{tg}15°\text{tg}90°}$

ii. $\text{sen}30° - \text{sen}78°\cos 72° = \text{sen}12°\cos 18°$

iii. $\text{sen}(x + 30°) = \cos x.\cos 30° - \text{sen}x.\text{sen}30°$, para algún ángulo x.

A) VVV B) VFV C) FFV D) FVV E) VVF

Solución:

i. $\text{tg}90°$ no existe. (F)

ii. $\text{sen}30° - \text{sen}78°\cos 72° = \text{sen}12°\cos 18°$
$\text{sen}30° - \cos 12°\text{sen}18° = \text{sen}12°\cos 18°$ (V)
$\text{sen}30° = \text{sen}12°\cos 18° + \cos 12°\text{sen}18°$

iii. $\text{sen}(x+30°) = \cos x.\cos 30° - \text{sen}x.\text{sen}30°$
$\text{sen}(x+30°) = \cos(x+30°)$ luego, para $x = 15°$ cumple. (V)

Rpta.: D

5. Al simplificar la expresión $(\text{tg}25° + \text{tg}35° + \sqrt{3}\text{tg}25°\text{tg}35°)^2 + \text{tg}55° + \text{tg}20°$ se obtiene:

A) $\sqrt{3} + \csc 50°$
B) $\sqrt{3}\sec 40°$
C) $3 + \csc 50°$
D) $3 + \csc 40°$
E) $\sqrt{3} + \sec 50°$

Solución:

$$\left[\left(\frac{\text{tg}25° + \text{tg}35°}{1 - \text{tg}25°\text{tg}35°}\right)(1 - \text{tg}25°\text{tg}35°) + \sqrt{3}\text{tg}25°\text{tg}35°\right]^2 + \frac{\text{sen}50°}{\cos 50°} + \frac{\text{sen}20°}{\cos 20°}$$

$$= \left[\text{tg}60°(1 - \text{tg}25°\text{tg}35°) + \sqrt{3}\text{tg}25°\text{tg}35°\right]^2 + \frac{\text{sen}50°\cos 20° + \text{sen}20°\cos 50°}{\cos 50°\cos 20°}$$

$$= 3 + \frac{\text{sen}70°}{\cos 50°\cos 20°} = 3 + \sec 50° = 3 + \csc 40°$$

Rpta.: D

6. En la figura, se muestra el perfil de las instalaciones de tuberías de agua hacia las viviendas A, B, C y D. Calcule la longitud de tubería que se utilizó para la instalación de agua en la vivienda A.

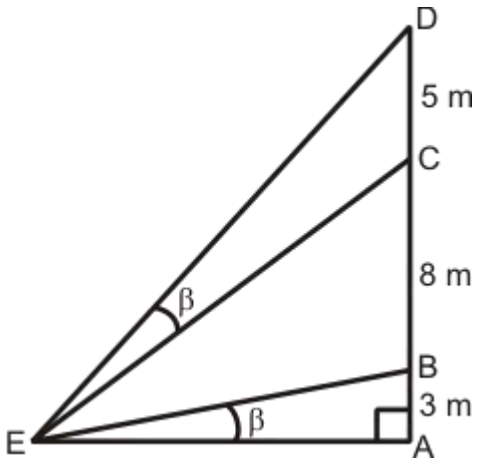
A) $2\sqrt{66}$ m

B) 16 m

C) 18 m

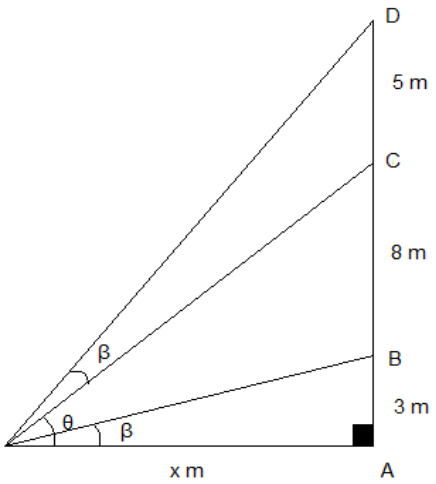
D) $\sqrt{247}$ m

E) 20 m



Solución:

Del gráfico:



$* \ \text{tg}\beta = \frac{3}{x}; \quad \text{tg}(\theta+\beta) = \frac{11}{x}; \quad \text{tg}(\theta+2\beta) = \frac{16}{x}$

$* \ \frac{16}{x} = \frac{\frac{11}{x}+\frac{3}{x}}{1-\frac{11}{x}.\frac{3}{x}} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{264} = 2\sqrt{66}$

Rpta.: A

7. La función $P(x) = 12\text{sen}x + 5\cos x + 20$, modela el costo de producción en soles de un producto ferretero. Si se vende 5 docenas a 40 soles por unidad, ¿cuál será la máxima ganancia del fabricante?

A) S/. 1980 B) S/. 1640 C) S/. 2100 D) S/. 1860 E) S/. 1760

Solución:

Costo de producción por unidad

$P(x) = 12\text{sen}x + 5\cos x + 20$

$P(x) = 13\left(\frac{12}{13}\text{sen}x + \frac{5}{13}\cos x\right) + 20$

$P(x) = 13\text{sen}(x+\alpha) + 20$; donde α es un ángulo agudo con $\text{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

Como

$-1 \le \text{sen}(x+\alpha) \le 1 \rightarrow -13 \le 13\text{sen}(x+\alpha) \le 13$

$\rightarrow 7 \le 13\text{sen}(x+\alpha) + 20 \le 33 \rightarrow 7 \le P(x) \le 33$

Costo de producción mínimo: 7 soles por producto.

Costo de producción de 5 docenas: 60x7 soles =420 soles

Ganancia máxima:

$G = (60\times 40 - 60\times 7)$ soles.

$G = 1980$ soles

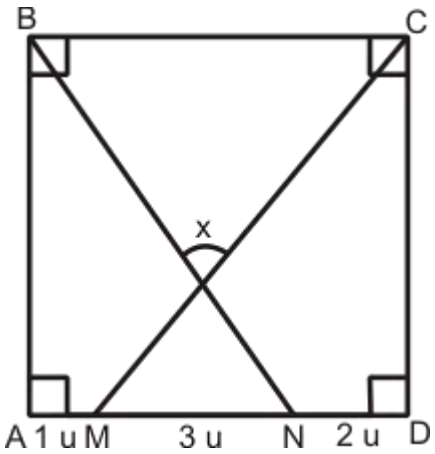
Nota : $G = P_V - P_C$

P_V :Precio de venta

P_C :Precio de costo

Rpta.: A

8. Si el costo por pintar el metro cuadrado de la región cuadrangular ABCD (tal como se muestra en la figura adjunta) es $(8\text{tg}x+33)$ soles.



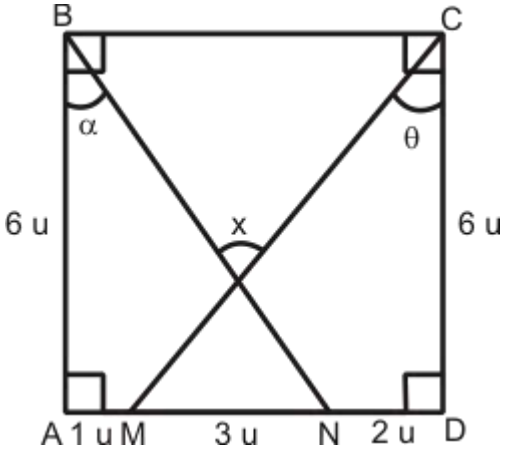
Calcule el costo por pintar la región triangular BAN.

A) S/. 500 B) S/. 600

C) S/. 720 D) S/. 800

E) S/. 900

<u>Solución</u>:



Del gráfico tenemos que:

$x=\alpha+\theta$, luego:

$$\text{tg}x=\text{tg}(\alpha+\theta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\theta}{1-\text{tg}\alpha\text{tg}\theta}=\frac{27}{8}$$

Luego el costo por 1 m^2 es $(8\text{tg}x+33)$ soles, es decir 60 soles.
El área de la región triangular BAN es 12 m^2, por lo tanto el costo por pintarlo es 720 soles.

Rpta.: C

9. Ryu y Ken postularon a San Marcos y sacaron los puntajes de

$$R=\frac{640\sqrt{2}\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\text{sen}x+\sqrt{3}\cos x\right)}{\left(\text{sen}x+\cos x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)} \quad \text{y} \quad K=\frac{750\left(\text{tg}1°+\text{tg}44°+\text{tg}1°.\text{tg}44°\right)}{\text{sen}\left(\frac{49\pi}{6}\right)},$$

respectivamente. Halle la diferencia de puntajes entre ambos postulantes.

A) 220 B) 200 C) 170 D) 120 E) 180

Solución:

$$R=\frac{640\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x\right)}{\left(\operatorname{sen}x+\cos x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}$$

$$K=\frac{750\left(\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}44^\circ+\operatorname{tg}1^\circ.\operatorname{tg}44^\circ\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{49\pi}{6}\right)}$$

$$R=\frac{640\cancel{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}2\cancel{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}}{\cancel{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}}$$

$$K=\frac{750.\operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

$R=1280$

$K=1500$

$K-R=1500-1280=220$

Rpta.: A

10. Si $N=\cos 20^o+\sqrt{3}\operatorname{sen}20^o$ y $D=\sqrt{3}\cos 10^o-\operatorname{sen}10^o$ son dos números que representan las medidas de los lados de una ventana rectangular, tal que la razón de estos está dado por F, donde $F=\frac{N}{D}$, hallar el valor de F.

A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 1/4 E) 1/5

Solución:

$$F=\frac{N}{D}=\frac{\cos 20^o+\sqrt{3}\operatorname{sen}20^o}{\sqrt{3}\cos 10^o-\operatorname{sen}10^o}$$

Multiplica y divide por $\frac{1}{2}$

$$F=\frac{N}{D}=\frac{\frac{1}{2}\cos 20^o+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}20^o}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^o-\frac{1}{2}\operatorname{sen}10^o}=\frac{\operatorname{sen}30^o\cos 20^o+\cos 30^o\operatorname{sen}20^o}{\cos 30^o\cos 10^o-\operatorname{sen}30^o\operatorname{sen}10^o}$$

$$F=\frac{\operatorname{sen}(30^o+20^o)}{\cos(30^o+10^o)}=\frac{\operatorname{sen}50^o}{\cos 40^o}=\frac{\operatorname{sen}50^o}{\operatorname{sen}50^o}=1$$

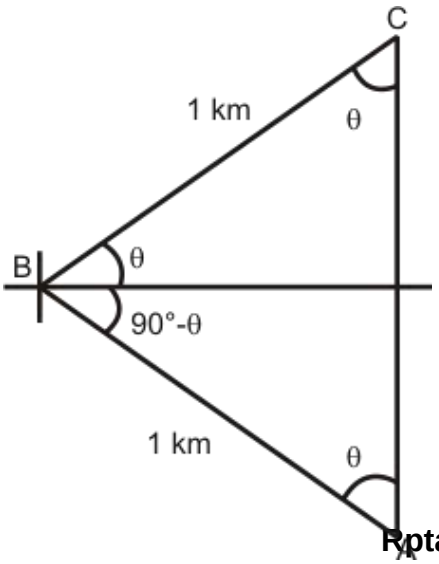
Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un automóvil parte de una ciudad A en dirección $N\theta O$ y recorre 1 km hasta llegar a la ciudad B, de ahí toma rumbo $E\theta N$ recorriendo 1 km hasta llegar a la ciudad C que se ubica al norte de A, si el automóvil viaja a $2(\cos\theta\cos\alpha - \text{sen}\theta\text{sen}\alpha)$ km/h y el $\csc\alpha = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ (α es agudo), determine el tiempo que demoraría si recorre en línea recta al ir de la ciudad A a la ciudad C.

A) $\sqrt{2}$ h B) 2 h C) $\sqrt{3}$ h D) 4 h E) 5 h

Solución:



De la figura y el dato, tenemos:

$\theta = 45°$ y $\alpha = 15°$, la velocidad del auto es $2\cos(\theta+\alpha)$ km/h es decir 1 km/h, además la distancia entre A y C es $\sqrt{2}$ km, luego el tiempo estimado en recorrer de A hacia C es $\sqrt{2}$ horas.

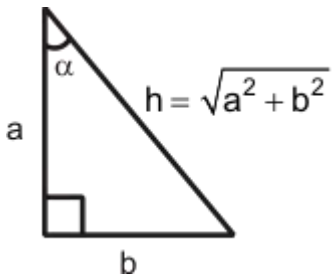
Rpta.: A

2. Si a y b son números positivos tal que el máximo de la expresión $a.\text{sen}x + b.\cos x$ es 2, determine el valor de $\sqrt{a^2+b^2}$.

A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$ D) 1 E) 3

Solución:

$h = \sqrt{a^2+b^2}$

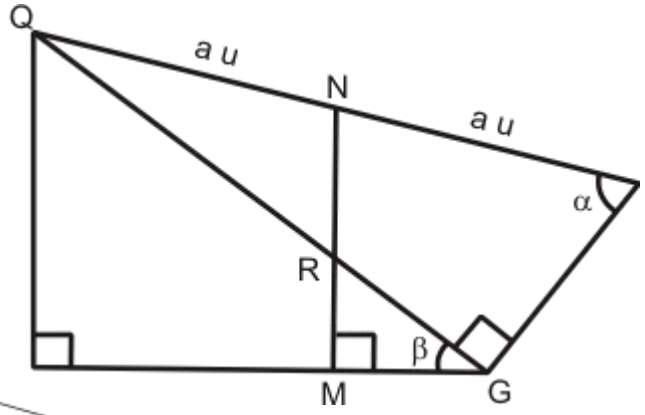


$$E = a.\text{sen}x + b.\cos x = h\left(\frac{a}{h}.\text{sen}x + \frac{b}{h}.\cos x\right)$$

$$E = h\left(\cos\alpha\,\text{sen}x + \text{sen}\alpha\cos x\right) = h\underbrace{\text{sen}(x+\alpha)}_{\text{máx}=1} \le h = 2$$

Rpta.: A

3. En la figura, determine el menor valor que puede tomar a, siendo $MN = 2\text{ u}$.

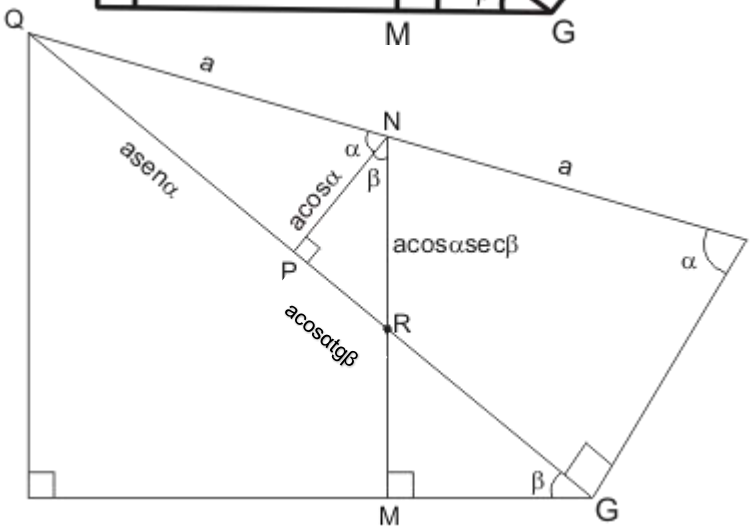


A) 5 B) 2

C) 7 D) 3

E) $\frac{1}{3}$

Solución:



i) QP=PG

ii) $PR = a\cos\alpha\,\text{tg}\beta$

$\Rightarrow\ RG = a\text{sen}\alpha - a\cos\alpha\,\text{tg}\beta$

iii) $RM = 2 - a\cos\alpha\sec\beta$

iv) En ΔMRG:

$$\text{sen}\beta = \frac{2 - a\cos\alpha\sec\beta}{a\text{sen}\alpha - a\cos\alpha\sec\beta\,\text{sen}\beta}$$

$$\Rightarrow\ \text{sen}\beta = \frac{2\cos\beta - a\cos\alpha}{\cos\beta\left(a\text{sen}\alpha - a\cos\alpha\sec\beta\,\text{sen}\beta\right)} = \frac{2\cos\beta - a\cos\alpha}{a\left(\text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha\right)}$$

$$\Rightarrow\ \text{sen}\beta = \frac{2\cos\beta - a\cos\alpha}{a\text{sen}(\alpha-\beta)}\ \Rightarrow\ a.\text{sen}\beta\,\text{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\beta - a\cos((\alpha-\beta)+\beta)$$

$$\Rightarrow\ a.\text{sen}\beta\,\text{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\beta - a\cos(\alpha-\beta)\cos\beta + a.\text{sen}(\alpha-\beta)\text{sen}\beta$$

$$\rightarrow a\cos(\alpha-\beta)\cos\beta = 2\cos\beta$$

$$\rightarrow a = 2\underbrace{\sec(\alpha-\beta)}_{\ge 1} \ge 2$$

Rpta.: B

4. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $tg(x+y)=tgx+tgy$, para algunos ángulos positivos x e y.

ii. $sen10°\cos 20°-\cos 10°sen20°=sen10°$.

iii. $\dfrac{senx+\sqrt{3}\cos x}{\cos x-\sqrt{3}senx}=ctg(30°-x)$.

A) VVV B) FFF C) FFV D) FVF E) VFV

Solución:

i. Si $x=y=\pi$ entonces $tg(x+y)=tg2\pi=0=tg\pi+tg\pi=tgx+tgy$ (V)

ii. $sen10°\cos 20°-\cos 10°sen20°=sen10°$
$sen(10°-20°)=sen10°$ (F)
$sen(-10°)=sen10°$

iii. $E=\dfrac{senx+\sqrt{3}\cos x}{\cos x-\sqrt{3}senx}=\dfrac{\dfrac{senx}{\cos x}+\sqrt{3}\dfrac{\cos x}{\cos x}}{\dfrac{\cos x}{\cos x}-\sqrt{3}\dfrac{senx}{\cos x}}=\dfrac{tgx+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}tgx}$ (V)

$E=\dfrac{tgx+tg60°}{1-tg60°tgx}=tg(60°+x)=ctg(30°-x)$

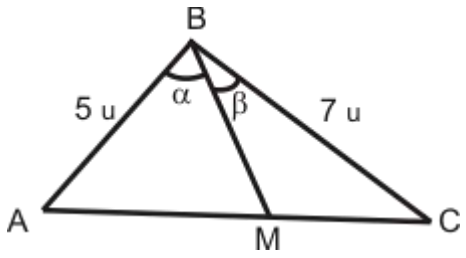
Rpta.: E

5. En la figura mostrada se tiene el plano de un terreno triangular ABC, dividido en dos regiones triangulares ABM y MBC. Si $tg\alpha=\dfrac{3}{4}$ y $tg\beta=\dfrac{5}{12}$, calcule el área de la región triangular ABC.

A) $\dfrac{196}{13}$ u^2 B) $\dfrac{126}{15}$ u^2

C) $\dfrac{296}{11}$ u^2 D) $\dfrac{136}{15}$ u^2

E) $\dfrac{176}{13}$ u^2



Solución:

De la figura, α y β son agudos

Si $tg\alpha = \frac{3}{4}$ y $tg\beta = \frac{5}{12}$ entonces $sen\alpha = \frac{3}{5} \wedge \cos\alpha = \frac{4}{5}$ y $sen\beta = \frac{5}{13} \wedge \cos\beta = \frac{12}{13}$

El área de la región triangular ABC, se puede determinar por:

$$S_{\Delta} = \frac{5.7.sen(\alpha+\beta)}{2} = \frac{35}{2}\left(sen\alpha\cos\beta + \cos\alpha sen\beta\right)$$

$$S_{\Delta} = \frac{35}{2}\left(\frac{3}{5}.\frac{12}{13} + \frac{4}{5}.\frac{5}{13}\right) = \frac{35}{2}\left(\frac{56}{5.13}\right) = \frac{7.28}{13} = \frac{196}{13}$$

Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la figura se tiene un triángulo ABC, tal que su área es $3\ m^2$. Determine el valor de $\text{sen}110°.\text{sen}\beta - \cos 470°.\cos\beta$.

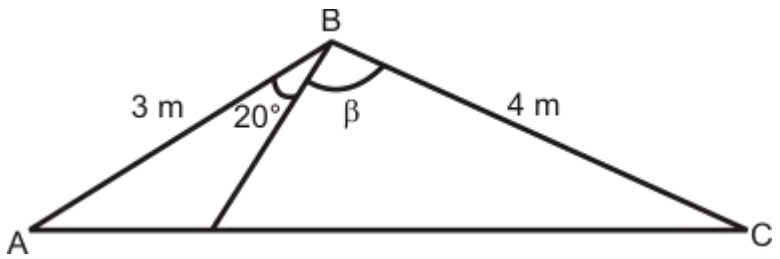
A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



Solución:

De la figura mostrada: $S = \frac{3.4.\text{sen}(20° + \beta)}{2} = 3 \rightarrow \text{sen}(20° + \beta) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&\text{sen}110°.\text{sen}\beta - \cos 470°.\cos\beta \\
&= \text{sen}70°\text{sen}\beta - \cos(360° + 110°).\cos\beta \\
&= \text{sen}70°\text{sen}\beta + \cos 70° \cos\beta \\
&= \cos(70° - \beta) = \text{sen}(20° + \beta) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Rpta.: A

2. Indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. Para algún ángulo agudo β, se cumple que $\frac{\cos 22° - \text{sen}22°}{\cos 22° + \text{sen}22°} = \text{tg}\beta$.

II. El valor de $\text{sen}168°\cos 342° + \text{sen}78°\text{sen}162°$ es $\frac{1}{2}$.

III. La expresión $\text{tg}16° + \text{tg}29° + \text{tg}16°\text{tg}29°$ es mayor que 1.

A) VVV B) VFV C) FFV D) VVF E) FFF

Solución:

I.

$$M=\frac{\cos 22°-\text{sen}22°}{\cos 22°+\text{sen}22°}=\frac{1-\text{tg}22°}{1+\text{tg}22°}=\frac{\text{tg}45°-\text{tg}22°}{1+\text{tg}45°\text{tg}22°} \quad \text{(V).}$$

$$M=\text{tg}(45°-22°)=\text{tg}23°$$

II.

$$A=\text{sen}168°\cos 342°+\text{sen}78°\text{sen}162°$$

$$A=\text{sen}12°\cos 18°+\cos 12°\text{sen}18°=\text{sen}30°=\frac{1}{2} \quad \text{(V)}$$

III.

$$E=\text{tg}16°+\text{tg}29°+\text{tg}16°\text{tg}29°$$

$$E=\frac{\text{tg}16°+\text{tg}29°}{1-\text{tg}16°\text{tg}29°}.(1-\text{tg}16°\text{tg}29°)+\text{tg}16°\text{tg}29° \quad \text{(F)}$$

$$E=\text{tg}45°(1-\text{tg}16°\text{tg}29°)+\text{tg}16°\text{tg}29°=1$$

Rpta.: D

3. Las medidas de tres ángulos agudos son α, β y θ . Si la suma de las medidas de dichos ángulos es igual a la mitad de la medida de un ángulo llano, calcule la mitad del valor de $\sec\beta\,\text{sen}\alpha\sec\theta+\text{tg}\beta\text{tg}\theta$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

$$\alpha+\beta+\theta=\frac{\pi}{2}\rightarrow \text{sen}\alpha=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(\beta+\theta)\right)\rightarrow \text{sen}\alpha=\cos(\beta+\theta)$$

$$\rightarrow \text{sen}\alpha=\cos\beta\cos\theta-\text{sen}\beta\text{sen}\theta$$

$$E=\sec\beta\,\text{sen}\alpha\sec\theta+\text{tg}\beta\text{tg}\theta$$

$$E=\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\beta\cos\theta}+\frac{\text{sen}\beta\text{sen}\theta}{\cos\beta\cos\theta}$$

$$E=\frac{\text{sen}\alpha+\text{sen}\beta\text{sen}\theta}{\cos\beta\cos\theta}=\frac{\cos\beta\cos\theta-\text{sen}\beta\text{sen}\theta+\text{sen}\beta\text{sen}\theta}{\cos\beta\cos\theta}=1$$

Rpta..: D

4. Sean las medidas de dos ángulos α y β que suman 225°, donde $a = tg\alpha + 1$ y $b = tg\beta + 1$. Calcule el valor de $ab + 1$.

A) 4 B) 3 C) 2 D) 5 E) 6

Solución:

$\alpha + \beta = 225° \rightarrow tg(\alpha + \beta) = tg225° = tg(180° + 45°) = 1$

$\rightarrow tg(\alpha + \beta) = 1$

$\rightarrow \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = 1$

Nos piden:

$ab + 1 = (tg\alpha + 1)(tg\beta + 1) + 1 = (tg\alpha tg\beta + tg\beta + tg\alpha + 1) + 1$

$ab + 1 = tg\alpha tg\beta + \dfrac{tg\beta + tg\alpha}{1 - tg\beta tg\alpha}(1 - tg\beta tg\alpha) + 2 = 3$

Rpta.: B

5. Si las expresiones $sen(\alpha + 30°)sen(\alpha - 30°) + cos(60° + \beta)cos(60° - \beta)$ y $sen(\alpha + \beta)cos(\alpha - \beta)$ están en la misma relación que $2sen60°$ y 1, determine la medida del ángulo agudo $\alpha - \beta$.

A) 45° B) 30° C) 60° D) 15° E) 75°

Solución:

$$\frac{sen(\alpha + 30°)sen(\alpha - 30°) + cos(60° + \beta)cos(60° - \beta)}{sen(\alpha + \beta)cos(\alpha - \beta)} = \frac{2sen60°}{1}$$

$$\frac{sen^2\alpha - sen^2 30° + cos^2 60° - sen^2\beta}{sen(\alpha + \beta)cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{3}$$

$$\frac{sen(\alpha + \beta)sen(\alpha - \beta)}{sen(\alpha + \beta)cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{3}$$

$tg(\alpha - \beta) = \sqrt{3}$

$\alpha - \beta = 60°$

Rpta.: C

6. Si $\alpha + \beta = 150°$ y $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{a}{2}$, exprese el valor de $cos(\alpha - \beta)$ en términos de a.

A) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{2}{a} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{2}{a} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\dfrac{2}{a} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{2}{a} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solución:

$$\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta = \frac{a}{2}$$

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\text{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{a}{2} \rightarrow \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{a}{2} \rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{a}{2} \rightarrow \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{a}$$

$$\cos(150°) = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta = \frac{1}{a} - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta \rightarrow \text{sen}\alpha\text{sen}\beta = \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta = \frac{2}{a} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rpta.: D

7. La pendiente de una recta es la tangente del ángulo de inclinación de la recta. Si los ángulos de inclinación de las rectas L y M son 50º y 10º, halle $|m_1 - m_2|$ donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas.

A) csc70° B) csc80° C) sec20° D) tg10° E) ctg10°

Solución:

$$\begin{aligned}
|\text{tg}50° - \text{tg}10°| &= \frac{\text{sen}50°}{\cos 50°} - \frac{\text{sen}10°}{\cos 10°} \\
&= \frac{\text{sen}50°\cos 10° - \cos 50°\text{sen}10°}{\cos 50°\cos 10°} \\
&= \frac{\text{sen}(50° - 10°)}{\cos 50°\cos 10°} \\
&= \frac{\text{sen}40°}{\cos 50°\cos 10°} = \frac{\cos 50°}{\cos 50°\cos 10°} = \sec 10° \\
&= \csc 80°
\end{aligned}$$

Rpta.: B

8. En la figura mostrada, se tiene que $DC = BC$, M es punto medio de $\overline{AB}$. Calcule el valor $tg\alpha$.

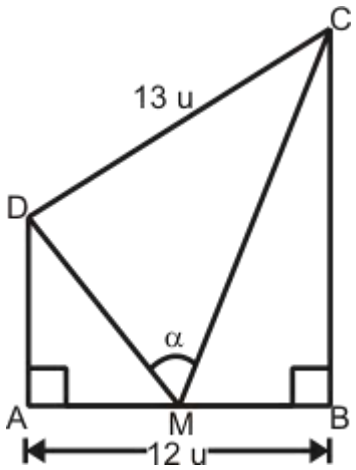
A) $\frac{63}{34}$

B) $\frac{53}{34}$

C) $\frac{23}{14}$

D) $\frac{72}{25}$

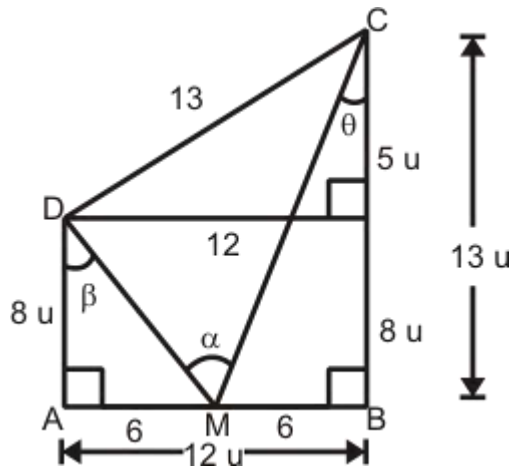
E) $\frac{23}{17}$



Solución:
De la figura tenemos:

$$\beta + \theta = \alpha \rightarrow tg\alpha = tg(\beta + \theta) = \frac{tg\beta + tg\theta}{1 - tg\beta tg\theta}$$

$$\frac{tg\beta + tg\theta}{1 - tg\beta tg\theta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{6}{13}}{1 - \frac{3}{4}.\frac{6}{13}} = \frac{63}{34}$$



Rpta.: A

9. De la figura, $\csc\beta = \frac{3}{2}$, la relación de las longitudes de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son como 2 es a 3 respectivamente. Determine el valor de $tg(\alpha - \beta) + tg(\alpha + \beta)$.

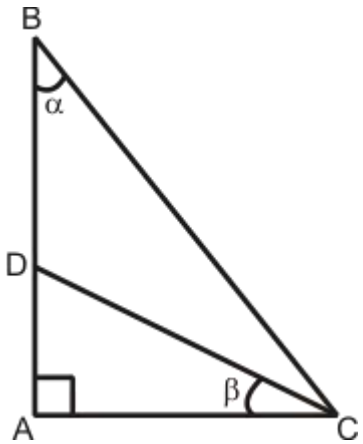
A) $\frac{6\sqrt{5}}{7}$

B) $\frac{\sqrt{5}}{7}$

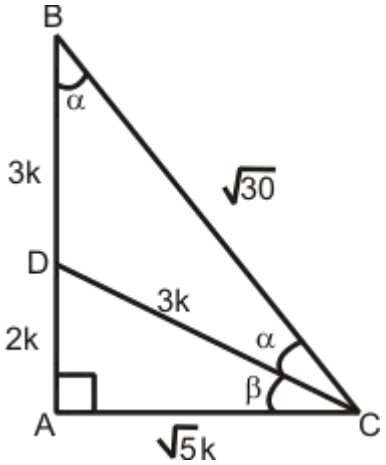
C) $-\frac{2\sqrt{5}}{7}$

D) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

E) $-\frac{5\sqrt{5}}{7}$



Solución:



$$E = tg(\alpha-\beta)+tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\beta tg\beta} + tg(\alpha+\beta)$$

$$E = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{2}{\sqrt{5}}} + \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{7}{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{7} + \sqrt{5} = \frac{6\sqrt{5}}{7}$$

Rpta.: A

10. De la figura se tiene que $4AE = 4CF = AB = AD$ y M es un punto equidistante de los vértices del rectángulo ABCD, calcule $\tan(\alpha+\beta)$.

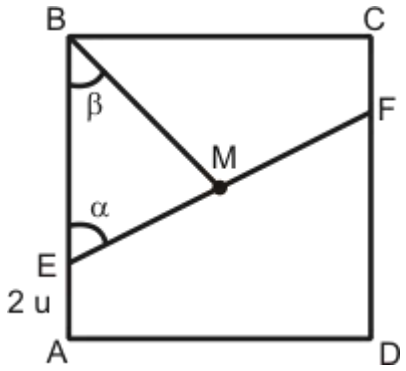
A) 2

B) -3

C) 4

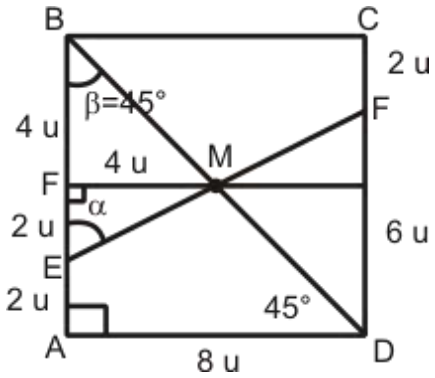
D) -5

E) 6



Solución:

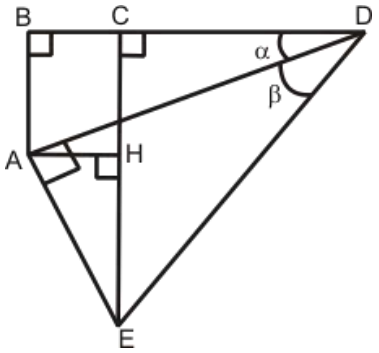
$$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\alpha+45°) = \frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$



Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De la figura mostrada. Si $CH = au$, $HE = bu$ y $DE = ku$, calcule el valor de $\csc(\alpha+\beta) - \dfrac{k}{a+b}$.



A) 1

B) 2

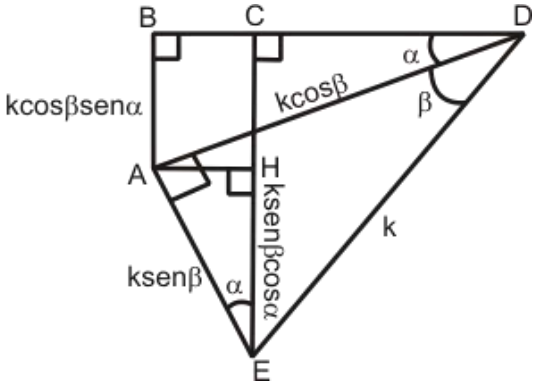
C) 0

D) -3

E) -5

Solución:

De la figura:



$a = k\cos\beta\,\text{sen}\alpha$

$b = k\,\text{sen}\beta\cos\alpha$

$$E = \csc(\alpha+\beta) - \frac{k}{a+b}$$

$$E = \frac{1}{\text{sen}(\alpha+\beta)} - \frac{k}{k\cos\beta\,\text{sen}\alpha + k\,\text{sen}\beta\cos\alpha} = 0$$

Rpta.: C

2. En la figura se tiene una de las vistas de perfil de un trofeo, formado por cuatro piezas, una de las piezas es de vidrio templado, donde el lado de esta pieza tiene la forma de la región limitada por el triángulo rectángulo ABC. Las otras piezas son de madera, que desde la perspectiva de la figura se ven como dos triángulos y un rectángulo. Si D es punto medio de $\overline{AB}$, AB=10 cm y $AE = 3\sqrt{5}$ cm, calcule el área del lado triangular de la pieza de vidrio.

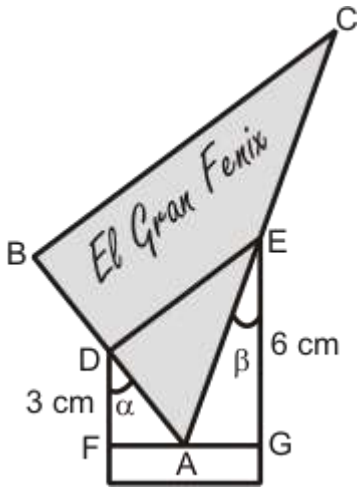
A) $315\,cm^2$

B) $275\,cm^2$

C) $255\,cm^2$

D) $375\,cm^2$

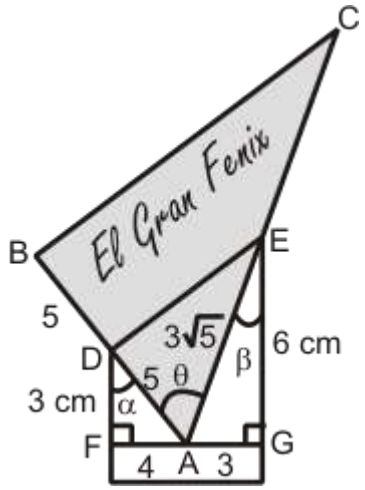
E) $265\,cm^2$



Solución:

$$\alpha+\beta=\theta \rightarrow tg\theta = tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{3}.\frac{1}{2}}=\frac{\frac{11}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{11}{2}$$

$$\text{Area}=\frac{10.10tg\theta}{2}=50.\frac{11}{2}=275\,cm^2$$



Rpta.: B

3. Con los datos de la figura mostrada, y si $tg\alpha.tg20°+ctg70°.tg36°+tg\alpha.ctg54°=1$; calcule x.

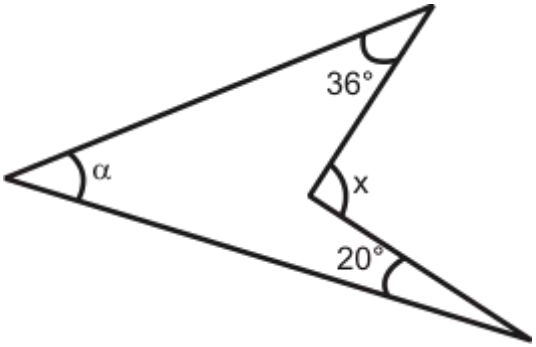
A) 100°

B) 90°

C) 105°

D) 98°

E) 120°

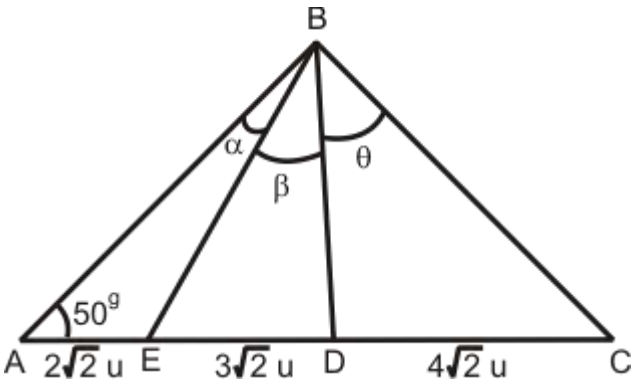


Solución:

$$tg\alpha.tg20°+ctg70°.tg36°+tg\alpha.ctg54°=1$$
$$tg\alpha.tg20°+tg20°.tg36°+tg\alpha.tg36°=1$$
$$tg\alpha.tg20°+tg20°.tg36°=1-tg\alpha.tg36°$$
$$tg20°(tg\alpha+tg36°)=1-tg\alpha.tg36°$$
$$tg20°=\frac{1-tg\alpha.tg36°}{tg\alpha+tg36°}$$
$$tg20°=\frac{1}{tg(\alpha+36°)}=ctg(\alpha+36°)$$
$$20°+\alpha+36°=90° \rightarrow x=90°$$

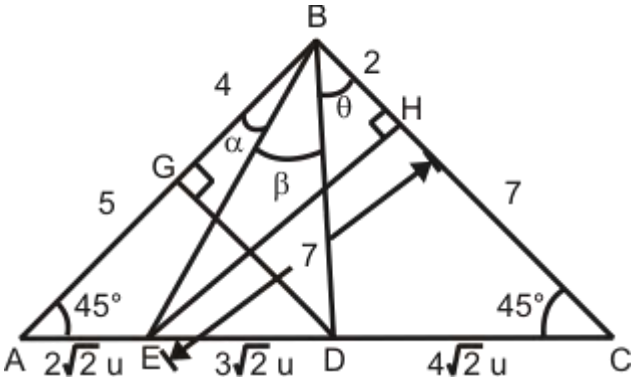
Rpta.: B

4. Con los datos de la figura mostrada, y si ABC es un triángulo rectángulo, recto en B; calcule el valor de $27\text{tg}(\alpha+2\beta+\theta)$.



A) –42
B) 35
C) –38
D) 36
E) 45

Solución:



$$A=\text{tg}(\alpha+2\beta+\theta)=\text{tg}((\alpha+\beta)+(\beta+\theta))$$

$$A=\frac{\text{tg}(\alpha+\beta)+\text{tg}(\beta+\theta)}{1-\text{tg}(\alpha+\beta)\text{tg}(\beta+\theta)}$$

De la figura se tiene:

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{5}{4} \qquad \text{tg}(\beta+\theta)=\frac{7}{2}$$

$$A=\frac{\text{tg}(\alpha+\beta)+\text{tg}(\beta+\theta)}{1-\text{tg}(\alpha+\beta)\text{tg}(\beta+\theta)}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{7}{2}}{1-\frac{5}{4}.\frac{7}{2}}=\frac{\frac{19}{4}}{-\frac{27}{8}}=-\frac{38}{27}$$

Rpta.: C

5. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El máximo valor de $\sec 60°.\text{sen}x+2\text{tg}60°.\cos x$ es 4

II. La expresión $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{sen}\alpha.\cos\beta}$ es igual a $\text{ctg}\alpha-\text{tg}\beta$.

III. Para algún ángulo agudo θ, se cumple que $\dfrac{1-\sqrt{3}\text{tg}\theta}{\sqrt{3}+\text{tg}\theta}=2+\sqrt{3}$.

A) VVV B) FVF C) FFV D) FFF E) VVF

Solución:

I. $\sec 60°.\text{sen}x + 2\text{tg}60°.\cos x = 2\text{sen}x + 2\sqrt{3}\cos x = 4\text{sen}(x + 60°)$

el máximo valor de la expresión es 4. (V)

II. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{sen}\alpha.\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha\cos\beta} = \text{ctg}\alpha - \text{tg}\beta$ (V)

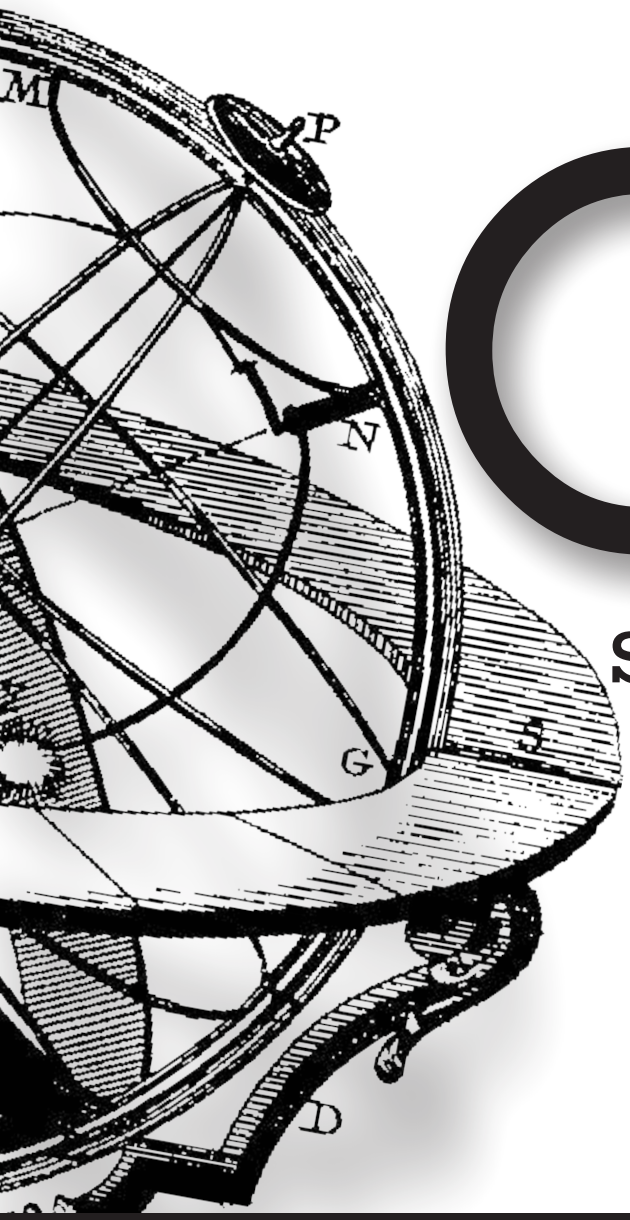
III. $2+\sqrt{3} = \dfrac{1-\sqrt{3}\text{tg}\theta}{\sqrt{3}+\text{tg}\theta} = \dfrac{1-\text{tg}60°\text{tg}\theta}{\text{tg}60°+\text{tg}\theta} = \dfrac{1}{\text{tg}(60°+\theta)} = \text{ctg}(60°+\theta) = \text{tg}(30°-\theta)$

No existe tal ángulo agudo θ (F)

Rpta.: E

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



09

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MÚLTIPLOS

I. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

1) $\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha$

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}$

4) $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2 \alpha - 1}{2\cot \alpha}$

II. FÓRMULA DE DEGRADACIÓN DEL ÁNGULO DOBLE

1) $2 \text{ sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$

2) $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

III. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

1) $\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$

2) $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

3) $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

4) $\cot\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

Observaciones:

El signo (+ ó –) se determina de acuerdo al cuadrante al que pertenece el ángulo $\dfrac{\theta}{2}$

IV. IDENTIDADES ESPECIALES

1) $\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \csc 2\alpha$

2) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$

3) $\cot \alpha = \csc 2\alpha + \cot 2\alpha$

4) $\tan \alpha = \csc 2\alpha - \cot 2\alpha$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO TRIPLE

I. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO TRIPLE

$$\text{sen } 3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

II. FÓRMULAS DE DEGRADACIÓN DEL ÁNGULO TRIPLE

$$\text{sen}^3\alpha = \frac{3 \text{ sen } \alpha - \text{sen } 3\alpha}{4}$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$$

$$\tan^3 \alpha = 3\tan\alpha - \tan 3\alpha\,(1 - 3\tan^2\alpha)$$

Trigonometría

EJERCICIOS

1. El departamento de contabilidad de la empresa "PERÚ CHOMPAS" determinó que su ingreso mensual esta modelada por $I(q)=\dfrac{\csc^4 30°\left(2\cos^3\frac{q}{8}\operatorname{sen}\frac{q}{8}-\operatorname{sen}\frac{q}{8}\cos\frac{q}{8}\right)}{1-8\operatorname{sen}^2\frac{q}{8}\cos^2\frac{q}{8}}$ decenas de miles de soles, donde $q\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ es la cantidad (en miles) de chompas que produce y vende en dicho mes ¿A Cuánto asciende el máximo ingreso de dicha empresa?

A) S/. 64 000 B) S/. 49 000

C) S/. 40 000 D) S/. 50 000

Solución:

$$I(q)=\frac{8\left(2\operatorname{sen}\frac{q}{8}\cos\frac{q}{8}\right)\left(2\cos^2\frac{q}{8}-1\right)}{1-2\left(2\operatorname{sen}\frac{q}{8}\cos\frac{q}{8}\right)^2}$$

$$I(q)=\frac{4.2\operatorname{sen}\frac{q}{4}\left(\cos\frac{q}{4}\right)}{1-2\operatorname{sen}^2\frac{q}{4}}$$

$$I(q)=4\tan\frac{q}{2}$$

como $0\le q\le\frac{\pi}{2}$

$$0\le\frac{q}{2}\le\frac{\pi}{4}$$

$$0\le 4\tan\frac{q}{2}\le 4$$

$$I_{máx}=S/.40\ 000$$

Rpta.: C

2. El largo y ancho de un local comercial son expresados (en metros) como $1+A$ y $\csc 2\theta$ respectivamente, para cierto $\theta \in \left\langle \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right\rangle$. Si otro instrumento de medición indica que el área de dicho local está dado por la expresión $\frac{1+\text{sen}2\theta+\cos 2\theta}{1+\text{sen}2\theta-\cos 2\theta}$ m^2. Halle el valor de A.

A) $\text{sen}2\theta$ B) $\text{sen}\,\theta$ C) $\cos\theta$ D) $\cos 2\theta$

Solución:

$$\text{Area} = \text{Area}$$
$$\csc 2\theta(1+A) = \frac{1+\text{sen}2\theta+\cos 2\theta}{1+\text{sen}2\theta-\cos 2\theta}$$
$$\frac{1+A}{\text{sen}2\theta} = \frac{2\text{sen}\theta\cos\theta+2\cos^2\theta}{2\text{sen}\theta\cos\theta+2\text{sen}^2\theta}$$
$$\frac{1+A}{2\text{sen}\theta\cos\theta} = \frac{2\cos\theta(\text{sen}\theta+\cos\theta)}{2\text{sen}\theta(\text{sen}\theta+\cos\theta)}$$
$$A = 2\cos^2\theta - 1$$
$$A = \cos 2\theta$$

Rpta.: D

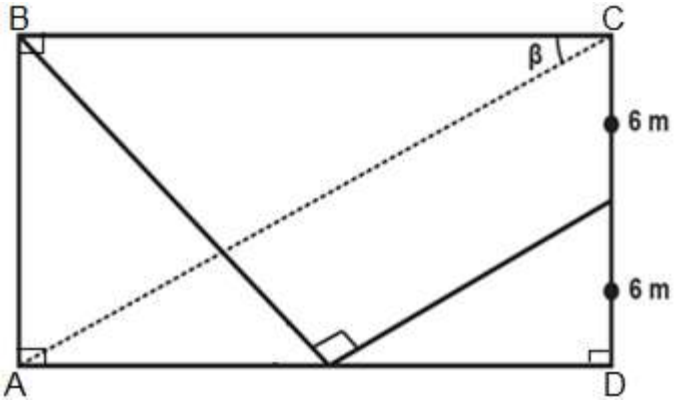
3. Don Hugo vendió un terreno de forma rectangular ABCD, como se representa en la figura adjunta a $1000\tan 2\beta$ soles el metro cuadrado. Si la longitud del largo del terreno es el mínimo posible. ¿Cuánto dinero recibió Don Hugo por el terreno?

A) S/. 576 000

B) S/. 240 000

C) S/. 180 000

D) S/. 300 000



Solución:

$$MA \geq MG$$

$$\frac{12\cot\alpha + 6\tan\alpha}{2} \geq \sqrt{12\cot\alpha.6\tan\alpha}$$

$$12\cot\alpha + 6\tan\alpha \geq 12\sqrt{2}$$

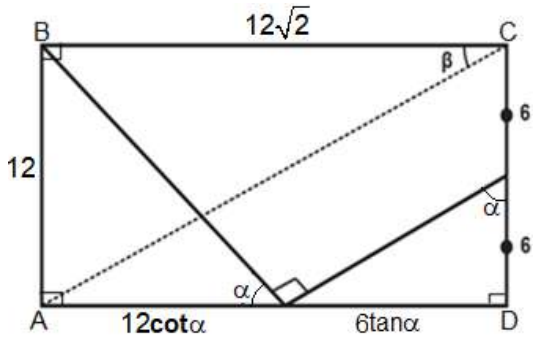
$$L = 12\sqrt{2}$$

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

$$\tan 2\beta = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$Paga = \left(144\sqrt{2}\right)\left(1000.\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Paga = S/.576\ 000$$



Rpta.: A

4. Un topógrafo usando un teodolito observó un terreno de forma triangular ABC, obteniendo los siguientes datos: la medida del ángulo B es de 90°, $BC = 3$ hm y $5\cos 2A + 3sen2A = 5$. ¿Cuánto es el área de dicho terreno?

A) $8{,}5\ hm^2$ B) $8{,}25\ hm^2$ C) $7{,}25\ hm^2$ D) $7{,}5\ hm^2$

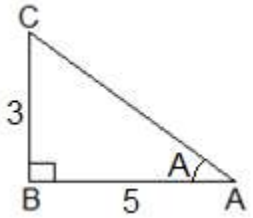
Solución:

$$5\cos 2A + 3sen2A = 5$$

$$5\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} + 3\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = 5$$

$$\tan A = 0 \ \vee \ \tan A = \frac{3}{5}$$

$$Área = 7{,}5\ hm^2$$



Rpta.: D

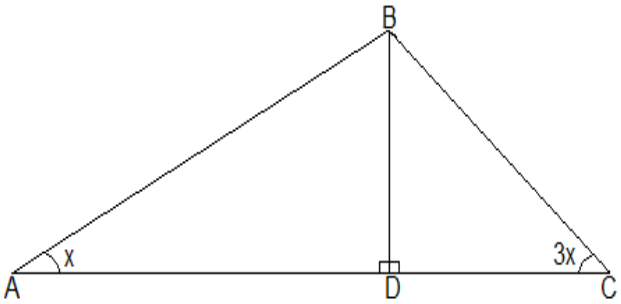
5. La siguiente figura representa un terreno de forma triangular ABC donde $AD = 2DC = 40$ m. Si el costo total por cercar dicho terreno es de $2\cos 2x$ miles de soles y se pagarían en dos cuotas iguales ¿Cuánto corresponde la primera cuota?

A) S/. 3 000

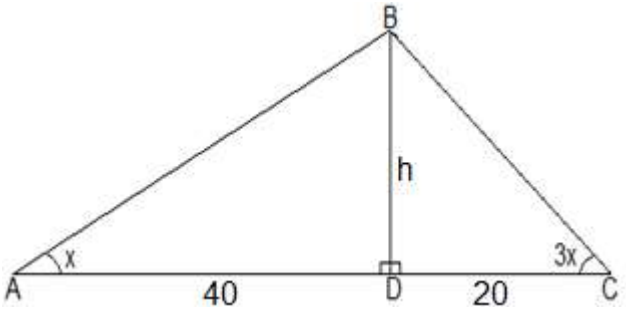
B) S/. 2 500

C) S/. 1 000

D) S/. 1 500



Solución:



$$\begin{cases} h = 20\tan 3x \\ h = 40\tan x \end{cases}$$

$$20\tan 3x = 40\tan x$$

$$\frac{\operatorname{sen}x\left(2\cos 2x+1\right)\cos x}{\cos x\left(2\cos 2x-1\right)\operatorname{sen}x} = 2$$

$\cos 2x = 1{,}5$ miles de soles

Rpta: D

6. Cuatro socios compraron un camión de carga que costó $\dfrac{\operatorname{sen}x.\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}.\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}2x}$ miles de soles. Si todos los socios aportaron la misma cantidad de dinero y además se cumple que $\tan x+\cot x = 80$, ¿cuánto aportó cada socio?

A) S/. 16 000
B) S/. 25 000
C) S/. 20 000
D) S/. 18 000

Solución:

$*\tan x+\cot x = 80$

$$2\csc 2x = 80$$

$$*C = \frac{\operatorname{sen}x\tan\frac{x}{2}+\operatorname{sen}x\cot\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$C = 2\csc 2x$$

$\dfrac{C}{4} = 20$ miles de soles

Rpta: C

7. Un atleta recorrió en línea recta una pista representada por el segmento AD en un mapa, donde en los puntos B y C recibió bebidas rehidratantes. Si A, B, C y D son puntos consecutivos tal que $AB = \sec\frac{\pi}{18}$ km, $BC = 2\csc\frac{\pi}{9}-\cot\frac{\pi}{9}$ km y $CD = \csc\frac{2\pi}{9}$ km, ¿cuánto mide el largo de la pista?

A) ctg10° km
B) tg10° km
C) sec10° km
D) csc10° km

Solución:

$$AD = AB + BC + CD \text{ km}$$
$$AD = \sec 10° + 2\csc 20° - \cot 20° + \csc 40° \text{ km}$$
$$AD = \sec 10° + 2\csc 20° - \csc 80° - \cot 80° \text{ km}$$
$$AD = \cot 10° \text{ km}$$

Rpta.: A

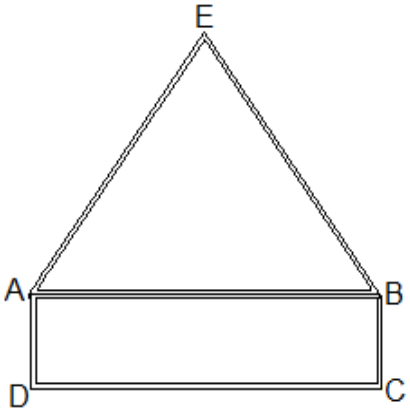
8. Una ventana se diseñó de tal manera que está formada por un rectángulo ABCD junto con un triángulo AEB (figura adjunta) donde $AE = EB, DC = 2$ m y la bisectriz del ángulo BAE corta a $\overline{EB}$ en M $(MB = 1\,\text{m})$. Si el costo de una ventana es de $\text{sen}\frac{B}{2}$ cientos de soles ¿Cuánto costaría media docena de dichas ventanas?

A) S/. 400

B) S/. 450

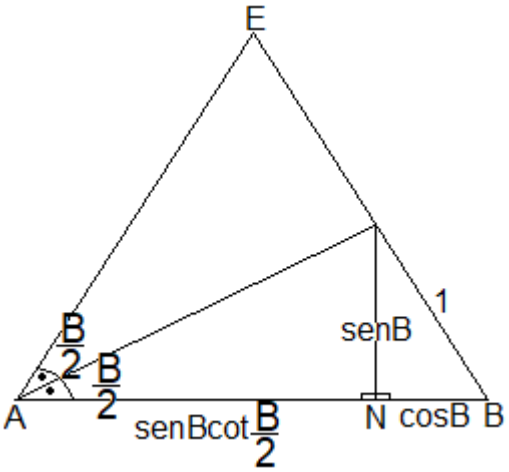
C) S/. 300

D) S/. 350



Solución:

$$AB = AN + NB$$
$$2 = \text{sen}B\cot\frac{B}{2} + \cos B$$
$$2\text{sen}\frac{B}{2} = \text{sen}\frac{3B}{2}$$
$$2\text{sen}\frac{B}{2} = 3\,\text{sen}\frac{B}{2} - 4\text{sen}^3\frac{B}{2}$$
$$\text{sen}\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$$
$$6\text{sen}\frac{B}{2} = 3 \text{ cientos de soles}$$



Rpta.: C

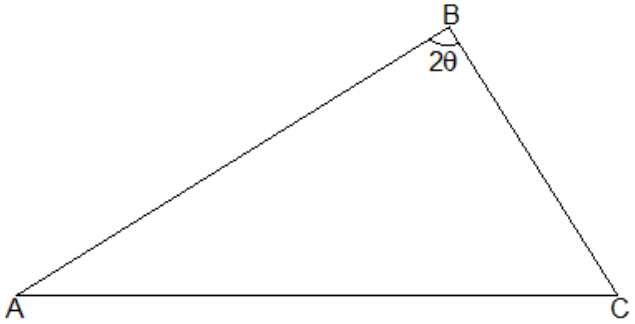
9. Un topógrafo utilizando un teodolito divide en dos partes un terreno de forma triangular ABC, representado en la figura, para ello desde el punto B se traza el bisectriz $\overline{BD}$ que intersecta a $\overline{AC}$ en D. Si se sabe que $BD = CB = 25$ m y $\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$. ¿Cuánto mide el lado $\overline{AB}$?

A) 50 m

B) 60 m

C) 64 m

D) 49 m



Solución:

$$\begin{cases} BH = 25\cos\frac{\theta}{2} \\ BH = x\cos\frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

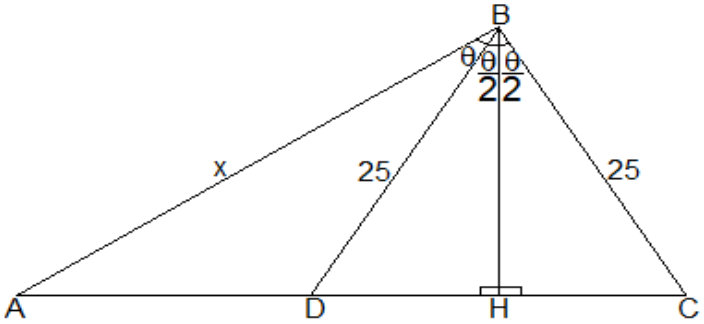
$$25\cos\frac{\theta}{2} = x\cos\frac{3\theta}{2}$$

$$25\cos\frac{\theta}{2} = x\left(4\cos^3\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$25 = x(2\cos\theta - 1)$$

$$25 = x\left(2.\frac{3}{4} - 1\right)$$

$$x = 50 \text{ m}$$



Rpta: A

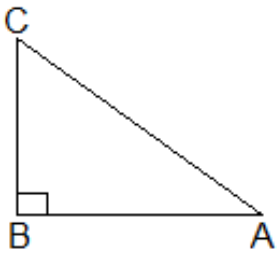
10. Un ingeniero debe construir tres rampas de concreto todas de igual medida, en la figura se muestra la vista lateral de una de ellas. Usando un teodolito nota que sus lados están en progresión aritmética y el mayor de sus ángulos agudos mide 6α. Si el costo por cada una es de $\left(6\tan\alpha + 3\tan^2\alpha - 2\tan^3\alpha\right)$ cientos de soles ¿Cuánto es el costo por construir todas las rampas?

A) S/. 300

B) S/. 800

C) S/. 600

D) S/. 400



Solución:

$*(a+r)^2 = a^2 + (a-r)^2$

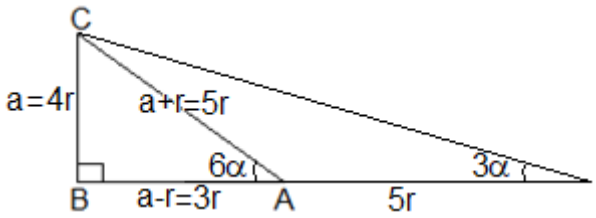
$4r = a$

$* \qquad \tan 3\alpha = \frac{1}{2}$

$\frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} = \frac{1}{2}$

$2\tan^3\alpha - 3\tan^2\alpha - 6\tan\alpha + 1 = 0$

$\therefore$ 3 cientos de soles.



Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En un experimento, un equipo multidisciplinario modelo que la cantidad de abejas obreras de una colonia está dada por $C(t) = \cos^5\frac{\pi t}{16}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{16} - \operatorname{sen}^5\frac{\pi t}{16}\cos\frac{\pi t}{16} + 1$ miles aproximadamente, donde t indica el número de días desde el inicio del experimento. En los primeros quince días del experimento ¿Cuánto fue la máxima cantidad de abejas que había?

A) 1 250 abejas
B) 1 500 abejas
C) 2 250 abejas
D) 1 750 abejas

Solución:

$C(t) = \operatorname{sen}\frac{\pi t}{16}\cos\frac{\pi t}{16}\left(\cos^4\frac{\pi t}{16} - \operatorname{sen}^4\frac{\pi t}{16}\right) + 1$

$C(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{8}\left(\cos\frac{\pi t}{8}\right) + 1$

$C(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{4} + 1$

como $\quad 0 \le t \le 15$

$-1 \le \operatorname{sen}\frac{\pi t}{4} \le 1$

$\frac{3}{4} \le \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{4} + 1 \le \frac{5}{4}$

$I_{máx} = 1250$ abejas

Rpta.: A

2. Se tiene un ángulo θ en posición normal tal que $\frac{3\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 2\pi$ y $\tan\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. Halle $\frac{6561}{79}\text{sen}4\theta$.

A) $-12\sqrt{5}$ B) $12\sqrt{5}$ C) $-16\sqrt{5}$ D) $16\sqrt{5}$

Solución:

$$\tan\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 4\sqrt{5} > 0$$

$$\frac{6561}{79}\text{sen}4\theta = \frac{6561}{79}.2.\text{sen}2\theta\cos2\theta$$

$$= \frac{6561}{79}.2.\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\frac{6561}{79}\text{sen}4\theta = -16\sqrt{5}$$

Rpta.: C

3. Una hormiguita inicialmente se encuentra en el origen de coordenadas de un sistema XY, luego hace un recorrido hasta ubicarse en un punto que pertenece al lado final de un ángulo en posición normal θ. Si $\tan\theta > 0$ y $\text{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$, halle $\sqrt{2\sqrt{2}+2}.\text{sen}\theta$.

A) 2 B) 3 C) –3 D) –2

Solución:

$$\cos\theta = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$\cos\theta = 1 - \sqrt{2} < 0$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}+2}.\text{sen}\theta = \sqrt{2\sqrt{2}+2}.\left(-\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$$

$$\sqrt{2\sqrt{2}+2}.\text{sen}\theta = -2$$

Rpta.: D

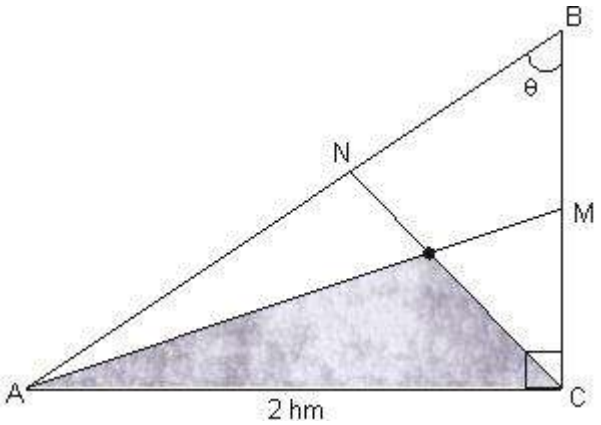
4. En la figura se representa la vista superior de un terreno de forma triangular ACB donde $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ son bisectrices de los ángulos CAB y BCA respectivamente. ¿Cuánto es el área de la región sombreada?

A) $\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)$ hm^2

B) $\left(1-\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$ hm^2

C) $\left(1+\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$ hm^2

D) $\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)$ hm^2



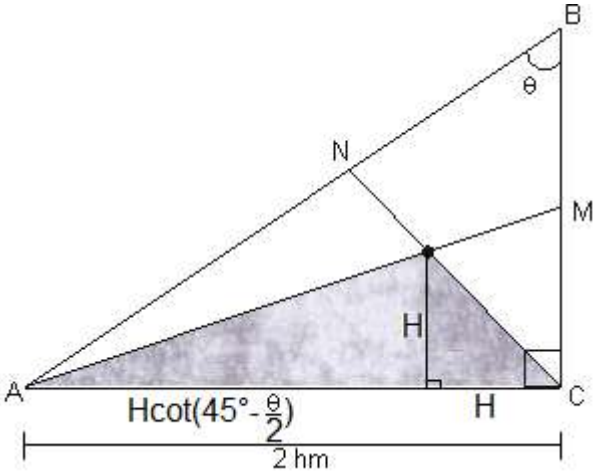
Solución:

$$2 = H\cot\left(45° - \frac{\theta}{2}\right) + H$$

$$H = \frac{2}{1+\cot\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$H = \frac{2}{1+\dfrac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}}$$

$$\text{Área} = \left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)\text{hm}^2$$



Rpta.: D

5. Un árbol medido desde el suelo hasta la cima tiene una altura de $9\cot 3\theta$ m. Si a la mitad de dicha altura se pone un letrero colgante y se cumple que $\tan\left(\frac{\pi}{12}-\theta\right)=2$ ¿A qué altura se encuentra dicho letrero?

A) 6,5 m B) 7 m C) 6,5 m D) 6 m

.

Solución:

$*\text{Sea } \alpha = \frac{\pi}{12} - \theta$

$*\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$

$\tan 3\alpha = \frac{2}{11}$

$*\tan 3\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3\theta\right)$

$\frac{2}{11} = \frac{1 - \tan 3\theta}{1 + \tan 3\theta}$

$4{,}5\cot\theta = 6{,}5 \text{ m}$

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En un triángulo BAC se cumple que

$$\cos\left(\frac{3B}{2}\right)=-4\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos A\cos C \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{3B}{2}\right)=-4\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\cos(A+C).$$

Determine que tipo de triángulo es BAC.

A) Rectángulo de 45º
B) Equilátero
C) Acutángulo
D) Rectángulo de 30º y 60º

Solución:

$$\cos\left(\frac{B}{2}\right)(2\cos B-1)=-4\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos A\cos C$$

$$\Rightarrow A+B+C=180^o \Rightarrow \cos B=-\cos(A+C)$$

$$-2\cos A\cos C+2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C-1=-4\cos A\cos C$$

$$A-C=60^o$$

También

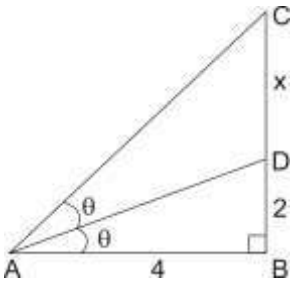
$$\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)(2\cos B+1)=-4\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\cos(A+C) \Rightarrow A+C=120^o$$

Finalmente $A=(120^o+60^o)\frac{1}{2}=90^o$ y $C=(120^o-60^0)\frac{1}{2}=30^o \Rightarrow B=60^o$

Rpta.: D

2. Tres móviles parten siguiendo trayectorias rectilíneas desde el punto A hacia los puntos C, D y B, tal como se muestra en la figura. Si DB=2u, determine el triple de la distancia de separación entre los puntos C y D

A) 10 u
B) 13 u
C) 5 u
D) 8 u



Solución:

$$\Delta ABD:\ tg\theta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC:\ tg2\theta=\frac{x+2}{4}=\frac{2(1/2)}{1-(\frac{1}{2})^2} \Rightarrow \frac{x+2}{4}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3x=10$$

Rpta.: A

3. Si $H(\alpha)=\dfrac{\text{sen}^8\alpha-\cos^8\alpha}{\text{sen}^4\alpha\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha\cos^4\alpha}$ representa la altura de un edificio en metros, donde α es el ángulo de elevación de una persona en el suelo a la azotea del edificio, halle la altura del edificio para $\alpha=22^o30'$

A) 3 m B) 4 m C) 5 m D) 6 m

Solución:

$$H(\alpha)=\frac{\text{sen}^8\alpha-\cos^8\alpha}{\text{sen}^4\alpha\cos^3\alpha-\text{sen}^2\alpha\cos^4\alpha}=\frac{(\text{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha)(\text{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha)}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha(\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)}$$

$$=\frac{(\text{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha)(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)(\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha(\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)}=\frac{1-2\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$$

$$H(\alpha)=\frac{4}{4\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}-2$$ Entonces

$$H(22^o30')=\frac{4}{1/2}-2=6$$

Rpta: D

4. Un ingeniero desea calcular el área de un terreno de forma triangular ABC, con la ayuda de un teodolito situado en el punto A obtiene los siguientes datos AB=40m, $AC=(40+20\sqrt{12})m$ y la medida del ángulo B es el triple de C, calcule el área de dicho terreno.

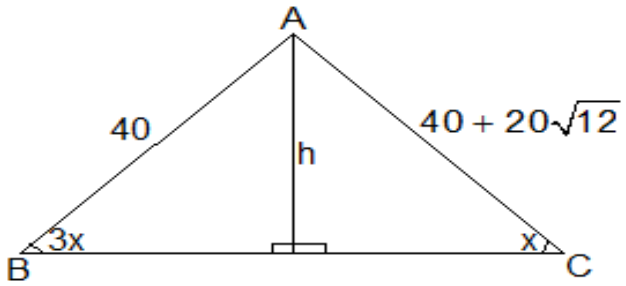
A) $400(3+\sqrt{3})m^2$

B) $200(3+\sqrt{3})m^2$

C) $400(5+\sqrt{3})m^2$

D) $100(3+\sqrt{3})m^2$

Solución:



$$h=40\text{sen}3x=(40+20\sqrt{12})\text{sen}x$$

$$h=40\text{sen}x(2\cos 2x+1)=(40+20\sqrt{12})\text{sen}x$$

$$2\cos 2x+1=1+\sqrt{3}\Rightarrow\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=15^o \text{ y } A=120^o$$

$$\text{Area} = A = \frac{1}{2}(40)(40+20\sqrt{12})\text{sen}120^{o} = 400(3+\sqrt{3})\text{m}^2$$

Rpta.: A

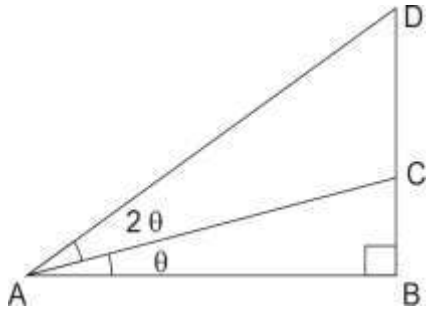
5. En la figura, se tiene un poste BD sujetado por dos cables AC y AD. Si BC=1 m y AB=3 m , halle la longitud del poste BD.

A) $\frac{11}{4}$ m

B) 2 m

C) $\frac{13}{5}$ m

D) $\frac{13}{3}$ m



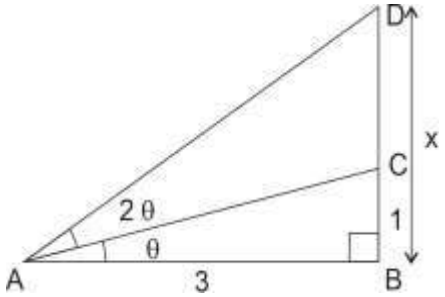
Solución:

Sea x la longitud del poste BD. $\text{tg}\theta = \frac{1}{3}$

y $\text{tg}3\theta = \frac{x}{3}$

$$\frac{3\,\text{tg}\theta - \text{tg}^3\theta}{1-3\,\text{tg}^2\theta} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-3\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{x}{3}$$

$$BD = x = \frac{13}{3}\text{m}$$



Rpta.: D

6. Carlos le dice a su amiga Mariana que su edad es $16\,\text{sen}(6\alpha)$ años. Si $\text{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, ¿cuál es la edad de Mariana si es mayor en 1 año que Carlos?

A) 11 B) 21 C) 12 D) 15

Solución:

$$\text{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \text{sen}2\alpha = \frac{1}{4}$$

$\text{sen}6\alpha = 3\left(\frac{1}{4}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{11}{16} \Rightarrow 16\text{sen}6\alpha = 11$, la edad de Mariana es 12 años

Rpta: C

7. Si un profesor escribe en la pizarra la expresión $\sec 20^o = n$ y su alumno escribe en su cuaderno expresión $A = 2\cos^2 40^o - 1$, el profesor le pide expresar A en términos de n. Dar como respuesta dicho resultado.

A) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{n^2-1}}{n-2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{n^2-1}}{n+2}$

C) $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{n^2-1}}{n-3}$ D) $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{n^2-1}}{2n}$

Solución:

$$\sec 20^o = n \Rightarrow \cos 20^o = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{sen}20^o = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}$$

$$\text{sen}10^o = \text{sen}(30^o - 20^o) = \frac{1}{2n} - \frac{\sqrt{n^2-1}\,\sqrt{3}}{2n} = \frac{1-\sqrt{3}\sqrt{n^2-1}}{2n}$$

$$2\cos^2 40^o - 1 = \text{sen}10^o = \frac{1}{2n} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{n^2-1}}{2n}$$

Rpta: D

8. El salario semanal de Luis es de 500 soles más el 15% de comisión sobre las ventas semanal que realice; si ésta llega a 600(sen54° – sen18°) soles; ¿cuál es el salario semanal de Luis?

A) 524 soles B) 555 soles C) 545 soles D) 654 soles

Solución:

$$M = \text{sen}54^o - \text{sen}18^o = \cos 36^o - \text{sen}18^o$$

Sea $\alpha = 18^o \Rightarrow 2\alpha + 3\alpha = 90^o \Rightarrow \text{sen}2\alpha = \cos 3\alpha$

$$2\text{sen}\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \Rightarrow 4\text{sen}^2\alpha + 2\text{sen}\alpha - 1 = 0$$

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}18^o = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 36^o = 1 - 2\text{sen}^2 18^o \Rightarrow M = \cos 36^o - \text{sen}18^o = 1 - 2\text{sen}^2 18 - \text{sen}18^o$$

$$= 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Luis recibe } 500 + \frac{15}{100}(600)(\frac{1}{2}) = 545$$

Rpta.: C

9. Simplificar la expresión $\dfrac{\tan 16^o \text{sen}32^o + 2\text{sen}^2 16^o \cot 32^o}{\csc 32^o \tan 16^o} - \text{sen}^2 32^o$

A) $\text{sen}64^o$ B) $2\text{sen}64^o$ C) $\frac{1}{2}\text{sen}32^o$ D) $\frac{1}{2}\text{sen}64^o$

Solución:

$$K=\frac{\frac{\text{sen}16^o}{\cos16^o}\text{sen}32^o+2\text{sen}^2 16^o\frac{\cos32^o}{\text{sen}32^o}}{\frac{1}{\text{sen}32^o}\frac{\text{sen}16^o}{\cos16^o}}-\text{sen}^2 32^o$$

$$=\frac{\frac{\text{sen}16^o\text{sen}^2 32^o+2\text{sen}^2 16\cos16^o\cos32^o}{\cos16^o\text{sen}32^o}}{\frac{\text{sen}16^o}{\text{sen}32^o\cos16^o}}-\text{sen}^2 32^o$$

$$=\text{sen}^2 32^o+2\text{sen}16^o\cos16^o\cos32^o-\text{sen}^2 32^o$$

$$=\text{sen}32^o\cos32^o=\frac{1}{2}\text{sen}64^o$$

Rpta: D

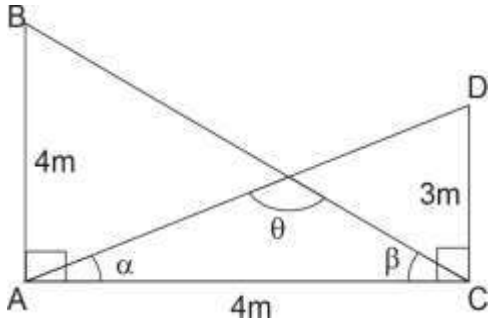
10. Desde los puntos C y A se observan los puntos más altos de dos postes de alumbrado público de 4m y 3m respectivamente. La altura del poste AB =AC. Halle $\tan(\pi-\theta)$

A) 1

B) 7

C) 3

D) 4

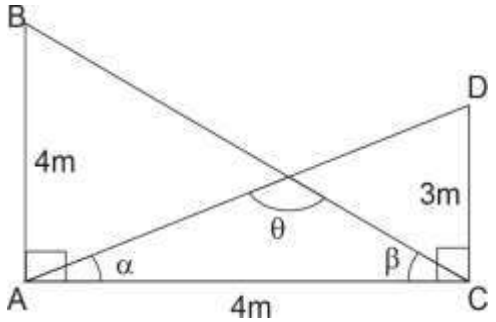


Solución:

$\tan\alpha=\frac{3}{4}\wedge\tan\beta=1$ y $\alpha+\beta=\pi-\theta$

$$\tan(\pi-\theta)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan\theta=\frac{\frac{3}{4}+1}{1-(1)\frac{3}{4}}=7$$



Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un terreno de forma triangular, cuyos ángulos son α,β,θ, y un dato importante para valorizar dicho terreno está dado por el número M. Si $\tan\alpha+\tan\beta=\tan\theta$ y $\text{sen}\alpha\text{sen}\beta=M\cos\alpha\cos\beta$, halle M^2+1.

A) 5 B) 21 C) 10 D) 15

Solución:

En el triángulo $\alpha+\beta+\theta=\pi$ y $\tan(\alpha+\beta)=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\tan\theta \Rightarrow \underbrace{\tan\alpha+\tan\beta}_{\tan\theta}+\tan\theta=\tan\alpha\tan\beta\tan\theta \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta=2$$

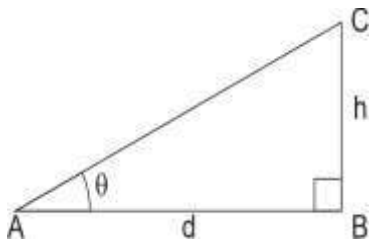
Acomodando: $\tan\alpha\tan\beta=2\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=2\cos\alpha\cos\beta\Rightarrow M=2$

$E=M^2+1=4+1=5$

Rpta.: A

2. Sea A el punto inicial de una pendiente, cuya inclinación respecto del horizonte es θ, la razón entre las longitudes CB y AB es como h es a d. Si $h=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, $d=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$ y α es agudo, halle α en términos de θ.

A) 3θ
B) 2θ
C) $\frac{\theta}{3}$
D) $\frac{\theta}{2}$



Solución:

$$\tan\theta=\frac{h}{d}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\cos2\alpha}=\tan2\alpha \Rightarrow \theta=2\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{\theta}{2}$$

Rpta.:D

3. Los números $a=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$, $b=\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, $c=\tan\alpha+\tan\beta$, $d=\tan\alpha-\tan\beta$ y $e=\tan\alpha\tan\beta$, determine $\frac{a+b}{a-b}+\frac{c(1+e)}{d(1-e)}$, con $\alpha+\beta=p$ y $\alpha-\beta=q$, $p>q$.

A) $\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}q}+\frac{\tan p}{\tan q}$ B) $\frac{\operatorname{sen}q}{\operatorname{sen}p}+\frac{\tan p}{\tan q}$ C) $\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}q}+2\frac{\tan p}{\tan q}$ D) $2\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}q}+\frac{\tan p}{\tan q}$

Solución:

$$H=\frac{a+b}{a-b}+\frac{c(1+e)}{d(1-e)}=\frac{\overbrace{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}^{\operatorname{sen}(p)}}{\underbrace{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}_{\operatorname{sen}(q)}}+\frac{(\tan\alpha+\tan\beta)(1+\tan\alpha\tan g\beta)}{(\tan\alpha-\tan\beta)(1-\tan\alpha\tan g\beta)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}q}+\frac{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}{\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}\Rightarrow\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}q}+\frac{\overset{p}{\tan(\alpha+\beta)}}{\underset{q}{\tan(\alpha-\beta)}}\Rightarrow\frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}q}+\frac{\tan p}{\tan q}$$

Rpta.: A

4. La suma y diferencia entre las alturas de dos mesas en metros es $2\csc 2\alpha$ y $2\cot 2\alpha$, respectivamente. Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$, determine la mayor altura en metros de las mesas.

A) $\cot 2\alpha + 2\csc 2\alpha$
B) $\cot 2\alpha + \csc 2\alpha$
C) $2\cot 2\alpha + \csc 2\alpha$
D) $2\cot 2\alpha + 3\csc 2\alpha$

Solución:
Sea h_1: altura mesa mayor
h_2: altura mesa menor
Entonces:
$h_1 + h_2 = 2\csc 2\alpha$
$h_1 - h_2 = 2\cot 2\alpha$
$\Rightarrow h_1 = \csc 2\alpha + \cot 2\alpha$

Rpta.: B

5. Un alambre flexible y con restitución muy buena, se dobla dos veces en dos de sus puntos, tal que los ángulos que se forman son α y β que sumados dan $\frac{\pi}{4}$rad. Si $E = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta$ y E representa un índice que indica la estabilidad de los ángulos frente a la restitución, halle E.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 1

Solución:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$$
$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta = 1$$

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Margarita le pide a su mejor amigo Alonso que la ayude con un ejercicio que no ha podido resolver. El ejercicio dice lo siguiente: "Si se sabe que la suma de la $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$ y $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}$ es m, determine una expresión equivalente a $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{9}$". Además, Alonso pudo ayudar a Margarita. En ese sentido, ¿cuál es el resultado al cual ha llegado Alonso?

A) $\frac{1-m}{m^2}$ B) $\frac{1}{m^2}$ C) $\frac{1}{m-1}$ D) $\frac{m+1}{m^2}$ E) $\frac{m-1}{2m}$

Solución:

Sabemos $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}=m$

Entonces $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}+\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}=m$

Entonces $\csc\frac{4\pi}{9}=\frac{m}{2}$

Luego $E=\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{m^2}\right)=\frac{1}{m^2}$.

Rpta.: B

2. El profesor de Trigonometría les pide a sus alumnos que a partir del siguiente dato: $2-3\text{tg}\beta=\sec^2\beta$, determinen el valor de la cotangente del ángulo cuádruple de β. Si Juan, alumno de dicha clase responde adecuadamente, ¿cuál será el valor al cual ha llegado Juan?

A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{12}{7}$ E) $\frac{13}{12}$

Solución:

Sabemos que: $2-3\text{tg}\beta=\sec^2\beta$

Entonces $2\cos^2 x-1=3\text{sen}x\cdot\cos x$

Luego $\text{tg}2x=\frac{2}{3}$

Por lo tanto, $\text{tg}\ 4x=\dfrac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-\frac{4}{9}}=\frac{12}{5}$

De esta manera, se obtiene que $\text{ctg}\ 4x=\frac{5}{12}$.

Rpta.: C

3. Lucero le comenta a su hermano mayor que en el curso de Trigonometría, le han dejado un ejercicio en donde le piden encontrar una expresión equivalente a $\sec 4\alpha-\cos 4\alpha$ y en términos de k; si se sabe que $\text{tg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=2k+\text{tg}(2019\pi+\alpha)$ donde $k\neq\pm1$. En base a la información dada, determine la expresión a la cual debe llegar Lucero.

A) $\frac{4k^2}{k^4-1}$ B) $\frac{3k^2}{k^3-1}$ C) $\frac{k^2}{k^2-1}$ D) $\frac{2k^2}{k^2-1}$ E) $\frac{3k^2}{k-1}$

Solución:

Sabemos que : $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\text{tg}(\pi+\alpha)=2k$

Entonces $\text{ctg}\alpha-\text{tg}\alpha=2k$

Entonces $\text{ctg}2\alpha=k$

Además, $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$

Entonces $\cos 4\alpha = \dfrac{k^2-1}{k^2+1}$

Por lo tanto, $\sec 4\alpha - \cos 4\alpha = \dfrac{k^2+1}{k^2-1} - \dfrac{k^2-1}{k^2+1} = \dfrac{4k^2}{k^4-1}$.

Rpta.: A

4. Si H representa el máximo valor de $\cos^5 t \cdot \text{sen}t - \text{sen}^5 t \cdot \cos t$ y $M = 32H^2$, donde M representa el número de sobrinas que tiene Miguel, determine el valor de M.

A) 5 B) 1 C) 4 D) 3 E) 2

<u>Solución</u>:

Sabemos que: $E = \cos^5 t \cdot \text{sen}t - \text{sen}^5 t \cdot \cos t = \text{sen}t \cos t(\cos^2 t - \text{sen}^2 t) = \dfrac{1}{4}\text{sen}4t$

Como $-\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{4}\text{sen}4t \le \underbrace{\dfrac{1}{4}}_{H}$

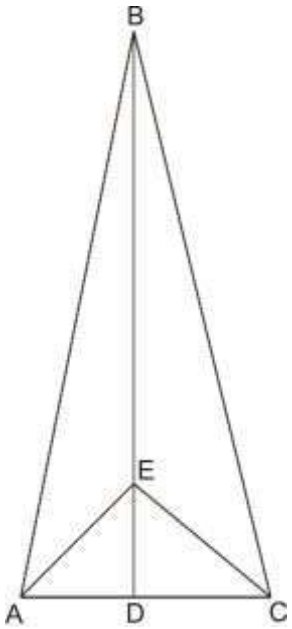
Es decir, $H = \dfrac{1}{4}$

Entonces $M = 32\left(\dfrac{1}{16}\right) = 2$.

Por lo tanto, Miguel tiene dos sobrinas.

Rpta.: E

5. En la figura, se muestra como están ubicadas **A**lejandra (A), **B**elén (B), **E**thel (E), **D**iana (D) y **C**arolina (C) . Asimismo, Diana se ubica aproximadamente a $\sqrt{2}$ m de Alejandra y a $\sqrt{3}$ m de Carolina. Si $m\measuredangle BCE = m\measuredangle ECD$, $m\measuredangle EAD = 45°$, $m\measuredangle ADB = 90°$ y $m\measuredangle ABD = \beta$; calcule $2\csc^2\beta$.



A) 74

B) 54

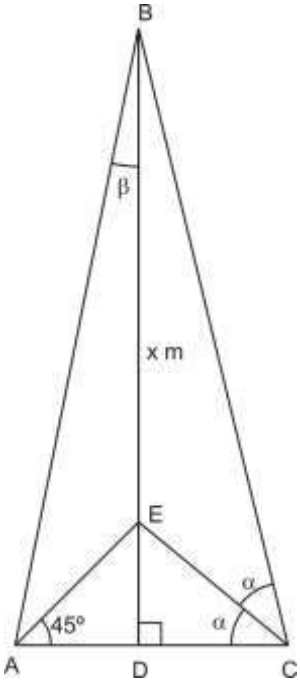
C) 60

D) 62

E) 72

Solución:

A partir de la información dada, y con la siguiente representación gráfica, se tiene que:



$$tg2\alpha = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{1-\frac{2}{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad x = 5\sqrt{2}$$

Por lo tanto, $ctg\beta = 6$

Entonces, $2\csc^2\beta = 2(1+36) = 74$.

Rpta.: A

6. Marco Antonio está muy emocionado pues dentro de M meses será mayor de edad.

Si $M=\dfrac{\csc\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\alpha}$, determine cuántos meses faltan para que Marco Antonio sea mayor de edad de acuerdo a nuestras leyes peruanas.

A) 2 B) 1 C) 6 D) 5 E) 3

Solución:

Sea $$M=\frac{\csc\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\left(2\csc\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{ctg}\alpha\right)}$$

Entonces $$M=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=1.$$

Por lo tanto, falta 1 mes para que Marco Antonio sea mayor de edad.

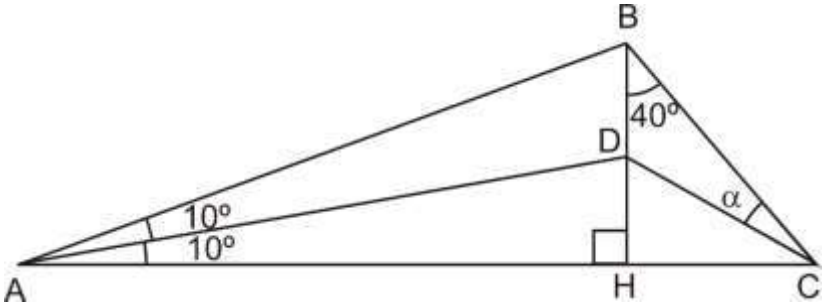
Rpta.: B

7. Con los datos de la figura adjunta, determine la medida del ángulo α.

A) 10° B) 40°

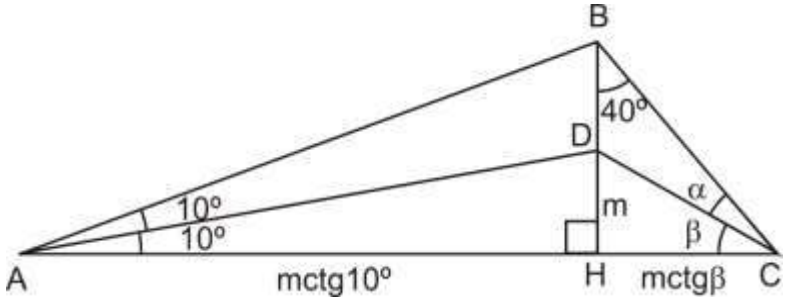
C) 30° D) 25°

E) 20°



Solución:

A partir de la información dada, y con la siguiente representación gráfica, se tiene que:



En el triángulo AHB: $\text{ctg}20° = \dfrac{\text{mctg}10°}{\text{mctg}\beta \cdot \text{ctg}40°}$

Luego, $\text{tg}\beta = \text{tg}10° \cdot \text{tg}50° \cdot \text{tg}70°$

De donde, se obtiene que: $\text{tg}\beta = \text{tg}3(10°) = \text{tg}30°$

Por lo tanto, la medida del ángulo α es $20°$.

Rpta.: E

8. Si $\dfrac{A\text{sen}4x + B\cos 2x}{\text{sen}x + \cos x} = \text{sen}3x \cdot \text{ctg}x + \cos 3x \cdot \text{tg}x$ es una identidad trigonométrica, determine el valor de $(B + A)^A$.

A) 4 B) 2 C) 9 D) 1 E) 25

Solución:

Sabemos que: $\dfrac{A\text{sen}4x + B\cos 2x}{\text{sen}x + \cos x} = \text{sen}3x \cdot \text{ctg}x + \cos 3x \cdot \text{tg}x$ es una identidad.

Entonces $\dfrac{A\text{sen}4x + B\cos 2x}{\text{sen}x + \cos x} = \text{sen}3x\left(\dfrac{\cos x}{\text{sen}x}\right) + \cos 3x\left(\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}\right)$

Luego, $\dfrac{A\text{sen}4x + B\cos 2x}{\text{sen}x + \cos x} = 2\cos 2x(\text{sen}x + \cos x) + (\cos x - \text{sen}x)$

Entonces $A\text{sen}4x + B\cos 2x = 2\cos 2x(\text{sen}x + \cos x)^2 + (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$

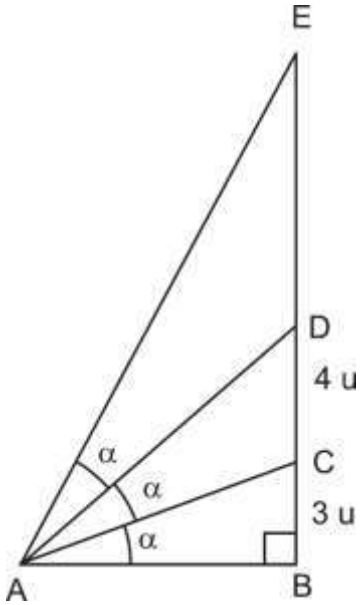
Entonces $A\text{sen}4x + B\cos 2x = 2\cos 2x(1+\text{sen}2x) + \cos 2x = 3\cos 2x + \text{sen}4x$

Por lo tanto, $A = 1$ y $B = 3$

Finalmente, $(B+A)^A = 4$.

Rpta.: A

9. Con los datos de la figura mostrada, determine el área de la región triangular ABE.



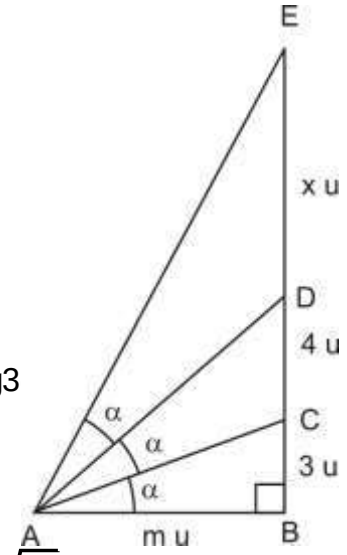
A) $\dfrac{9\sqrt{63}}{2}$ u^2 B) $\dfrac{11\sqrt{63}}{2}$ u^2

C) $\dfrac{15\sqrt{63}}{2}$ u^2 D) $5\sqrt{63}$ u^2

E) $\dfrac{13\sqrt{63}}{2}$ u^2

<u>Solución</u>:

A partir de la información dada, y con la siguiente representación gráfica, se tiene que:



$\text{tg}\alpha = \dfrac{3}{m}$, $\text{tg } 2\alpha = \dfrac{7}{m}$ entonces $\dfrac{7}{m} = \dfrac{6m}{m^2-9}$

Por lo tanto, $m = \sqrt{63}$

Por otro lado, tg3 $\Rightarrow$ $x = 8$

Finalmente, el área de la región triangular es: $\dfrac{15\sqrt{63}}{2}$ u^2.

Rpta.: C

10. Para algún ángulo θ, se cumple que la media aritmética y la media geométrica de los números $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ son $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, respectivamente. En base a la información dada, calcule $\cos 14\theta$.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) -1 D) 1 E) 0

Solución:

A partir de la información dada, se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{2} \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \sqrt{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}$$

Entonces, $$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}\right)^2$$

$$1 = \frac{1 + \operatorname{sen}(2\theta)}{4} + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 1 \quad \rightarrow \quad 2\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Luego:

$$\cos(14\theta) = \cos\left[7\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \ \cos 14\theta = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0.$$

Rpta.: E

EJERCICIOS

1. Si $\operatorname{ctg}\theta = -\frac{1}{2}$ y θ pertenece al cuarto cuadrante, determine el valor de $\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\theta}{2}\right)$.

A) $\sqrt{5}+2$ B) 3 C) $3-\sqrt{5}$ D) $3+\sqrt{5}$ E) 1

Solución:

Por dato, sabemos que: $\operatorname{ctg}\theta = -\frac{1}{2}\Big|$, donde θ pertenece al cuarto cuadrante

Además,

$M = tg\left(45^o - \frac{\theta}{2}\right) = ctg\left(45^\circ + \frac{\theta}{2}\right) = csc(90^\circ + \theta) + ctg(90^\circ + \theta)$ (Identidades especiales)

$M = \sec\theta - tg\theta$

Como $tg\theta = -2 \wedge \theta \in IVC \Rightarrow \sec\theta = \sqrt{5} \quad \wedge \quad tg\theta = -2$

$\therefore \quad M = \sqrt{5} + 2$

Rpta.: A

2. Si $a(sen4\alpha - 1) = -\cos 4\alpha$ y $a > 0$, determine el valor de $ctg\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$.

A) 2a B) a C) $\frac{a}{2}$ D) $\frac{1}{2a}$ E) $\frac{1}{a}$

Solución:

Como $a(sen4\alpha - 1) = -\cos 4\alpha \rightarrow \sec 4\alpha - tg4\alpha = \frac{1}{a} \rightarrow \quad \sec 4\alpha + tg4\alpha = a$

Además, sabemos $ctg\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = csc\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right) + ctg\left(\frac{\pi}{2} - 4\alpha\right)$

$$\Rightarrow \quad ctg\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \sec 4\alpha + tg4\alpha = a\ .$$

Rpta.: B

3. Simplifique la expresión $\cos^6 12^\circ - \frac{5}{\sec^2 12^\circ + \csc^2 12^\circ} + sen^6 12^\circ$.

A) $sen24^\circ$ B) $\cos 12^\circ$ C) $\cos 48^\circ$ D) $sen48^\circ$ E) $\cos 24^\circ$

Solución:

Sea

$M = \cos^6 12^\circ - \frac{5}{\sec^2 12^\circ + \csc^2 12^\circ} + sen^6 12^\circ$

$M = 1 - 3sen^2 12^\circ \cos^2 12^\circ - 5\cos^2 12^\circ sen^2 12^\circ$

$M = 1 - 8sen^2 12^\circ \cos^2 12^\circ = 1 - 2(sen^2 24^\circ) = 1 - 2sen^2 24^\circ = \cos 48^\circ$.

Rpta.: C

4. Si el ángulo θ mide $7^{o}30'$, determine el valor de $Y = 16\left(\cos^3\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\right)$, el mismo que representa el precio de un chocolate en soles. En base a la información dada, determine el monto a pagar si se compran 10 chocolates.

A) 21 soles B) 25 soles C) 30 soles D) 20 soles E) 35 soles

<u>Solución</u>:

Sea $Y = 16\left(\cos^3\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta\cos\theta\right)$

Entonces $Y = 16\cos\theta \operatorname{sen}\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$

Luego, $Y = 16\left[\dfrac{2\cos\theta \operatorname{sen}\theta(\cos 2\theta)}{2}\right] = 16\left[\dfrac{2\operatorname{sen}2\theta\cos 2\theta}{2(2)}\right] = 16\left[\dfrac{\operatorname{sen}4\theta}{4}\right]$

Entonces $Y = 16\left[\dfrac{\operatorname{sen}4\theta}{4}\right] = 16\left[\dfrac{\operatorname{sen}30^{o}}{4}\right] = 2$.

Finalmente, 10 chocolates cuestan 20 soles.

Rpta.: D

5. Un terreno de forma rectangular tiene $20\left[\dfrac{\operatorname{sen}2x\,.\cos x}{(1+\cos 2x)(1+\cos x)}\right]^3$ metros de largo y $\csc^3\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{3x}{2} + 3\cos\dfrac{x}{2}\right)$ metros de ancho, donde el ángulo x es agudo. Si cada metro cuadrado del terreno está valorizado en 1000 soles, determine el precio del terreno.

A) 60 000 soles B) 100 000 soles C) 70 000 soles

D) 90 000 soles E) 80 000 soles

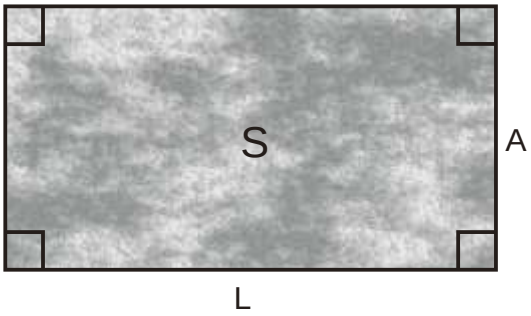
Solución:

Sea S: Área

$$L = 20\left[\frac{\text{sen}2x\,.\cos x}{(1+\cos 2x)(1+\cos x)}\right]^3$$

$$L = 20\left[\frac{2\text{sen}x.\cos x.\cos x}{2\cos^2 x.2\cos^2\frac{x}{2}}\right]^3$$

$$L = 20\left[\frac{2\text{sen}\frac{x}{2}\,.\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right]^3$$



$$L = 20\text{tg}^3\frac{x}{2} \qquad \ldots\ (1)$$

$$A = \csc^3\frac{x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + 3\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$A = \csc^3\frac{x}{2}\left(4\cos^3\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$A = 4\text{ctg}^3\frac{x}{2} \qquad \ldots\ (2)$$

Luego $S = L.A \quad \rightarrow \quad S = 80\,m^2$

$\therefore$ El costo del terreno es 80 000 soles.

Rpta.: E

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Harumi le cuenta a su hermana mayor que en el curso de Trigonometría, le han dejado un ejercicio en donde le piden encontrar una expresión equivalente a $1-8C^2$; si se sabe qué $C=2\text{sen}\alpha\cos^3\alpha-2\text{sen}^3\alpha\cos\alpha$. Determine la expresión a la cual debe llegar Harumi.

A) $\text{sen } 4\alpha$ B) $\cos 8\alpha$ C) $4\text{sen } 8\alpha$
D) $8\cos 2\alpha$ E) $3\cos 4\alpha$

Solución:

Sabemos $C=2\text{sen}\alpha\cos^3\alpha-2\text{sen}^3\alpha\cos\alpha$

Entonces $C=2\text{sen}\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha\right)$

Luego $C=\dfrac{1}{2}\text{sen}4\alpha$

Luego $1-8C^2=1-2\text{sen}^2 4\alpha=\cos 8\alpha$.

Rpta.: B

2. Las medidas, en metros, del largo y ancho de una pared son $\dfrac{12\sec t\left(1+\cos 2t\right)}{\cos t}$ y $\left(\dfrac{2+2\text{sen}2t-2\cos 2t}{1+\text{sen}2t+\cos 2t}\right)\left(\text{ctg}2t+\csc 2t\right)$ respectivamente. Si se sabe que el costo por empastar cada metro cuadrado es 25 soles, determine lo que se pagaría por empastar dicha pared.

A) 600 soles B) 1 200 soles C) 1 000 soles
D) 1 500 soles E) 720 soles

Solución:

Sabemos que: $L_{PARED} = \dfrac{12\sec t(1+\cos 2t)}{\cos t} = 12\sec^2 t \cdot 2\cos^2 t = 24$ metros

$$A_{PARED} = \left(\frac{2+2sen2t-2\cos 2t}{1+sen2t+\cos 2t}\right)(ctg2t+\csc 2t)$$

$$A_{PARED} = 2\left(\frac{2sen^2t+2sent\cos t}{2\cos^2 t+2sent\cos t}\right)\frac{\cos\ t}{sen\ t}$$

$$A_{PARED} = 2 \text{ metros}$$

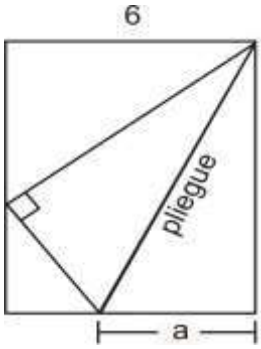
Entonces $A_{PARED} = 48\ m^2$

Luego, $P = 48(25) = 1\,200$ soles

Es decir, por empastar dicha pared se pagará 1 200 soles.

Rpta.: B

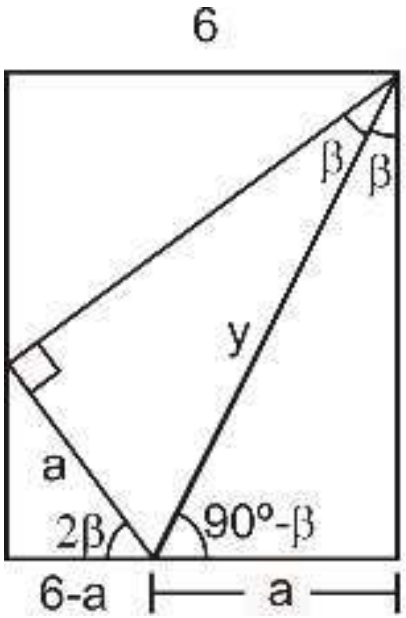
3. La esquina inferior derecha de una hoja rectangular se dobla hasta alcanzar el lado izquierdo, tal y como se muestra en la figura adjunta. Si el ancho de la página es de 6 pulgadas, halle la longitud del pliegue en términos de a.



A) $\sqrt{\dfrac{a}{a-3}}$ pulgadas B) $\sqrt{\dfrac{2a}{a-3}}$ pulgadas C) $a\left(\sqrt{\dfrac{a}{a^2+3}}\right)$ pulgadas

D) $a\left(\sqrt{\dfrac{a}{a-3}}\right)$ pulgadas E) $\dfrac{a}{a-3}$ pulgadas

Solución:



Del gráfico tenemos que:

$\text{sen}\ \beta = \dfrac{a}{y}$ y $\cos 2\beta = \dfrac{6-a}{a}$

Entonces $\dfrac{6-a}{a} = 1 - 2\left(\dfrac{a}{y}\right)^2$

Luego $\dfrac{6-2a}{a} = \dfrac{-2a^2}{y^2}$

Entonces $\dfrac{a-3}{a} = \dfrac{a^2}{y^2}$

Luego $y = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a-3}} = a\left(\sqrt{\dfrac{a}{a-3}}\right)$ pulgadas.

Rpta.: D

4. Si $H = \dfrac{\text{ctg } 14° \cos 28° + 2\cos^2 14° \text{ tg } 28°}{\sec 28° \text{ ctg } 14°}$ y $C = \dfrac{\text{sen}14° + 2\cos 7°}{2 + 2\text{sen}7°}$, determine una expresión equivalente a $\dfrac{1-C^2}{H}$.

A) $\cos^2 14°$
B) $2\text{sen } 7°$
C) $2\cos 14°$
D) $\text{sen}^2 7°$
E) $\text{sen } 14°$

$$H=\frac{\quad}{\sec 28^\circ \operatorname{ctg} 14^\circ}$$

Solución:

Sabemos que: $H=\dfrac{\operatorname{ctg} 14^\circ \cos 28^\circ + 2\cos^2 14^\circ \operatorname{tg} 28^\circ}{\sec 28^\circ \operatorname{ctg} 14^\circ}$

Entonces $H=\dfrac{\dfrac{\cos 14^\circ}{\operatorname{sen} 14^\circ}\cos 28^\circ + 2\cos^2 14^\circ \dfrac{\operatorname{sen} 28^\circ}{\cos 28^\circ}}{\dfrac{1}{\cos 28^\circ}\cdot\dfrac{\cos 14^\circ}{\operatorname{sen} 14^\circ}}$

Luego $H=\dfrac{\cos 14^\circ \cos^2 28^\circ + 2\cos^2 14^\circ \operatorname{sen} 28^\circ \operatorname{sen} 14^\circ}{\cos 14^\circ}=1$

Además, se sabe que: $C=\dfrac{\operatorname{sen}14^\circ+2\cos 7^\circ}{2+2\operatorname{sen}7^\circ}=\dfrac{2\cos 7^\circ(1+\operatorname{sen}7^\circ)}{2(1+\operatorname{sen}7^\circ)}=\cos 7^\circ$.

Finalmente, nos piden $\dfrac{1-C^2}{H}=1-\cos^2 7^\circ=\operatorname{sen}^2 7^\circ$.

Rpta.: D

5. Sea α un ángulo agudo. Si se sabe que el producto de la secante de dicho ángulo y el coseno del triple del ángulo en mención es $\dfrac{1}{4}$, determine el valor de $\cos 4\alpha$.

A) $-\dfrac{5}{32}$ B) $-\dfrac{23}{32}$ C) $-\dfrac{7}{32}$ D) $\dfrac{15}{32}$ E) $\dfrac{17}{32}$

Solución:

Sabemos $\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{4}$

Entonces $\dfrac{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{4}$

Luego $4\cos^2\alpha-3=\dfrac{1}{4}$

Entonces $2\cos^2\alpha = \frac{13}{8}$

Entonces $\cos 2\alpha = \frac{5}{8}$

Luego $\cos 4\alpha = 2\left(\frac{5}{8}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{32}$.

Rpta.: C

6. Lucero, la hija mayor del Sr. Cárdenas, está muy entusiasmada pues dentro de E meses se celebrará su quinceañero. Si E viene dada por la siguiente expresión: $E = \dfrac{3\cos^2 2x - \text{sen}^2 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}$, determine cuántos meses aproximadamente faltan para que se lleve a cabo la fiesta tan esperada por Lucero.

A) 8 meses B) 6 meses C) 3 meses D) 5 meses E) 4 meses

<u>Solución</u>:

Sea $E = \dfrac{3\cos^2 2x - \text{sen}^2 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}$

Entonces $E = \dfrac{3\cos^2 2x - \text{sen}^2 2x}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}$

Luego $E = \dfrac{3\cos^2 2x - \text{sen}^2 2x}{\text{sen}^2\frac{\pi}{3} - \text{sen}^2 2x} = \dfrac{4\left(3 - 4\text{sen}^2 2x\right)}{3 - 4\text{sen}^2 2x} = 4$.

Por lo tanto, faltan aproximadamente 4 meses para que Lucero celebre su fiesta.

Rpta.: E

7. Si $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 2$, determine el valor de $44\ \text{ctg}6x$.

A) –121 B) 132 C) 121 D) –117 E) 117

Solución:

Sabemos que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}$

Luego $\operatorname{tg}\left[3\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]=\dfrac{3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{1-3\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}=\frac{11}{2}$

Entonces $\operatorname{tg}3x=\frac{11}{2}$

Por lo tanto, $\operatorname{tg}6x=\operatorname{tg}[2\ 3x\ ]=\dfrac{2\operatorname{tg}3x}{1-\operatorname{tg}^2 3x}=-\frac{44}{117}$

Finalmente, $44\ \operatorname{ctg}6x=-117$.

Rpta.: D

8. En un plano, la distancia de la casa de Cecilia a su centro de estudios es de $\left(8\operatorname{sen}^3\beta+2\operatorname{sen}3\beta\right)\csc\beta+\left(8\cos^3\beta-2\cos3\beta\right)\sec\beta$ cm. Si se sabe que la escala del plano es $E=\frac{1}{10^4}$, ¿cuál sería la distancia real en kilómetros?

A) 1,2 km B) 0,12 km C) 0,6 km D) 1,8 km E) 2,1 km

Solución:

Sabemos que la distancia de la casa de Cecilia a su centro de estudios, es:

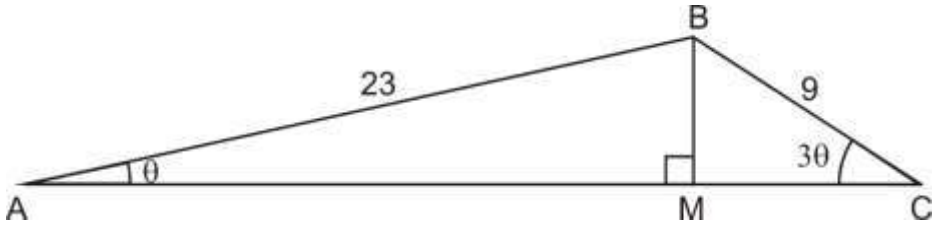
$$D=\left(8\operatorname{sen}^3\beta+2\operatorname{sen}3\beta\right)\csc\beta+\left(8\cos^3\beta-2\cos3\beta\right)\sec\beta\ \text{cm}$$
$$D=2\left(4\operatorname{sen}^3\beta+\operatorname{sen}3\beta\right)\csc\beta+2\left(4\cos^3\beta-\cos3\beta\right)\sec\beta\ \text{cm}$$
$$D=2(3)+2(3)=12\ \text{cm}$$

Por otro lado, sabemos que el plano ha sido elaborado a escala. Como $E=\frac{1}{10^4}$, se tiene $\frac{1}{10^4}=\frac{12\text{ cm}}{x}$.

Por lo tanto, la distancia real de la casa de Ceci a su centro de estudios es $1{,}2$ km.

Rpta.: A

9. Con los datos de la figura adjunta, determine la razón entre la medida del segmento MC y la medida del segmento AM.



A) $\frac{5}{23}$ B) $\frac{17}{9}$ C) $\frac{23}{9}$ D) $\frac{41}{23}$ E) $\frac{9}{23}$

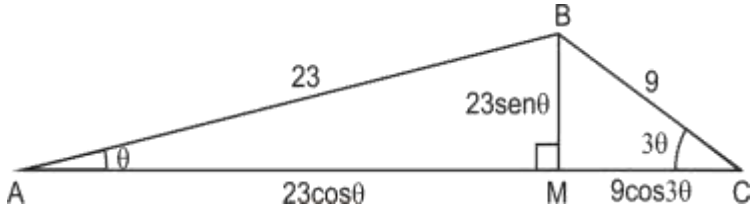
<u>Solución</u>:

Del gráfico, notemos que: $23\text{sen}\,\theta = 9\text{sen}\,3\theta$

Entonces $\frac{23}{9} = \frac{\text{sen}3\theta}{\text{sen}\theta}$

Luego $\frac{23}{9} = 3 - 2\ 1 - \cos 2\theta$

Luego $2\cos 2\theta = \frac{14}{9}$



Finalmente, $\frac{MC}{AM} = \frac{9\cos 3\theta}{23\cos\theta} = \frac{9}{23}\left(\frac{14}{9} - 1\right) = \frac{9}{23}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{23}$.

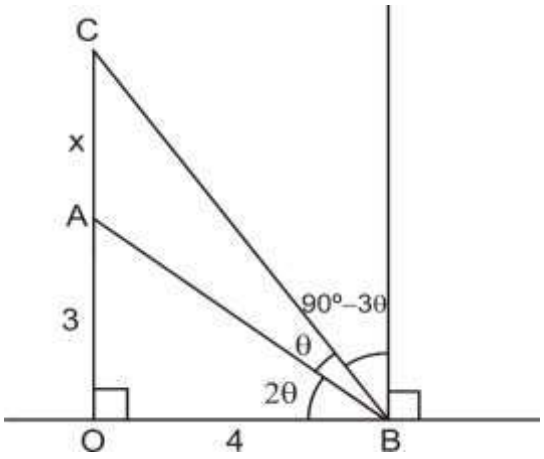
Rpta.: A

10. Carlos se encuentra ubicado a cierta distancia y en dirección $\text{N } 90° - 3\theta \text{ O}$ respecto a Bertha, quien a su vez se encuentra a 4 metros y al Este de Olga. Si Arturo está ubicado a 3 metros y al norte de Olga, pero al Sur de Carlos y el ángulo que se forma entre Carlos, Bertha y Arturo es θ; determine la distancia entre Carlos y Olga.

A) $\frac{25}{9}$ m B) $\frac{47}{9}$ m C) $\frac{52}{9}$ m D) $\frac{59}{9}$ m E) $\frac{44}{9}$ m

Solución:

Del gráfico, notemos que:



$\text{tg } 3\theta = \dfrac{3+x}{4}$,

$\text{tg } 2\theta = \dfrac{2\text{tg}\theta}{1-\text{tg}^2\theta} = \dfrac{3}{4}$

Entonces $\text{tg}\theta = \dfrac{1}{3}$

Luego $\dfrac{3\text{tg}\theta - \text{tg}^3\theta}{1-3\text{tg}^2\theta} = \dfrac{3+x}{4}$

Por lo tanto $x = \dfrac{25}{9}$

Finalmente $d(C,O) = 3 + \dfrac{25}{9} = \dfrac{52}{9}$ m.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La profesora de Trigonometría les pide a sus alumnos que a partir del siguiente dato: $\text{ctg}\left(\dfrac{\pi}{8}+\beta\right) = 3$, determinen el valor de la tangente del ángulo doble de β. ¿Cuál será el valor que la profesora espera que sus alumnos encuentren?

A) $-\dfrac{1}{5}$ B) $-\dfrac{1}{7}$ C) -3 D) -1 E) -5

Solución:

Por dato, sabemos que: $\text{ctg}\left(\dfrac{\pi}{8}+\beta\right) = 3$

Entonces $\text{tg } 2\left(\dfrac{\pi}{8}+\beta\right) = \dfrac{2\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+\beta\right)}{1-\text{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\beta\right)}$

Entonces $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+2\beta\right) = \dfrac{\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{1}{9}} = \dfrac{3}{4}$

Entonces $\dfrac{1+\text{tg}2\beta}{1-\text{tg}2\beta} = \dfrac{3}{4}$

Por lo tanto, $\text{tg } 2\beta = -\dfrac{1}{7}$.

Rpta.: B

2. Si se sabe que $\beta \in \left\langle 0\ ;\ \frac{\pi}{4} \right\rangle$, simplifique la expresión $\dfrac{4\text{tg}\beta\left(1-\text{tg}^2\beta\right)^2}{\sec^4\beta\left(2-\sec^2\beta\right)}$.

A) $\text{sen } 2\beta$ B) $2\cos\ \beta$ C) $\text{sen } 4\beta$ D) $2\cos\ 4\beta$ E) $4\text{sen } 2\beta$

Solución:

Consideremos $H=\dfrac{4\text{tg}\beta\left(1-\text{tg}^2\beta\right)^2}{\sec^4\beta\left(2-\sec^2\beta\right)}=\dfrac{4\text{tg}\beta\cos^4\beta\left(1-\dfrac{\text{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}\right)^2}{2-\dfrac{1}{\cos^2\beta}}$

Entonces $H=\dfrac{4\text{sen}\beta\cos^5\beta\left(\dfrac{\cos^2 2\beta}{\cos^4\beta}\right)}{\cos 2\beta}=2\text{sen}2\beta\cos 2\beta=\text{sen}4\beta$.

Rpta.: C

3. Si $3\text{sen}3\theta\cos\theta+7\text{sen}\theta\cos 3\theta=\frac{1}{2}\text{sen}2\theta$, determine el valor de $16\cos 6\theta$.

A) -16 B) -11 C) 13 D) $\frac{1}{13}$ E) $-\frac{1}{16}$

Solución:

Sabemos $3\text{sen}3\theta\cos\theta+7\text{sen}\theta\cos 3\theta=\frac{1}{2}\text{sen}2\theta$

Entonces $3\text{sen}3\theta\cos\theta+7\text{sen}\theta\cos 3\theta=\text{sen}\theta\cos\theta$

Entonces $3\left(3-4\text{sen}^2\theta\right)+7\left(4\cos^2\theta-3\right)=1$

Entonces $9-6\left(1-\cos 2\theta\right)+14\left(1+\cos 2\theta\right)-21=1$

Luego $\cos 2\theta=\frac{1}{4}$

Finalmente, nos piden $R=16\cos\ 6\theta=16\left[4\left(\frac{1}{64}\right)-3\left(\frac{1}{4}\right)\right]=-11$.

Rpta.: B

4. Si $x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{8}\right\rangle$ y $H=\sqrt{1-\text{sen}4x}+\sqrt{\cos^2\left(\frac{127\pi}{2}-2x\right)+\text{ctg}^2\frac{27\pi}{2}}$, determine $2H^2-1$.

A) $\cos 4x$ B) $\text{sen } 4x$ C) $2\cos 4x$ D) $4\text{sen } 2x$ E) $2\text{sen } 4x$

Solución:

Sea $H=\sqrt{1-\text{sen}4x}+\sqrt{\cos^2\left(\frac{127\pi}{2}-2x\right)+\text{ctg}^2\frac{27\pi}{2}}$

Entonces $H=\sqrt{(\text{sen}2x-\cos 2x)^2}+\sqrt{\cos^2\left(62\pi+\frac{3\pi}{2}-2x\right)+\text{ctg}^2\frac{\pi}{2}}$

Entonces $H=|\text{sen}2x-\cos 2x|+|\text{sen}2x|$

Entonces $H=-\text{sen}2x+\cos 2x+\text{sen}2x=\cos 2x$

Nos piden $2H^2-1=2\cos^2 2x-1=\cos 4x$.

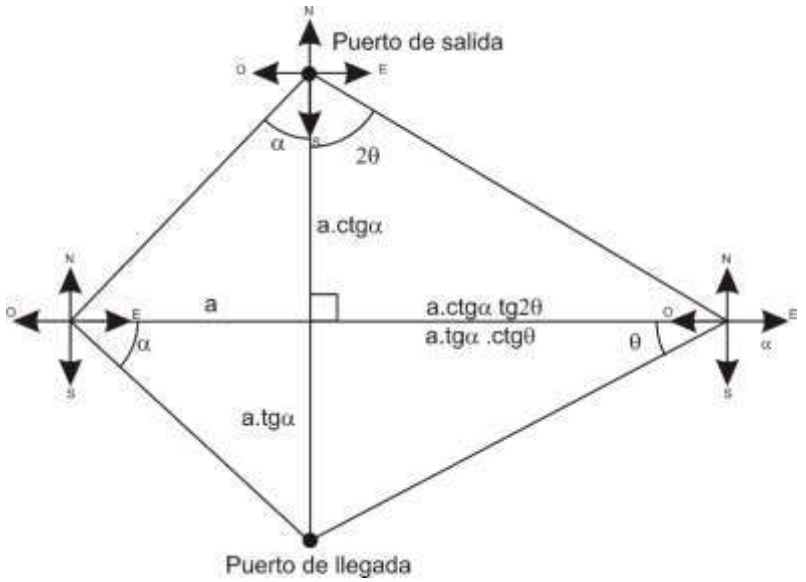
Rpta.: A

5. Tres barcos A, B y C salen de un puerto al mismo tiempo con direcciones $S\alpha O$, S y $S(2\theta)E$ respectivamente. Después de un tiempo, las posiciones tanto de B como de C se ubican al Este de A. Si se sabe que en ese instante los barcos A y C cambian sus direcciones hacia $E\alpha S$ y $O\theta S$ respectivamente para llegar a otro puerto y al mismo tiempo que B; calcule $\text{sen}\,\alpha$.

A) $\sqrt{2}\cos\theta$ B) $\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta$ C) $\frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta$ D) $\sqrt{3}\,\text{tg}\,\theta$ E) $\sqrt{3}\sec\theta$

Solución:

A partir de la información dada, tenemos la siguiente representación gráfica:



Del gráfico, podemos notar que: $\text{tg}\alpha\ \text{ctg}\theta = \text{ctg}\alpha\ \text{tg}2\theta$

Entonces $\text{tg}^2\alpha = \text{tg}2\theta\ \text{tg}\theta$

Luego $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{\text{sen}2\theta\ \text{sen}\theta}{\cos 2\theta\ \cos\theta} + 1$

Entonces $\sec^2\alpha = \dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta\ \cos\theta} = \sec 2\theta$

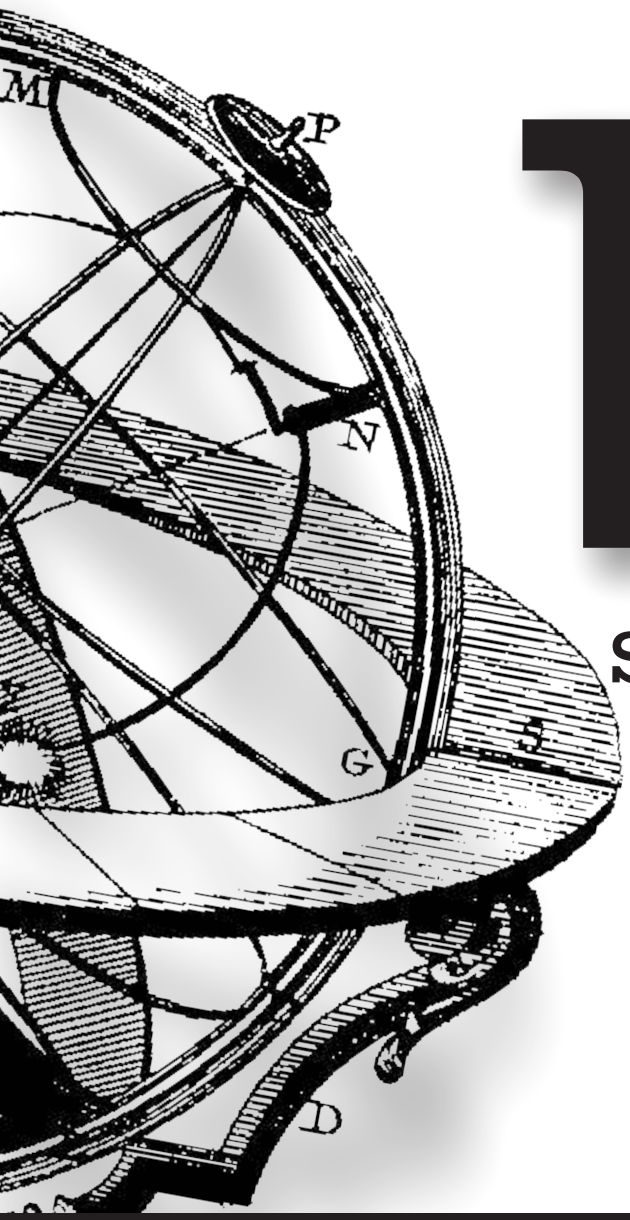
Entonces $\cos^2\alpha = \cos 2\theta$

Entonces $\text{sen}\alpha = \sqrt{2}\ \text{sen}\ \theta$.

Rpta.: B

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



10

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

I. TRANSFORMACIONES EN PRODUCTO DE LA SUMA O DIFERENCIA DE SENOS Y COSENOS

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

II. TRANSFORMACIONES EN SUMAS O DIFERENCIAS DEL PRODUCTO DE SENOS Y COSENOS

$$2\operatorname{sen}A\cos B=\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)$$

$$2\cos A\operatorname{sen}B=\operatorname{sen}(A+B)-\operatorname{sen}(A-B)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

Trigonometría

EJERCICIOS

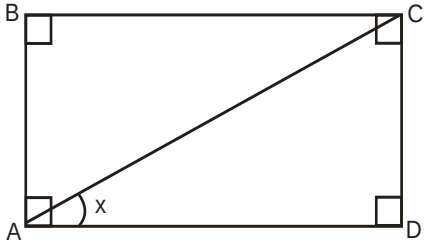
1. Ricardo tiene un terreno rectangular ABCD destinado para el cultivo de papas, tal como indica la figura. Si las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son $(\cos 38° + \text{sen}28°)$km y $(\cos 52° + \text{sen}62°)$km, respectivamente. Si se coloca una cerca $\overline{AC}$ para dividir el terreno, calcule x.

A) 50°

B) 30°

C) 40°

D) 20°



Solución:

Del gráfico

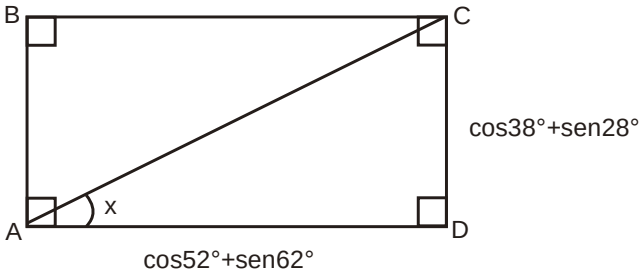
$$\tan x = \frac{\cos 38° + \text{sen}28°}{\cos 52° + \text{sen}62°}$$

$$\tan x = \frac{\text{sen}52° + \text{sen}28°}{\cos 52° + \cos 28°}$$

$$\tan x = \frac{2\text{sen}40° \cos 12°}{2\cos 40° \cos 12°}$$

$$\tan x = \text{tg}40°$$

$$x = 40°.$$



Rpta.: C

2. Sean M y N los valores máximo y mínimo de la expresión $\csc 30°(\cos 2x - \cos 6x)(\text{sen}2x + \text{sen}6x)$ respectivamente, halle $|MN|$.

A) 11 B) 16 C) 9 D) 25

Solución:

$E = \csc 30°(\cos 2x - \cos 6x)(\text{sen}2x + \text{sen}6x)$

$E = 2(2\text{sen}4x\text{sen}2x)(2\text{sen}4x\cos 2x)$

$E = 2(2\text{sen}4x\text{sen}4x)(2\text{sen}2x\cos 2x)$

$E = 4\text{sen}^3 4x$

Se sabe que para cualquier valor real de x es cierto que

$$-1 \leq \text{sen}4x \leq 1$$

$$-1 \leq \text{sen}^3 4x \leq 1$$

$$-4 \leq E \leq 4$$

Luego $M = 4,\ N = -4$

Por lo tanto $|MN| = 16$. **Rpta.: B**

3. Una fábrica para vender leche evaporada necesita latas de aluminio con tapa que tenga la forma de un cilindro circular recto. Si el radio de la base mide $\begin{pmatrix} \text{sen}70° - \text{sen}10° + \cos 20° \\ 25\sqrt{3}\cos 10° \end{pmatrix}$m y la altura de la lata de aluminio es 10cm, halle su volumen.

A) $120\pi\,cm^3$ B) $130\pi\,cm^3$ C) $146\pi\,cm^3$ D) $160\pi\,cm^3$

Solución:

Sea r el radio

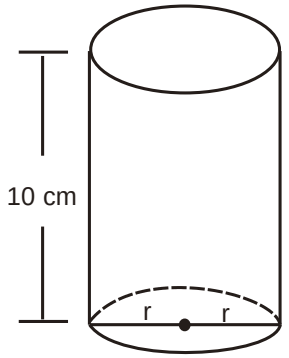
$$r = \frac{\text{sen}70° - \text{sen}10° + \cos 20°}{25\sqrt{3}\cos 10°}\text{m}$$

$$r = \frac{2\cos 40°\text{sen}30° + \cos 20°}{25\sqrt{3}\cos 10°}\text{m}$$

$$r = \frac{\cos 40° + \cos 20°}{25\sqrt{3}\cos 10°}\text{m}$$

$$r = \frac{2\cos 30°\cos 10°}{25\sqrt{3}\cos 10°}\text{m}$$

$$r = \frac{1}{25}\text{ m} \quad \Rightarrow \quad r = 4\text{cm}$$



v: volumen

Entonces $V = (\text{A base})h = (\pi r^2)h$

$$V = \pi(4)^2(10)$$

Rpta.: D

$$V = 160\pi\,\text{cm}^3.$$

4. Un topógrafo utilizando un teodolito anotó que las medidas de los ángulos interiores de un terreno de forma triangular ABC cumplen que $\text{sen}2B + \text{sen}2C = \text{sen}2A$. ¿Cuánto mide el mayor ángulo interior de dicho terreno?

A) 90° B) 75° C) 80° D) 85°

Solución:

$$\text{sen}2B + \text{sen}2C = \text{sen}2A$$

$\rightarrow \quad 2\text{sen}(B+C)\cos(B-C) = 2\text{sen}A\cos A$

$\rightarrow \quad \text{sen}A\cos(B-C) = \text{sen}A\cos A$

$\rightarrow \text{sen}A\left(\cos(B-C) - \cos A\right) = 0$

$\rightarrow \quad \text{sen}A = 0 \quad \vee \quad \cos A = \cos(B-C)$

$A = B - C$

Como $\quad A+B+C = 180°$

$\rightarrow \quad B - C + B + C = 180°$

$\therefore \quad B = 90°$

Rpta: A

5. Si la edad de Luis el próximo año será equivalente al máximo valor que tome la expresión R. Si $R = \dfrac{\text{sen}(\pi - 7x) + \cos\left(3\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right) + \text{sen}(1080° + x)}{\cos x\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)}$, ¿qué edad tiene Luis el presente año?

A) 10 años B) 8 años C) 4 años D) 3 años

<u>Solución</u>:

$$R = \frac{\text{sen}(\pi - 7x) + \cos\left(3\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 3x\right) + \text{sen}(1080° + x)}{\cos x\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)}$$

$$R = \frac{\overline{\text{sen}7x} + \overline{\overline{\text{sen}5x}} + \overline{\overline{\text{sen}3x}} + \overline{\text{sen}x}}{\cos x(\cos 2x)}$$

$$R = \frac{2\text{sen}4x\cos 3x + 2\text{sen}4x\cos x}{\cos x.\cos 2x}$$

$$R = \frac{2\text{sen}4x(\cos 3x + \cos x)}{\cos x.\cos 2x}$$

$$R = \frac{2\text{sen}4x(2\cos 2x.\cos x)}{\cos 2x.\cos x}$$

$$R = 4\underbrace{\text{sen}4x}_{1}$$

$R_{\text{máximo}} = 4(1) = 4.$

La edad de Luis el próximo año es 4 años.
Entonces en el presente tiene 3 años

Rpta.: D

6. Si $\text{sen}x+\text{sen}3x+\text{sen}5x=a\text{sen}^5x-b\text{sen}^3x+c\text{sen}x$. Calcule $\sqrt{a}-\sqrt{b+1}-\sqrt{c}$.

A) – 3 B) – 5 C) – 4 D) – 1

<u>Solución</u>:

$$\text{sen}x+\text{sen}3x+\text{sen}5x=a\text{sen}^5x-b\text{sen}^3x+c\text{sen}x$$

$$2\text{sen}3x\cos 2x+\text{sen}3x=M$$

$$\text{sen}3x\left(2\cos 2x+1\right)=M$$

$$\frac{\text{sen}^2 3x}{\text{sen}x}=M$$

$$\frac{\left(3\text{sen}x-4\text{sen}^3x\right)^2}{\text{sen}x}=M$$

$$\frac{9\text{sen}^2x-24\text{sen}^4x+16\text{sen}^6x}{\text{sen}x}=M$$

$$16\text{sen}^5x-24\text{sen}^3x+9\text{sen}x=a\text{sen}^5x-b\text{sen}^3x+c\text{sen}x$$

Entonces $a=16$ $b=24$ $c=9$

Luego $\sqrt{a}-\sqrt{b+1}-\sqrt{c}=-4$.

Rpta: C

7. De la siguiente igualdad $4\cos\frac{x}{2}\text{sen}\frac{5x}{2}\cos x=\text{sen}Ax+\text{sen}Bx+\text{sen}Cx+\text{sen}Dx$.
Si A, B, C y D son números naturales y A < B < C < D, calcule $\left(A+B\right)\left(C+D\right)$.

A) 19 B) 21 C) 23 D) 20

Solución:

$$4\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{5x}{2}\cos x = \operatorname{sen}Ax + \operatorname{sen}Bx + \operatorname{sen}Cx + \operatorname{sen}Dx$$

$$2\left[2\operatorname{sen}\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\right]\cos x = M$$

$$2\cos x\left[\operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}2x\right] = M$$

$$2\operatorname{sen}3x\cos x + 2\operatorname{sen}2x\cos x = M$$

$$\operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}x = M$$

$$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}3x + \operatorname{sen}4x = \operatorname{sen}Ax + \operatorname{sen}Bx + \operatorname{sen}Cx + \operatorname{Sen}Dx$$

Entonces: $A = 1 \quad B = 2 \quad C = 3 \quad D = 4$

Luego $(A+B)(C+D) = 21$.

Rpta.: B

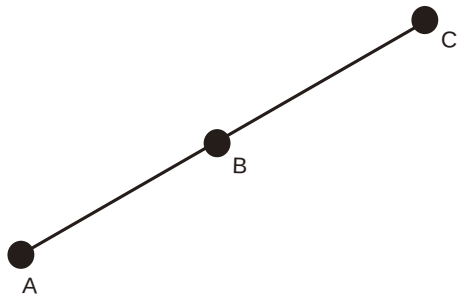
8. Un móvil recorrió los caminos rectilíneos desde el punto A hasta el punto B $(28\cos 80°)$km y luego de B a C $\left(7\sqrt{3}\cot 80°\right)$km como indica la figura. Si en el punto C se detuvo debido a una falla mecánica. Halle la distancia que recorrió dicho móvil.

A) 4 km

B) 3 km

C) 7 km

D) 2 km



Solución:

Sea d la distancia recorrida

$$d = 28\cos 80° + 7\sqrt{3}\cot 80°$$

$$d = 7\left(4\text{sen}10° + \sqrt{3}\tan 10°\right)$$

$$d = 7\left(4\text{sen}10° + \frac{\sqrt{3}\,\text{sen}10°}{\cos 10°}\right)$$

$$d = 7\left(\frac{2\text{sen}20° + 2\text{sen}60°\text{sen}10°}{\cos 10°}\right)$$

$$d = 7\left(\frac{2\text{sen}20° + \cos 50° - \cos 70°}{\cos 10°}\right)$$

$$d = 7\left(\frac{\cos 70° + \cos 50°}{\cos 10°}\right)$$

$$d = 7\left(\frac{2\cos 60°\cos 10°}{\cos 10°}\right)$$

$$d = 7\,\text{km}.$$

Rpta.: C

9. Si $\sec A + \sec B = \csc 30°$ y $A + B = 60°$, calcule el valor de la expresión $-\sqrt{3}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sec 60°\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)$.

A) 0,2 B) 0,5 C) 1 D) 1,5

<u>Solución</u>:

$\sec A + \sec B = \csc 30°$ $\quad (A + B = 60°)$

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} = 2$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos A\cos B$$

$$2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$2\cos 30° \,.\, \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = \cos 60° + \cos(A-B)$$

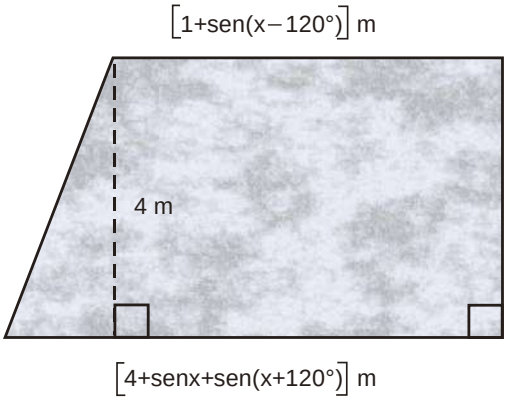
$$\sqrt{3}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{1}{2}+2\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-1$$

$$\frac{1}{2}=2\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\therefore\quad -\sqrt{3}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sec 60°\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)=0{,}5\ .$$

Rpta.: B

10. Un carpintero visita una tienda especializada en materiales para casas prefabricadas de madera y compra una plancha de caoba de forma trapecial tal y como se indica en la figura. Si el metro cuadrado de aquella plancha cuesta 20 soles además $x\in\left\langle\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\rangle$ ¿cuánto gastó el carpintero?



A) 210 soles

B) 245 soles

C) 290 soles

D) 200 soles

Solución:

Sea *S* el área de la plancha de caoba.

$$S=\left[\frac{4+\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(x+120°)+1+\operatorname{sen}(x-120°)}{2}\right]4$$

$$S=\left(5+\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\left[\frac{x+120°+x-120°}{2}\right]\cos\left[\frac{x+120°-(x-120°)}{2}\right]\right)2$$

$$S=(5+\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos 120°)\,2$$

$$S=\left[5+\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\left(-\frac{1}{2}\right)\right]2\ \rightarrow\ S=10m^2$$

Luego, el gasto del carpintero es

$$10m^2\ .\left(\frac{S/20}{1\,m^2}\right)=200\text{ soles}$$

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\tan\alpha = \frac{1}{3}$, calcule el valor de $\frac{3\text{sen}3\alpha + 2\text{sen}\alpha + \text{sen}5\alpha}{3\cos 3\alpha + 4\cos\alpha + \cos 5\alpha}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{6}$

Solución:

$\tan\alpha = \frac{1}{3} \quad \ldots (1)$

$$E = \frac{3\text{sen}3\alpha + 2\text{sen}\alpha + \text{sen}5\alpha}{3\cos 3\alpha + 4\cos\alpha + \cos 5\alpha}$$

$$E = \frac{3(\text{sen}3\alpha + \text{sen}\alpha) + (\text{sen}5\alpha - \text{sen}\alpha)}{3(\cos 3\alpha + \cos\alpha) + (\cos 5\alpha + \cos\alpha)}$$

$$E = \frac{3(2\text{sen}2\alpha\cos\alpha) + 2\cos 3\alpha\,\text{sen}2\alpha}{3(2\cos 2\alpha\cos\alpha) + 2\cos 3\alpha\cos 2\alpha}$$

$$E = \frac{2\text{sen}2\alpha(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\cos 2\alpha(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)}$$

$$E = \tan 2\alpha$$

$$E = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Reemplazando de (1)

$$E = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{3}{4}.$$

Rpta: C

2. Simplifique $\left|\dfrac{\text{sen}^2 120° - \cos^2 80° - \cos^2 40°}{\cos 120° \cos 80° \text{sen} 50°}\right|$

A) 3 B) 5 C) 2 D) 1

Solución:

$$E = \left|\frac{\text{sen}^2 120° - \cos^2 80° - \cos^2 40°}{\cos 120° \cos 80° \text{sen} 50°}\right|$$

$$E = \left|\frac{\text{sen}^2 60° - \text{sen}^2 10° - \text{sen}^2 50°}{\cos 120° \cos 80° \text{sen} 50°}\right|$$

$$E = \left|\frac{\text{sen} 70° \text{sen} 50° - \text{sen}^2 50°}{\cos 120° \cos 80° \text{sen} 50°}\right|$$

$$E = \left|\frac{\text{sen} 50° \left(\text{sen} 70° - \text{sen} 50°\right)}{\cos 120° \cos 80° \text{sen} 50°}\right|$$

$$E = \left|\frac{\text{sen} 50° \left(2 \cos 60° \text{sen} 10°\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right) \cos 80° \text{sen} 50°}\right|$$

$E = 2.$

Rpta.: C

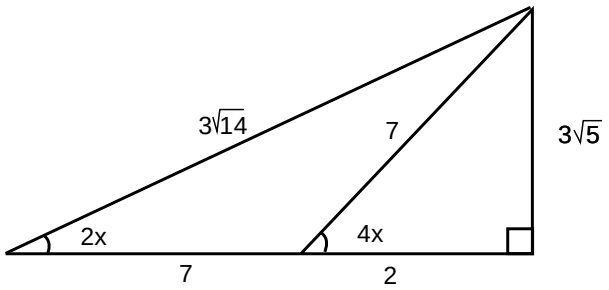
3. Si $2\tan 4x = 3\sqrt{5}$, donde 4x es la medida de un ángulo agudo, calcule el valor de la expresión $\sec^2 60° \cos x \cos 3x + 6 \tan 45° \text{sen} 3x \text{sen} x + \dfrac{2}{7}$.

A) $\dfrac{15\sqrt{14}}{14}$ B) $\dfrac{11\sqrt{6}}{6}$ C) $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$ D) $\dfrac{15\sqrt{11}}{11}$

Solución:

$0° < 4x < 90°$

$$\tan 4x = \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{CO}{CA}$$



Luego

$$P = 4\cos 3x \cos x + 6\text{sen}3x\text{sen}x + \frac{2}{7}$$

$$P = 2(\cos 4x + \cos 2x) + 3(\cos 2x - \cos 4x) + \frac{2}{7}$$

$$P = 5\cos 2x - \cos 4x + \frac{2}{7}$$

$$P = 5\left(\frac{9}{3\sqrt{14}}\right) - \frac{2}{7} + \frac{2}{7}$$

$$P = \frac{15}{\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{15\sqrt{14}}{14}.$$

Rpta.: A

4. El rotor de un molino en cada vuelta que da muele 100g de trigo, dicho rotor gira uniformemente a razón de una vuelta por t segundos donde $t = \frac{(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 9x)\sec 2x}{(\cot x + 2\,\text{tg}\,2x - \text{tg}\,x)(\text{sen}11x + \text{sen}5x)}$, además $0 < x < \frac{\pi}{12}$. Calcule el tiempo que se demorará en moler 50kg de trigo.

A) 125 s B) 200 s C) 250 s D) 300 s

Solución:

$$\Rightarrow\ t=\frac{2\cos 4x\left(\cos 5x+\cos x\right).\sec 2x}{\left(4\csc 4x\right)\left(2\,\text{sen}\,8x\,\cos 3x\right)}$$

$$t=\frac{\cos 4x\left(2\cos 3x\cos 2x\right).\sec 2x}{4\csc 4x.2\,\text{sen}\,4x\cos 4x\cos 3x}\Rightarrow\boxed{t=\frac{1}{4}}$$

$$1\text{ vuelta}<>\frac{1}{4}s<>\frac{1}{10}Kg\ \Rightarrow 50Kg\left(\frac{\frac{1}{4}s}{\frac{1}{10}Kg}\right)=125\,s$$

$\Rightarrow$ Se demorará $125\,s$

Rpta.: A

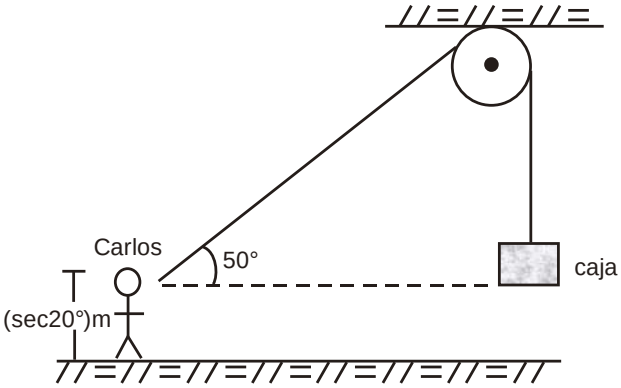
5. En la figura mostrada, se observa a Carlos que levanta una caja mediante una polea. Si la distancia de la polea con respecto al suelo mide (csc 20°) m, halle la distancia entre Carlos y la proyección ortogonal de la caja con respecto al suelo.

A) $\left(\sqrt{3}\sec 20°\right)m$

B) $\left(\sqrt{5}\sec 80°\right)m$

C) $\left(\sqrt{2}\sec 25°\right)m$

D) $\left(\sqrt{6}\sec 70°\right)m$



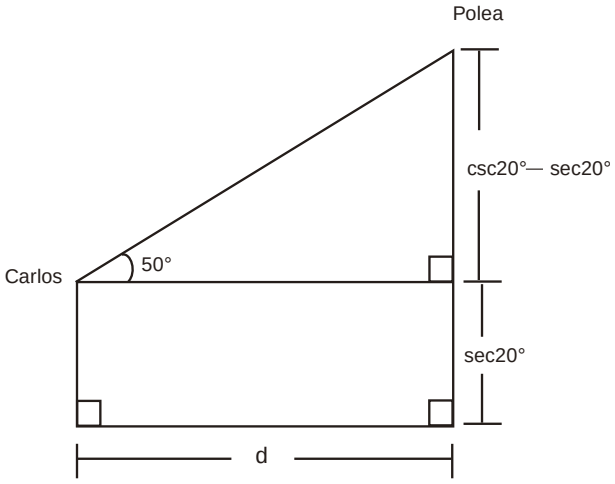
Solución:

Sea d la distancia

$$d=\left(\csc 20°-\sec 20°\right)\text{ctg}\,50°$$

$$d=\left(\frac{1}{\text{sen}\,20°}-\frac{1}{\cos 20°}\right)\text{ctg}\,50°$$

$$d=2\left(\frac{\text{sen}\,70°-\text{sen}\,20°}{2\,\text{sen}\,20°\cos 20°}\right)\frac{\cos 50°}{\text{sen}\,50°}$$



$$d = \frac{2(2\cos 45° \operatorname{sen} 25°)\cos 50°}{\operatorname{sen} 40° \operatorname{sen} 50°}$$

$$d = \frac{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\operatorname{sen} 25°}{2\operatorname{sen} 25° \cos 25°}$$

$$d = \left(\sqrt{2}\sec 25°\right)m$$

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $\dfrac{x+(2+\sqrt{3})\cdot\tan 15°}{x-(2+\sqrt{3})\cdot\cot 75°}=\sqrt{3}\cdot\tan\dfrac{\pi}{3}\text{rad}$, halle $\text{sen}5\alpha+\text{sen}3\alpha$, donde $\text{sen}\alpha=\dfrac{1}{x}$, ($\alpha$, agudo).

A) 1,5 B) 1,4 C) 1,3 D) 2,5

Solución:

$$\frac{x+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{x-(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\sqrt{3}\cdot\tan 60°$$

$$\frac{x+1}{x-1}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}=3\Rightarrow x=2$$

Luego, $\text{sen}\alpha=\dfrac{1}{2}$ de donde $\alpha=30°$

$$\begin{aligned}\text{sen}5\alpha+\text{sen}3\alpha&=2\text{sen}4\alpha\cdot\cos\alpha\\&=2\text{sen}120°\cdot\cos 30°\\&=2\text{sen}60°\cdot\cos 30°\\&=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{3}{2}=1{,}5\end{aligned}$$

Rpta.: A

2. Se descompone un ángulo x en otros dos, cuyos senos son proporcionales a los números 4 y 5, siendo b el menor de estos dos ángulos. Calcule el valor de $\sqrt{\tan\dfrac{x}{2}\cot\left(\dfrac{x}{2}-b\right)}$.

A) 2 B) 3 C) 1 D) 10

Solución:

Siendo $x=a+b$ y $a>b\Rightarrow a=x-b$

Por condición:

$$\frac{\text{sen}b}{\text{sen}a}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{\text{sen}b}{\text{sen}(x-b)}=\frac{4}{5}$$

Aplicando proporciones:

$$\frac{\text{sen}(x-b)+\text{sen}b}{\text{sen}(x-b)-\text{sen}b}=\frac{5+4}{5-4}=\frac{9}{1}$$

$$\frac{2\text{sen}\frac{x}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-b\right)}{2\cos\frac{x}{2}\text{sen}\left(\frac{x}{2}-b\right)}=9$$

$$\tan\frac{x}{2}\cot\left(\frac{x}{2}-b\right)=9$$

$$\sqrt{\tan\frac{x}{2}\cot\left(\frac{x}{2}-b\right)}=3$$

$$E=3$$

Rpta.: B

3. Simplifique la siguiente expresión $\dfrac{\cos 8x\tan 3x+\cos 2x\tan 3x}{\text{sen}^2 4x-\text{sen}^2 x}$.

A) 2cot5x B) cot5x C) 2tan5x D) tan3x

<u>Solución</u>:

Sea E la expresión que vamos a simplificar, esto es,

$$E=\frac{\cos 8x\tan 3x+\cos 2x\tan 3x}{\text{sen}^2 4x-\text{sen}^2 x}$$

$$E=\frac{\tan 3x(\cos 8x+\cos 2x)}{\text{sen}^2 4x-\text{sen}^2 x}$$

$$E=\frac{\tan 3x\cdot 2\cos 5x\cdot\cos 3x}{\text{sen}5x\cdot\text{sen}3x}$$

$$E=2\tan 3x\cdot\cot 5x\cdot\cot 3x$$

$$\therefore E=2\cot 5x$$

Rpta.: A

4. Determine el valor de verdad en el orden indicado de cada una de las siguientes proposiciones:

i) Se cumple que $\dfrac{\text{sen}A-\text{sen}B}{\cos B-\cos A}=\cot\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

ii) Se verifica $\cos^2 50°-\cos^2 10°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\text{sen}40°$

iii) Se verifica $\sqrt{3}+2\cos 50°=4\cos 40°\cos 10°$

A) VVV B) VFF C) FFV D) VFV

Solución:

i) $\dfrac{\text{sen}A-\text{sen}B}{\cos B-\cos A}=\cot\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

$=\left[\dfrac{2\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{-2\text{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}\right]$

$=\dfrac{\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}=\cot\left(\dfrac{A+B}{2}\right)$. Proposición falsa (F). $\left[\begin{array}{l}A=B=\dfrac{\pi}{2}\text{no se cumple}\\ \text{la igualdad}\end{array}\right]$

ii) $\cos^2 50°-\cos^2 10°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\text{sen}40°$

$=(2\cos 30°\cos 20°)(-2\text{sen}30°\text{sen}20°)$

$=\left(2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 20°\right)\left(-2\left(\dfrac{1}{2}\right)\text{sen}20°\right)$

$=\sqrt{3}\cdot\cos 20°\cdot(-\text{sen}20°)$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}40°$. Proposición falsa (F)

iii) $\sqrt{3}+2\cos 50°=4\cos 40°\cos 10°$

$=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2}{2}\cdot\cos 50°\right)$

$=2(\cos 30°+\cos 50°)$

$=2(2\cos 40°\cdot\cos 10°)$

$=4\cos 40°\cdot\cos 10°$. Proposición verdadera (V)

Rpta.: C

5. Juan debe caminar, en línea recta, del punto A al punto B. La distancia de A a B es 300 metros y C es un punto que está entre A y B. Si Juan se toma un descanso en C después de haber caminado $\dfrac{(10)\cdot 625}{39}\left[\text{sen}4\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right]$ metros, siendo α agudo y $\text{sen}\alpha=\dfrac{3}{5}$, ¿cuánto le falta por caminar a Juan para llegar a B?

A) 60 metros B) 62 metros C) 58 metros D) 54 metros

Solución:

Sea $E = \text{sen}4\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$

$$E = \text{sen}4\alpha + \text{sen}2\alpha$$
$$E = 2\text{sen}3\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$E = 2(3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha) \cdot \cos\alpha$$
$$E = 2(3 - 4\text{sen}^2\alpha) \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$E = 2\left[3 - 4\left(\frac{3}{5}\right)^2\right] \cdot \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$
$$E = \frac{(2) \cdot 39 \cdot 12}{625}$$

Hasta el punto C Juan caminó:

$\frac{(10) \cdot 625}{39} \cdot \frac{(2) \cdot 39 \cdot 12}{625} = 240$ metros, por lo tanto, le falta caminar 60 metros.

Rpta.: A

6. ¿Cuál es el máximo valor de la expresión trigonométrica $\cos(10° - x) - \cos(130° - x)$?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$

Solución:

Sea F la expresión trigonométrica cuyo máximo valor debemos encontrar, esto es,

$F = \cos(10° - x) - \cos(130° - x)$

Por comodidad, consideremos que A = 10°– x y B = 130°– x

Por consiguiente, $F = \cos A - \cos B$

$$F = -2\text{sen}\left(\frac{A + B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A - B}{2}\right)$$

Luego, $F = -2\text{sen}\left(\frac{10° - x + 130° - x}{2}\right)\text{sen}\left[\frac{10° - x - (130° - x)}{2}\right]$

$$F = -2\text{sen}(70° - x) \cdot \text{sen}(-60°)$$
$$F = 2\text{sen}(70° - x) \cdot \text{sen}60°$$
$$F = 2\text{sen}(70° - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$F = \sqrt{3}\,\text{sen}(70° - x)$$

Sabemos que para cualquier valor real de x es cierto que $-1 \leq \text{sen}(70° - x) \leq 1$, luego,

$$-\sqrt{3} \leq \sqrt{3}\,\text{sen}(70° - x) \leq \sqrt{3}$$
$$-\sqrt{3} \leq F \leq \sqrt{3}$$

Por lo tanto, el valor máximo de F es $\sqrt{3}$.

Rpta.: A

7. Un terreno de forma rectangular se vende a razón de 1000 soles el metro cuadrado. Si el largo del terreno mide $(20 \cdot \sqrt{3} \cdot \csc 50° \cdot E)$ metros y el ancho es un tercio del largo; ¿cuál es el precio del terreno si $E = \cos^2 5° + \text{sen}^2 55° - 1$?

A) 300 000 soles B) 280 000 soles C) 320 000 soles D) 260 000 soles

Solución:

$E = \text{sen}^2 55° - \text{sen}^2 5°$

$E = (\text{sen}55° + \text{sen}5°)(\text{sen}55° - \text{sen}5°)$

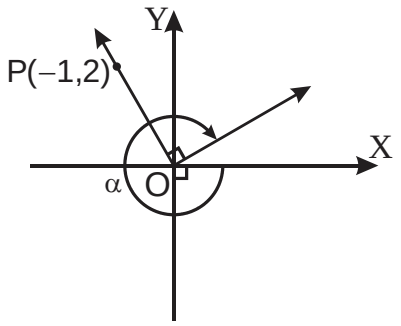
$E = (2\text{sen}30° \cos 25°)(2\cos 30° \text{sen}25°)$

$E = \text{sen}60° \cdot \text{sen}50° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{sen}50°$

Luego, el largo del terreno es $20 \cdot \sqrt{3} \cdot \csc 50° \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}50°$, esto es, 30 metros y por lo tanto el ancho es de 10 metros. Finalmente, el área del terreno es 300 metros cuadrados y el precio del terreno es 300 000 soles.

Rpta.: A

8. Con la información dada en la figura, halle el valor de la expresión $125\left[\text{sen}5\alpha + \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - \alpha\right)\right]$.



A) $60\sqrt{5}$
B) $66\sqrt{5}$
C) $66\sqrt{3}$
D) $70\sqrt{3}$

Solución:

El punto M de coordenadas (2,1) pertenece al lado terminal del ángulo α, luego:

α: M(2,1), d = $\sqrt{5}$ … (I)

Sea $E = \text{sen}5\alpha + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$

$E = \text{sen}5\alpha + \text{sen}\alpha$

$E = 2\text{sen}3\alpha \cdot \cos 2\alpha$

$E = 2(3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha)(2\cos^2\alpha - 1)$

$E = 2\text{sen}\alpha(3 - 4\text{sen}^2\alpha)(2\cos^2\alpha - 1)$

De (I): $\text{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore E = 2\frac{\sqrt{5}}{5}\left[3 - 4\left(\frac{5}{25}\right)\right]\left[2\left(\frac{20}{25}\right) - 1\right]$

$E = \frac{66\sqrt{5}}{125}$

Finalmente, el valor de la expresión dada es $125\left(\frac{66\sqrt{5}}{125}\right) = 66\sqrt{5}$

Rpta.: B

9. Si $\text{sen}\left(5\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{sen}\left(9\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \text{sen}\left(5\frac{\pi}{2} - 5x\right) + \text{sen}\left(9\frac{\pi}{2} - 7x\right) = A\text{sen}Bx\csc Cx$ es una identidad trigonométrica, halle 2(A + B + C).

A) 19 B) 15 C) 17 D) 20

<u>Solución</u>:

$= \text{sen}\left(5\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{sen}\left(9\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \text{sen}\left(5\frac{\pi}{2} - 5x\right) + \text{sen}\left(9\frac{\pi}{2} - 7x\right)$

$= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)$

$= \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$

$= (\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x)$

$= 2\cos 4x \cos 3x + 2\cos 4x \cdot \cos x$

$= 2\cos 4x(\cos 3x + \cos x)$

$= 2\cos 4x(2\cos 2x \cdot \cos x)$

$= 2\cos 4x\left(\frac{2\text{sen}x\cos x\cos 2x}{\text{sen}x}\right)$

$= \frac{2\cos 4x \cdot \text{sen}2x \cdot \cos 2x}{\text{sen}x}$

$= \frac{\cos 4x \cdot \text{sen}4x}{\text{sen}x} = \frac{1}{2}\text{sen}8x\csc x \approx A\text{sen}Bx\csc Cx$

luego, $A = \frac{1}{2}$, $B = 8$, $C = 1$

$2(A + B + C) = 19$

Rpta.: A

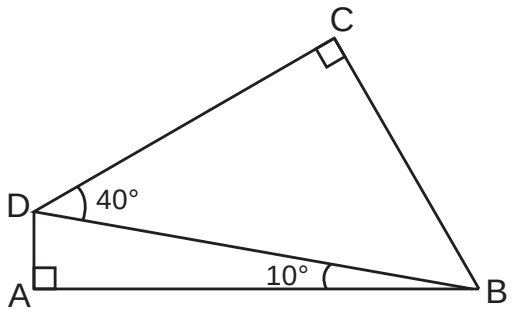
10. En la figura, se tiene un terreno de forma cuadrangular ABCD, dividido por una cerca recta BD que mide 80 m. Si cada metro cuadrado del terreno está valorizado en $(8\sqrt{3}\csc 50°)$ soles, determine el precio del terreno.

A) S/ 32 000

B) S/ 33 500

C) S/ 38 400

D) S/ 40 500



<u>Solución</u>:

$M = \frac{(80\text{sen}10°)(80\cos 10°)}{2}$

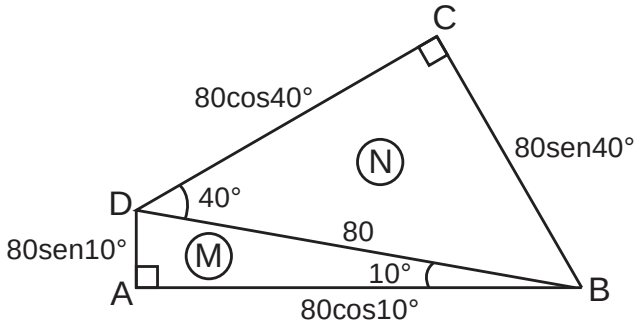
$M = 1600\text{sen}20°...(1)$

$N = \frac{(80\text{sen}40°)(80\cos 40°)}{2}$

$N = 1600\text{sen}80°...(2)$

$M + N = 1600(\text{sen}80° + \text{sen}20°)$

$M + N = (1600\sqrt{3}\text{sen}50°)\ m^2$



Luego, el precio del terreno es

$(1600\sqrt{3}\text{sen}50°)\ m^2 \cdot \frac{(8\sqrt{3}\csc 50°)\ \text{soles}}{1\,m^2} = 38\ 400$ soles.

Rpta.: C

<u>EJERCICIOS PROPUESTOS</u>

1. Resolver la ecuación x + a = 4, donde a = $\frac{8(\text{sen}^2 40° - \cos^2 80°)}{1 + \text{sen}50°}$.

A) $2\sec^2 20°$ B) $\sec^2 20°$ C) $2\csc^2 20°$ D) $3\sec^2 40°$

Solución:

$$a=\frac{4(2\text{sen}^2 40°-2\cos^2 80°)}{\text{sen}90°+\text{sen}50°}$$

$$a=\frac{4[1-\cos 80°-(1+\cos 160°)]}{2\text{sen}70°\cdot\cos 20°}$$

$$a=\frac{4(-\cos 80°-\cos 160°)}{2\cos^2 20°}=\frac{-4(\cos 80°+\cos 160°)}{2\cos^2 20°}$$

$$a=\frac{-4(\cos 80°-\cos 20°)}{2\cos^2 20°}=\frac{-4(-2\text{sen}50°\text{sen}30°)}{2\cos^2 20°}$$

$$a=\frac{2\text{sen}50°}{\cos^2 20°}=\frac{2\cos 40°}{\cos^2 20°}=\frac{2(2\cos^2 20°-1)}{\cos^2 20°}$$

$$a=4-2\sec^2 20°$$

$$\therefore x+\cancel{4}-2\sec^2 20°=\cancel{4}\Rightarrow$$

$$x=2\sec^2 20°$$

Rpta.: A

2. Juan compra un terreno que tiene la forma de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden (sen40°) u y (2sen70° – cos40°) u. ¿Cuánto mide el lado mayor del terreno?

A) 2sen40° u B) sen40° u C) 2cos40° u D) cos20° u

Solución:

Sea d el lado mayor, entonces

$$\begin{aligned}d^2&=\text{sen}^2 40°+(2\text{sen}70°-\cos 40°)^2\\&=\text{sen}^2 40°+4\text{sen}^2 70°-4\text{sen}70°\cos 40°+\cos^2 40°\\&=1+2-2\cos 140°-2\text{sen}110°-2\text{sen}30°\\&=2-2(\cos 140°+\cos 20°)\\&=2-4\cos 80°\cos 60°\\&=2-2\cos 80°=2(1-\cos 80°)\\&=2\cdot 2\text{sen}^2 40°\\&\Rightarrow d=2\text{sen}40°\text{u}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida del lado mayor es d = 2sen40° u.

Rpta.: A

3. Sea la identidad trigonométrica $A+B\cos(9x)=\dfrac{\cos(13x)-\cos(14x)}{\cos(4x)-\cos(5x)}$, si la edad de Juan está dada por la suma de A y B años, determine la edad de Juan.

A) 3 años B) 5 años C) 10 años D) 12 años

Solución:

Del enunciado:

$$A+B\cos(9x)=\frac{-2\text{sen}\left(\frac{27x}{2}\right)\text{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)}{-2\text{sen}\left(\frac{9x}{2}\right)\text{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

$$A+B\cos(9x)=\frac{\text{sen}\left(\frac{9x}{2}\right)[2\cos(9x)+1]}{\text{sen}\left(\frac{9x}{2}\right)}$$

$$A+B\cos(9x)=1+2\cos(9x)$$

$\therefore$ La edad de Juan es 3 años.

Rpta.: A

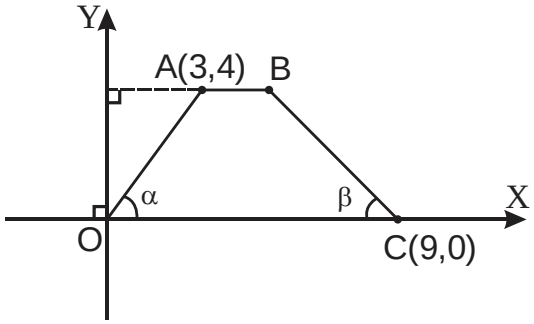
4. En la figura, AB = 2 u, halle el valor de la expresión $625\left(\frac{\text{sen}4\alpha+\text{sen}2\alpha}{\text{sen}2\beta}\right)$.

A) 220

B) 320

C) 264

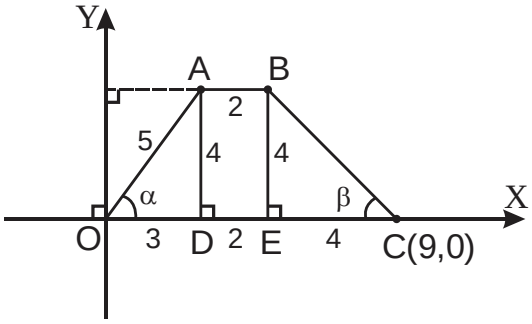
D) 300



Solución:

$\text{sen}\alpha=\frac{4}{5}$, $\text{tg}\beta=1 \Rightarrow \beta=45°$

Si $E=\frac{\text{sen}4\alpha+\text{sen}2\alpha}{\text{sen}2\beta}$, entonces,



$$E=\frac{2\text{sen}3\alpha\cdot\cos\alpha}{\text{sen}90°}$$

$$E=2\text{sen}3\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$E=2(3-4\text{sen}^2\alpha)\cos\alpha\cdot\text{sen}\alpha$$

$$E=2\left[3-4\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$E=\frac{264}{625}$$

$\therefore$ El valor de la expresión dada es

$$625\left(\frac{264}{625}\right)=264$$

Rpta.: C

5. Si A + B = 30°, ¿por cuánto se debe multiplicar a la expresión $\dfrac{\cos(A-B)}{1-\operatorname{sen}(A-B)}$ para obtener $\tan(A+30°)+\cot(B+30°)$?

A) 3 B) 2 C) 4 D) $\dfrac{3}{2}$

Solución:

$$\tan(A+30°)+\cot(B+30°)=\frac{\operatorname{sen}(A+30°)}{\cos(A+30°)}+\frac{\cos(B+30°)}{\operatorname{sen}(B+30°)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(A+30°)\operatorname{sen}(B+30°)+\cos(B+30°)\cos(A+30°)}{\cos(A+30°)\operatorname{sen}(B+30°)}$$

$$=\frac{-[-2\operatorname{sen}(A+30°)\operatorname{sen}(B+30°)]+2\cos(A+30°)\cos(B+30°)}{2\cos(A+30°)\operatorname{sen}(B+30°)}$$

$$=\frac{-[\cos(A+B+60°)-\cos(A-B)]+\cos(A+B+60°)+\cos(A-B)}{\operatorname{sen}(A+B+60°)-\operatorname{sen}(A-B)}$$

$$=\frac{-[\cos 90°-\cos(A-B)]+\cos 90°+\cos(A-B)}{\operatorname{sen}90°-\operatorname{sen}(A-B)}$$

$$=\frac{-[0-\cos(A-B)]+0+\cos(A-B)}{1-\operatorname{sen}(A-B)}$$

$$=\frac{\cos(A-B)+\cos(A-B)}{1-\operatorname{sen}(A-B)}=\frac{2\cos(A-B)}{1-\operatorname{sen}(A-B)}$$

$$\therefore \tan(A+30°)+\cot(B+30°)=\frac{2\cos(A-B)}{1-\operatorname{sen}(A-B)}$$

Se debe multiplicar por 2.

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. La edad de Pedro en el año 2012 fue $\left[10\sqrt{3}.\sec 20^{o}\left(\text{sen}40^{o}+\cos 10^{o}\right)\right]$ años. ¿Qué año nació Pedro?

A) 1984 B) 1983 C) 1982 D) 1981 E) 1980

Solución:

$$\left[10\sqrt{3}.\sec 20^{o}\left(\text{sen}40^{o}+\text{sen}80^{o}\right)\right]$$
$$=\left[10\sqrt{3}.\sec 20^{o}\left(2\,\text{sen}\,60^{o}\cos 20^{o}\right)\right]$$
$$=10\sqrt{3}.\sec 20^{o}.\cos 20^{o}.2\text{sen}60^{o}=10.\sqrt{3}.2.\frac{\sqrt{3}}{2}=30$$

Año de nacimiento de Pedro es 1982

Rpta.: C

2. Si $E=\left(\text{sen}2^{o}+\text{sen}6^{o}\right)\left(\sec^{2}10^{o}-\text{ctg}^{2}80^{o}\right)$ y $Q=\text{sen}10^{o}+\cos 76^{o}$, halle E+Q.

A) $2\cos 2^{o}.\cos 4^{o}.\cos 82^{o}$ B) $2\cos 6^{o}.\cos 8^{o}.\cos 10^{o}$
C) $4\cos 4^{o}.\cos 8^{o}.\cos 10^{o}$ D) $4\cos 2^{o}.\cos 4^{o}.\cos 82^{o}$
E) $4\cos 4^{o}.\cos 10^{o}.\cos 12^{o}$

Solución:

$$E=\left(\text{sen}2^{o}+\text{sen}6^{o}\right)(1)=2\text{sen}4^{o}\cos 2^{o}$$
$$Q=\text{sen}14^{o}+\text{sen}10^{o}=2\text{sen}12^{o}\cos 2^{o}$$
$$\therefore E+Q=2\text{sen}4^{o}\cos 2^{o}+2\text{sen}12^{o}\cos 2^{o}$$
$$E+Q=2\cos 2^{o}\left(\text{sen}12^{o}+\text{sen}4^{o}\right)$$
$$E+Q=2\cos 2^{o}\left(2\text{sen}8^{o}\cos 4^{o}\right)$$
$$=4\cos 2^{o}.\cos 4^{o}.\cos 82^{o}$$

Rpta.: D

3. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
i. $1+\text{sen}20^{o}=2\text{sen}^{2}55^{o}$
ii. $\sqrt{3}+\sqrt{2}=4.\text{sen}(52{,}5)^{o}.\cos(7{,}5)^{o}$
iii. $\cos 40^{o}+\cos 20^{o}=\cos 10^{o}$

A) VFF B) VVF C) FVF D) FVV E) FFF

Solución:

i. $1+\text{sen}20^o=\text{sen}90^o+\text{sen}20^o=2\text{sen}55^o\cos 35^o=2\text{sen}^2 55^o$ Verdadera (V)

ii. $\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\text{sen}60^o+\text{sen}45^o\right)=4\text{sen}\left(52{,}5\right)^o\cos\left(7{,}5\right)^o$ Verdadero (V)

iii. $\cos 40^o+\cos 20^o=2\cos 30^o\cos 10^o=\sqrt{3}\cos 10^o$

$\Rightarrow \sqrt{3}\cos 10^o=\cos 10^o \Rightarrow \sqrt{3}=1$ Falso (F)

Rpta.: B

4. Si $\text{sen}20^o=a$, halle $\text{tg}65^o.\text{ctg}85^o$, en términos de a.

A) $\dfrac{1+2a}{1-2a}$ B) $\dfrac{1-2a}{1+2a}$ C) $1-2a$ D) $1+2a$ E) $\dfrac{1-a}{1+a}$

Solución:

$$\text{tg}65^o.\text{ctg}85^o=\text{tg}65^o.\text{tg}5^o=\frac{\text{sen}65^o}{\cos 65^o}\bullet\frac{\text{sen}5^o}{\cos 5^o}$$

$$=\frac{-2\text{sen}65^o.\text{sen}5^o}{-2\cos 65^o.\cos 5^o}=\frac{\cos 70^o-\cos 60^o}{-\left(\cos 70^o+\cos 60^o\right)}=\frac{\text{sen}20^o-\left(1/2\right)}{-\left(\text{sen}20^o+\left(1/2\right)\right)}$$

$$=\frac{a-\frac{1}{2}}{-\left(a+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}-a}{\frac{1}{2}+a}=\frac{1-2a}{1+2a}$$

Rpta.: B

5. El sueldo mensual de Juan es $\left(1000x^2\right)$ soles donde x es la raíz de la ecuación $\text{sen}16^o+\cos 16^o=x.\text{sen}61^o$. ¿Cuánto gana Juan en un trimestre?

A) 4500 soles B) 2400 soles C) 1200 soles

D) 6000 soles E) 5500 soles

Solución:

$\text{sen}74^o + \text{sen}16^o = x.\text{sen}61^o$

$2\text{sen}45^o.\cos 29^o = x.\text{sen}61^o$

$2.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = x \Rightarrow x = \sqrt{2}$

En un mes, Juan gana $\left[1000\left(\sqrt{2}\right)^2\right]$ soles $= 2000$ soles.

En un trimestre, Juan gana 2000.3=6000 soles

Rpta.: D

6. Con la información dada en la figura y si $E = \text{sen}\dfrac{5\alpha}{2} + \text{sen}\dfrac{3\alpha}{2}$, halle $125E$.

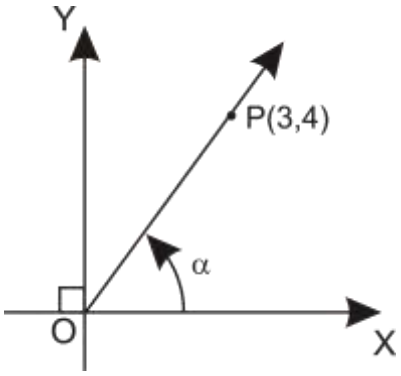
A) $96\sqrt{5}$

B) $96\sqrt{3}$

C) $96\sqrt{2}$

D) $90\sqrt{5}$

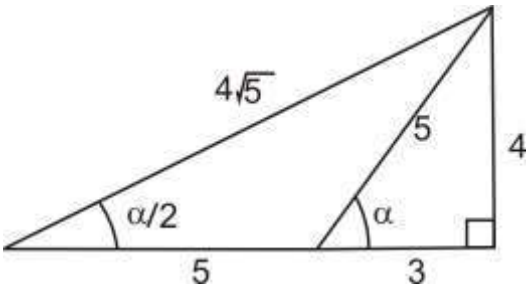
E) $86\sqrt{5}$



Solución:

$E = \text{sen}\dfrac{5\alpha}{2} + \text{sen}\dfrac{3\alpha}{2} = 2\text{sen}2\alpha.\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Usando un artificio geométrico para hallar $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.



$E = 2\text{sen}2\alpha.\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$E = 2\left(2.\dfrac{4}{5}.\dfrac{3}{5}\right).\dfrac{8}{4\sqrt{5}} = \dfrac{96\sqrt{5}}{125} \Rightarrow 125E = 96\sqrt{5}$

Rpta.: A

7. La hipotenusa de un triángulo rectángulo T mide 10 metros y uno de sus catetos mide $\left[10\left(\frac{\cos^2 12^o - \text{sen}^2 18^o}{\cos 6^o}\right)\right]$ metros. ¿Cuál es la razón entre las medidas de los catetos de T (la razón es mayor que 1)?

A) $2\sqrt{6}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

Solución:

$$\left[10\left(\frac{\cos^2 12^o - \text{sen}^2 18^o}{\cos 6^o}\right)\right] = 5\left[\left(\frac{2\cos^2 12^o - 2\text{sen}^2 18^o}{\cos 6^o}\right)\right]$$

$$\left[5\left(\frac{1+\cos 24^o - (1-\cos 36^o)}{\cos 6^o}\right)\right] = 5\left(\frac{\cos 36^o + \cos 24^o}{\cos 6^o}\right)$$

$$= 5\left(\frac{2\cos 30^o \cos 6^o}{\cos 6^o}\right) = 10.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Finalmente, la razón buscada es $\frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$

Rpta.: E

8. Del ángulo α se sabe que:
i. es positivo, menor que 360º y está en posición normal,
ii. su seno es igual a $(-0{,}5)$ y
iii. su coseno es positivo.
Halle el valor de $8.\text{sen}\frac{5\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}$.

A) $2+\sqrt{3}$ B) $-\left(2+\sqrt{3}\right)$ C) $-2\left(2+\sqrt{3}\right)$ D) $2\left(2+\sqrt{3}\right)$ E) $2+\sqrt{2}$

Solución:

Si E es el número buscado, entonces

$$E = 4\left(2\text{sen}\frac{5\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}\right) = 4\left(\text{sen}3\alpha + \text{sen}2\alpha\right)\cdots(\text{I})$$

Siendo $\text{sen}\alpha < 0 \wedge \cos\alpha > 0$, α pertenece al IVC $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$

$\therefore \alpha : P\left(\sqrt{3}, -1\right) d = 2$

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha = 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -1\cdots(\text{II})$$

$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots(\text{III})$$

Llevando (II) y (III) en (I):

$$E = 4\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Rpta.: C

9. En la figura, $BD = 3.AD$ y $BC = 2.AM$. Halle el valor de la expresión $\dfrac{\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)}{\text{sen}\alpha}$.

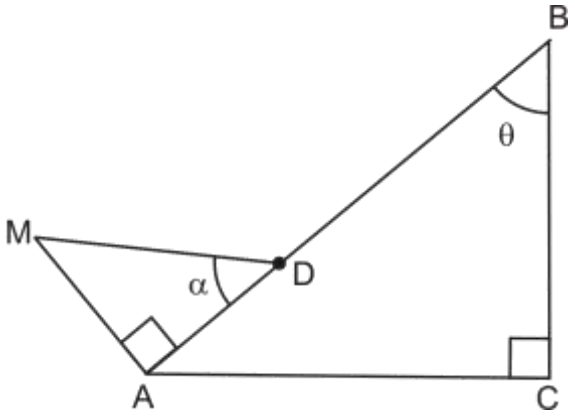
A) 1

B) 1,5

C) 1,8

D) 2

E) 2,5



Solución:

Sea E el número buscado, entonces,

$$E = \frac{\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta-\alpha)}{\text{sen}\alpha} = \frac{2\cos\theta.\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$E = 2\cos\theta\,\text{ctg}\alpha\cdots(\text{I})$$

Si $AD = x$ entonces $BD = 3x$

$$BC = 4x.\cos\theta \Rightarrow 4x.\cos\theta = 2.AM\cdots(\text{II})$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{AM}{x} \Rightarrow x.\text{tg}\alpha = AM\cdots(\text{III})$$

Llevando (III) en (II): $4x.\cos\theta = 2x.\text{tg}\alpha$

$$2\cos\theta = \text{tg}\alpha\cdots(\text{IV})$$

Llevando (IV) en (I): $E = \text{tg}\alpha.\text{ctg}\alpha = 1$

Rpta.: A

10. Si $E=\sqrt{2}\sec\alpha\left(\text{sen}5\alpha.\cos3\alpha-\cos6\alpha.\text{sen}2\alpha\right)$, halle el producto del valor máximo de E con su valor mínimo.

A) -2 B) 2 C) -3 D) 3 E) -4

Solución:

$$2E=\sqrt{2}\sec\alpha\left(2\text{sen}5\alpha.\cos3\alpha-2\cos6\alpha.\text{sen}2\alpha\right)$$
$$2E=\sqrt{2}\sec\alpha\left(\text{sen}8\alpha+\text{sen}2\alpha-\left(\text{sen}8\alpha-\text{sen}4\alpha\right)\right)$$
$$2E=\sqrt{2}\sec\alpha\left(\text{sen}4\alpha+\text{sen}2\alpha\right)$$
$$2E=\sqrt{2}\sec\alpha\left(2\text{sen}3\alpha.\cos\alpha\right)$$
$$2E=2\sqrt{2}\sec\alpha.\cos\alpha.\text{sen}3\alpha$$
$$\Rightarrow E=\sqrt{2}\,\text{sen}3\alpha$$

Sabemos que para cualquier valor real de α se tiene:

$$-1\le\text{sen}3\alpha\le1\Rightarrow-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\text{sen}3\alpha\le\sqrt{2}\Rightarrow-\sqrt{2}\le E\le\sqrt{2}$$
$$\left(\text{Valor máximo de E}\right)\left(\text{valor mínimo de E}\right)=\left(\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)=-2$$

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $E=\dfrac{\text{sen}3^o-\text{sen}6^o+\text{sen}9^o}{\cos3^o-\cos6^o+\cos9^o}$, halle E^2+1.

A) $2\sec^2 6^o$ B) $2\text{tg}^2 6^o$ C) $3\sec^2 6^o$ D) $\sec^2 6^o$ E) $\sec^2 9^o$

Solución:

Agrupando convenientemente

$$E=\frac{\left(\text{sen}9^o+\text{sen}3^o\right)-\text{sen}6^o}{\left(\cos9^o+\cos3^o\right)-\cos6^o}=\frac{2\text{sen}6^o\cos3^o-\text{sen}6^o}{2\cos6^o\cos3^o-\cos6^o}$$
$$E=\frac{\text{sen}6^o\left(2\cos3^o-1\right)}{\cos6^o\left(2\cos3^o-1\right)}=\text{tg}6^o\Rightarrow E^2=\text{tg}^2 6^o$$
$$\Rightarrow E^2+1=1+\text{tg}^2 6^o=\sec^2 6^o$$

Rpta.: D

2. si $E=5\left[\cos(2x+50^o)+\cos(2x-10^o)\right]$, ¿en cuánto excede el valor máximo de E a su valor mínimo?

A) $8\sqrt{3}$ B) $10\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{3}$ E) $10\sqrt{3}$

Solución:

$$E=5\left[2\cos(2x+20^o).\cos 30^o\right]$$
$$E=5\left[2.\cos(2x+20^o).\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=5\sqrt{3}.\cos(2x+20^o)$$

Sabemos que para cualquier valor real de x se cumple

$$-1\le\cos(2x+20^o)\le 1$$
$$-5\sqrt{3}\le 5\sqrt{3}\cos(2x+20^o)\le 5\sqrt{3}$$
$$-5\sqrt{3}\le E\le 5\sqrt{3}$$
$$\text{Máx}(E)-\text{mín}(E)=5\sqrt{3}-\left(-5\sqrt{3}\right)=10\sqrt{3}$$

Rpta.: E

3. El precio de un terreno T es $\left(600000.a^2\right)$ soles, donde $a=\dfrac{\text{sen}10^o+\text{sen}20^o+\text{sen}30^o+\text{sen}40^o+\text{sen}50^o}{\cos 10^o+\cos 20^o+\cos 30^o+\cos 40^o+\cos 50^o}$. ¿Cuál es el valor de T?

A) 210000 soles B) 220000 soles C) 200000 soles
D) 250000 soles E) 240000 soles

Solución:

Agrupando convenientemente:

$$a=\frac{\text{sen}10^o+\text{sen}20^o+\text{sen}30^o+\text{sen}40^o+\text{sen}50^o}{\cos 10^o+\cos 20^o+\cos 30^o+\cos 40^o+\cos 50^o}$$
$$a=\frac{(\text{sen}50^o+\text{sen}10^o)+(\text{sen}40^o+\text{sen}20^o)+\text{sen}30^o}{(\cos 50^o+\cos 10^o)+(\cos 40^o+\cos 20^o)+\cos 30^o}$$
$$a=\frac{(2\text{sen}30^o\cos 20^o)+(2\text{sen}30^o\cos 10^o)+\text{sen}30^o}{(2\cos 30^o\cos 20^o)+(2\cos 30^o\cos 10^o)+\cos 30^o}$$
$$a=\frac{\text{sen}30^o(2\cos 20^o+2\cos 10^o+1)}{\cos 30^o(2\cos 20^o+2\cos 10^o+1)}=\text{tg}30^o$$
$$a=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow a^2=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, precio de E es 200000 soles

Rpta.: C

4. Si $A+B=30^o$, halle el valor de la expresión $\dfrac{\cos(A+30^o)+\cos(B+30^o)}{\text{sen}(A+60^o)+\text{sen}(B+60^o)}$.

A) $\sqrt{3}+1$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}+1$ D) $\sqrt{3}+2$ E) $\sqrt{3}-1$

Solución:

Si E es el número buscado, entonces

$$E=\frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}+30^o\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}+60^o\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{\cos 45^o}{\text{sen}75^o}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}}$$

$$E=\frac{4\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-1$$

Rpta.: E

5. En la figura, $AC=10m$, $DC=20m$, $EB=8(\text{sen}3\alpha+\text{sen}\alpha)$ metros y $AB=(4\text{sen}2\alpha)$metros; α es un ángulo agudo. Halle el área de la región sombreada.

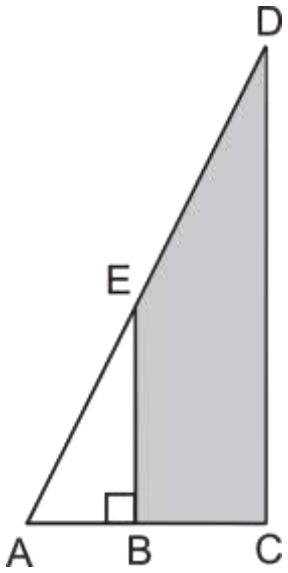
A) 80 m^2

B) 84 m^2

C) 78 m^2

D) 76 m^2

E) 88 m^2



Solución:

Por semejanza de triángulos rectángulos,

$$\frac{EB}{AB}=\frac{DC}{AC}\Rightarrow\frac{8(\text{sen}3\alpha+\text{sen}\alpha)}{4\text{sen}2\alpha}=\frac{20}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{8(2\text{sen}2\alpha\cos\alpha)}{4\text{sen}2\alpha}=2\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^o$$

$AB=4\text{sen}120^o=4\text{sen}60^o=4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$, luego $BC=2\left(5-\sqrt{3}\right)$

$$EB = 8\left(\text{sen}180^{o} + \text{sen}60^{o}\right) = 8.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

El cuadrilátero BCDE es un trapecio, luego el área de la región sombreada es

$$\left(\frac{4\sqrt{3}+20}{2}\right)2\left(5-\sqrt{3}\right) = 2\left(\sqrt{3}+5\right).2\left(5-\sqrt{3}\right) = 4\left(22\right) = 88$$

Rpta.: E

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Halle el valor de la expresión $\text{sen}\frac{\pi}{9}-\text{sen}\frac{5\pi}{9}+\text{sen}\frac{7\pi}{9}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) 2 E) $\frac{1}{3}$

Solución:

Sea E el número buscado, luego, $E=\text{sen}20^o-\text{sen}100^o+\text{sen}140^o$

$E=\left(\text{sen}140^o+\text{sen}20^o\right)-\text{sen}100^o$

$E=2\,\text{sen}80^o.\frac{1}{2}-\text{sen}80^o=\text{sen}80^o-\text{sen}80^o=0$

Rpta.: B

2. Si $\cos 10^o=n$, halle el valor de la expresión $\text{sen}2A+\text{sen}2B-\text{sen}2C$ en términos de n.

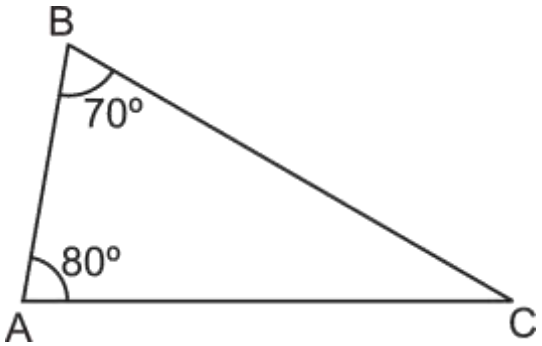
A) $2n-\sqrt{3}$

B) $n-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $3n-\sqrt{3}$

D) $n+\sqrt{3}$

E) $n+2\sqrt{3}$



Solución:

$\text{sen}2A+\text{sen}2B-\text{sen}2C=\text{sen}160^o+\text{sen}140^o-\text{sen}60^o$

$=\text{sen}20^o+\text{sen}40^o-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\text{sen}30^o\cos 10^o-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\left(\frac{1}{2}\right)\cos 10^o-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 10^o-\frac{\sqrt{3}}{2}=n-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rpta.: B

3. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $\sqrt{2}+2\text{sen}35^{o}=2\text{sen}40^{o}.\cos 5^{o}$

ii. $2\text{sen}(10^{o}+x)\cos(5^{o}-x)=\text{sen}15^{o}+\text{sen}(2x+5^{o})$

iii. $\text{sen}9^{o}.\cos 39^{o}-\cos 51^{o}.\cos 9^{o}=\frac{1}{2}$

A) VVV B) FFF C) VVF D) FVV E) FVF

Solución:

i.

$$\sqrt{2}+2\text{sen}35^{o}=\frac{2}{2}\left(\sqrt{2}+2\text{sen}35^{o}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{sen}35^{o}\right)$$

$$=2(\text{sen}45^{o}+\text{sen}35^{o})=2(2\text{sen}40^{o}\cos 5^{o})=4\text{sen}40^{o}\cos 5^{o}\text{(F)}$$

ii.

$$2\text{sen}(10^{o}+x)\cos(5^{o}-x)=\text{sen}15^{o}+\text{sen}(2x+5^{o})\text{(V)}$$

iii.

$$E=\text{sen}9^{o}.\cos 39^{o}-\cos 51^{o}.\cos 9^{o}$$

$$2E=2\text{sen}9^{o}.\cos 39^{o}-2\cos 51^{o}.\cos 9^{o}$$

$$2E=\text{sen}48^{o}-\text{sen}30^{o}-\cos 60^{o}-\cos 42^{o}$$

$$2E=\text{sen}48^{o}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\cos 42^{o}=-1\Rightarrow E=-\frac{1}{2}\text{(F)}$$

Rpta.: E

4. Si $A=\text{sen}^{2}x+\text{sen}^{2}(120^{o}+x)+\text{sen}^{2}(120^{o}-x)$, halle $2A+1$.

A) 4 B) 6 C) 5 D) 2 E) 3

Solución:

$$2A=2\text{sen}^{2}x+2\text{sen}^{2}(120^{o}+x)+2\text{sen}^{2}(120^{o}-x)$$

$$2A=1-\cos 2x+1-\cos(240^{o}+2x)+1-\cos(240^{o}-2x)$$

$$2A=3-\cos 2x-\cos(240^{o}+2x)-\cos(240^{o}-2x)$$

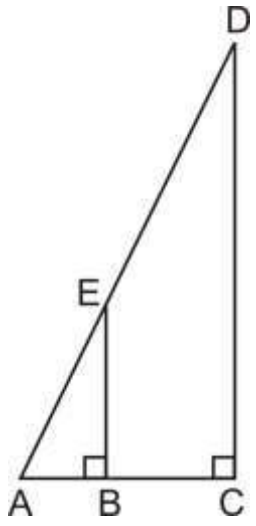
$$2A=3-\cos 2x-2\cos 240^{o}\cos 2x$$

$$2A=3-\cos 2x-2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x$$

$$2A=3-\cos 2x+\cos 2x=3\Rightarrow A=\frac{3}{2}\Rightarrow 2A+1=4$$

Rpta.: A

5. En la figura, $DC = 10$ m, $AC = 5$ m, $EB = \frac{8}{3}(\text{sen}3\alpha + \text{sen}\alpha)$m y $AB = \frac{4}{\sqrt{3}}\text{sen}2\alpha$ m. Halle BC siendo α un ángulo agudo.



A) 2,5 m

B) 2,6 m

C) 3m

D) 3,2m

E) 3,5m

Solución:

Usando semejanza de triángulos rectángulos:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{8}{3}(\text{sen}3\alpha + \text{sen}\alpha)}{\frac{4}{\sqrt{3}}\text{sen}2\alpha} = \frac{10}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o$$

$$\therefore BC = 5 - AB = 5 - 2 = 3$$

Rpta.: C

6. Si $\text{sen}20^o + \cos 20^o + (1 + \text{tg}20^o) = a.\sec 20^o.\cos 25^o.\cos^2 10^o$, halle el valor de a.

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

Solución:

$$\text{sen}20^o + \cos 20^o + \left(1 + \frac{\text{sen}20^o}{\cos 20^o}\right) = \text{sen}20^o + \cos 20^o + \left(\frac{\cos 20^o + \text{sen}20^o}{\cos 20^o}\right)$$

$$= (\text{sen}20^o + \cos 20^o)\left(1 + \frac{1}{\cos 20^o}\right) = (\text{sen}20^o + \cos 20^o)\left(\frac{\cos 20^o + 1}{\cos 20^o}\right)$$

$$= \sec 20^o(\text{sen}70^o + \text{sen}20^o)(2\cos^2 10^o) = \sec 20^o(2\text{sen}45^o\cos 25^o)(2\cos^2 10^o)$$

$$= \sec 20^o\left(2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos 25^o\right)(2\cos^2 10^o) = 2\sqrt{2}.\sec 20^o\cos 25^o(\cos^2 10^o)$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2}$$

Rpta.: A

7. Halle el valor de un terreno limitado por un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $12\left(\dfrac{\text{sen}10^o-\text{sen}20^o+\text{sen}30^o}{\cos 10^o-\cos 20^o+\cos 30^o}\right)$ metros y $(10\text{ctg}20^o)$ metros, si se sabe que el precio de un metro cuadrado es 1000 soles.

A) 58 000 soles B) 62 000 soles C) 60 000 soles
D) 72 000 soles E) 70 000 soles

Solución:

$$12\left(\frac{\text{sen}10^o-\text{sen}20^o+\text{sen}30^o}{\cos 10^o-\cos 20^o+\cos 30^o}\right)=12\left(\frac{2\text{sen}20^o\cos 10^o-\text{sen}20^o}{2\cos 20^o\cos 10^o-\cos 20^o}\right)$$

$$=12\left(\frac{\text{sen}20^o(2\cos 10^o-1)}{\cos 20^o(2\cos 10^o-1)}\right)=12\text{tg}20^o$$

$$\text{Área}=\frac{1}{2}.12\text{tg}20^o.10.\text{ctg}20^o\ \text{m}^2$$

$$\text{Área}=60\ \text{m}^2$$

Valor del terreno es 60 000 soles

Rpta.: C

8. El ángulo α está en posición normal siendo su seno igual a $-\dfrac{4}{5}$ y su tangente es positiva. Halle el valor de $50\text{sen}\left(\dfrac{3\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

A) –6 B) 6 C) 8 D) –5 E) –8

Solución:

$\alpha\in\text{IIIC},\ \text{sen}\alpha=-\dfrac{4}{5}$

$\alpha:\ P(-3,-4),\ d=5$

Sea E el número buscado, entonces,

$$E=50\text{sen}\frac{3\alpha}{2}\text{sen}\frac{\alpha}{2}\Rightarrow E=-25\left(-2\text{sen}\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$E=-25(\cos 2\alpha-\cos\alpha)=-25\left(2\cos^2\alpha-1-\cos\alpha\right)$$

$$E=-25\left(2\left(\frac{3}{5}\right)^2-1-\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=-25\left(\frac{18}{25}-1+\frac{3}{5}\right)=-8$$

Rpta.: E

9. Si $\text{sen}4\alpha - \sqrt{3}\text{sen}\alpha = 0$, evaluar la expresión $\cos\alpha - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right)$.

A) 1 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Solución:

Sea E el número buscado, esto es,

$E = \cos\alpha - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right)$

$E = \cos\alpha + \cos 3\alpha = 2\cos 2\alpha.\cos\alpha \cdots (\text{I})$

Del dato, $\text{sen}4\alpha = \sqrt{3}\text{sen}\alpha$

$2\text{sen}2\alpha\cos 2\alpha = \sqrt{3}\text{sen}\alpha$

$4\text{sen}\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sqrt{3}\text{sen}\alpha$

$2(2\cos 2\alpha\cos\alpha) = \sqrt{3}$

$2\cos 2\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdots (\text{II})$

Llevando (II) en (I): $E = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Rpta.: C

10. Si $32\left(\text{sen}^3\alpha - \text{sen}^3\alpha\cos^2\alpha\right) = a.\text{sen}\alpha + b.\text{sen}3\alpha + c.\text{sen}5\alpha$, (a, b y c son constantes), halle $a + b + c$.

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 8

Solución:

$32\text{sen}^3\alpha\left(1 - \cos^2\alpha\right) = 4\left(4\text{sen}^3\alpha\right)\left(2\text{sen}^2\alpha\right) = 4\left(3\text{sen}\alpha - \text{sen}3\alpha\right)\left(1 - \cos 2\alpha\right)$

$= 12\text{sen}\alpha - 12\text{sen}\alpha\cos 2\alpha - 4\text{sen}3\alpha + 4\text{sen}3\alpha\cos 2\alpha$

$= 12\text{sen}\alpha - 6\left(2\text{sen}\alpha\cos 2\alpha\right) - 4\text{sen}3\alpha + 2\left(2\text{sen}3\alpha\cos 2\alpha\right)$

$= 12\text{sen}\alpha - 6\left(\text{sen}3\alpha - \text{sen}\alpha\right) - 4\text{sen}3\alpha + 2\left(\text{sen}5\alpha + \text{sen}\alpha\right)$

$= 20\text{sen}\alpha - 10\text{sen}3\alpha + 2\text{sen}5\alpha$

$\therefore a = 20,\ b = -10,\ c = 2 \Rightarrow a + b + c = 12$

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\text{sen}20^o+\text{sen}40^o+\text{sen}60^o+\text{sen}80^o=A$, calcule $A.\text{tg}10^o$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{6}$

Solución:

$$\left(\text{sen}20^o+\text{sen}80^o\right)+\left(\text{sen}40^o+\text{sen}60^o\right)=A$$
$$\left(2\text{sen}50^o\cos 30^o\right)+\left(2\text{sen}50^o\cos 10^o\right)=A$$
$$2\text{sen}50^o\left(\cos 30^o+\cos 10^o\right)=A$$
$$2\text{sen}50^o\left(2\cos 20^o\cos 10^o\right)=A\Rightarrow 2\text{sen}50^o\cos 20^o\left(\frac{2\text{sen}10^o\cos 10^o}{\cos 10^o}\right)=A.\text{tg}10^o$$
$$\frac{2\text{sen}50^o\cos 20^o\,\text{sen}\,20^o}{\cos 10^o}=A.\text{tg}10^o$$
$$\frac{2\text{sen}50^o\,\text{sen}\,40^o}{2\cos 10^o}=A.\text{tg}10^o\Rightarrow\frac{2\text{sen}50^o\cos 50^o}{2\cos 10^o}=A.\text{tg}10^o$$
$$\Rightarrow\frac{\text{sen}100^o}{2\cos 10^o}=A.\text{tg}10^o\Rightarrow\frac{\text{sen}80^o}{2\cos 10^o}=A.\text{tg}10^o\Rightarrow A.\text{tg}10^o=\frac{1}{2}$$

Rpta.: C

2. Dos automóviles con velocidades constantes de $30\text{sen}7x$ m/s y $40\text{sen}5x$ m/s recorren la misma distancia en 4 minutos y 7 minutos, respectivamente. Calcule $25\text{tg}^2x-4\text{tg}^2 6x$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) 0 D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{7}{3}$

Solución:

$$120.\text{sen}7x=280\text{sen}5x\Rightarrow\frac{\text{sen}7x}{\text{sen}5x}=\frac{7}{3}$$
$$\Rightarrow\frac{\text{sen}7x+\text{sen}5x}{\text{sen}7x-\text{sen}5x}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{2\text{sen}6x\cos x}{2\cos 6x\text{sen}x}=\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow 2\text{tg}6x=5\text{tg}x\Rightarrow 4\text{tg}^2 6x=25\text{tg}^2x\Rightarrow 25\text{tg}^2x-4\text{tg}^2 6x=0$$

Rpta.: C

3. En un triángulo rectángulo T, su hipotenusa mide *a* metros y uno de sus ángulos agudos mide α. Halle el perímetro de T en términos de a y α.

A) $\left[\left(2\sqrt{2}a\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\right]m$

B) $\left[\sqrt{2}a.\text{sen}\alpha\right]m$

C) $\left[\left(3\sqrt{2}a\right)\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right]m$

D) $\left[2a.\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\right]m$

E) $\left[2a.\text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\right]m$

Solución:

Perímetro de $T = p = a + a\cos\alpha + a\text{sen}\alpha$

$$p = a(1+\cos\alpha+\text{sen}\alpha) = a\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+(\text{sen}\alpha+\cos\alpha)\right) = a\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)$$

$$= a\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right) = a\sqrt{2}\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}+\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)$$

$$= \left[2a\sqrt{2}.\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\right]m$$

Rpta.: A

4. La edad de una persona está dada por la expresión $E = (10 - 8a.b)$ años donde

$\text{sen}^3\theta + \cos^3\theta = a.\text{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) + b.\text{sen}\left(3\theta-\frac{\pi}{4}\right)$. ¿Cuál es la edad de la persona?

A) 10 años B) 12 años C) 13 años D) 14 años E) 15 años

Solución:

Sabemos que: $4\text{sen}^3\theta = 3\text{sen}\theta - \text{sen}3\theta$ y $4\cos^3\theta = 3\cos\theta + \cos 3\theta$, entonces en el dato:

$$\frac{1}{4}(3\text{sen}\theta+3\cos\theta)+\frac{1}{4}(\cos 3\theta-\text{sen}3\theta) = a\text{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+b.\text{sen}\left(3\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{3}{4}\left(\sqrt{2}\text{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)+\frac{1}{4}\left[\sqrt{2}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-3\theta\right)\right] = a\text{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+b.\text{sen}\left(3\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore a = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, luego,

$E = 10 - 8a.b = 10 - 8\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 10 + 3$; edad=13 años

Rpta.: C

5. Panchito sube una pendiente tal como se muestra en la figura dejando un banderín en los puntos B y C de la cuesta. Si Panchito llega a la cima luego de dos horas, halle la razón entre la altura escalada y la distancia horizontal que se ha desplazado.

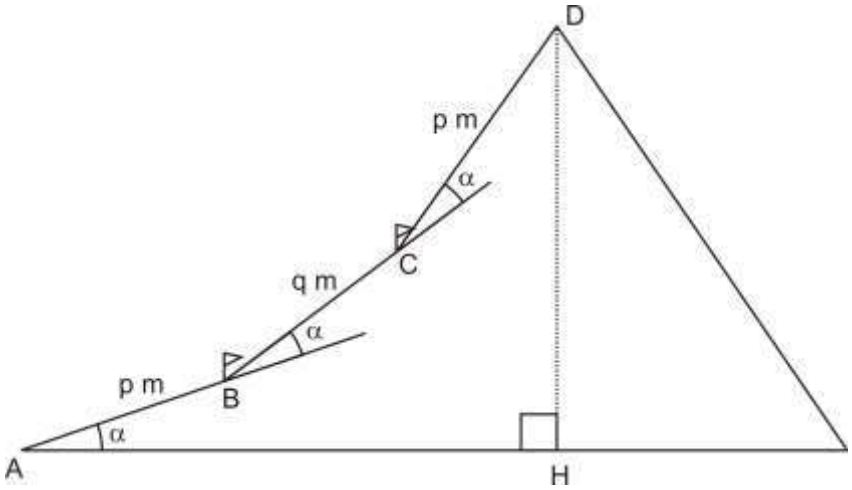
A) tg α

B) tg2α

C) ctg3α

D) tg3α

E) ctg2α



Solución:

Nos piden calcular

$$\frac{DH}{AH}=\frac{p\,sen\alpha+q\,sen2\alpha+p\,sen3\alpha}{p\cos\alpha+q\cos2\alpha+p\cos3\alpha}$$

$$\frac{DH}{AH}=\frac{p\left(sen3\alpha+sen\alpha\right)+q\,sen2\alpha}{p\left(\cos3\alpha+\cos\alpha\right)+q\cos2\alpha}$$

$$\frac{DH}{AH}=\frac{p\left(2sen2\alpha\cos\alpha\right)+q\,sen2\alpha}{p\left(2\cos2\alpha\cos\alpha\right)+q\cos2\alpha}$$

$$\frac{DH}{AH}=\frac{p\left(2sen2\alpha\cos\alpha\right)+q\,sen2\alpha}{p\left(2\cos2\alpha\cos\alpha\right)+q\cos2\alpha}$$

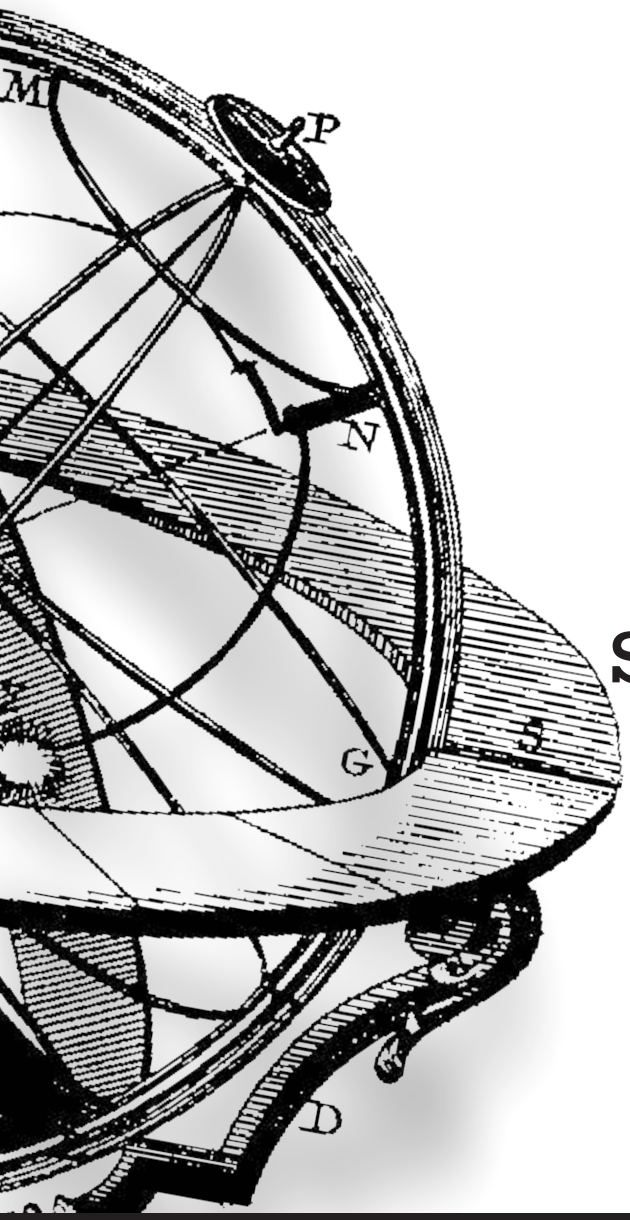
$$\frac{DH}{AH}=\frac{sen2\alpha\left[2p\cos\alpha+q\right]}{\cos2\alpha\left[2p\cos\alpha+q\right]}$$

$$\therefore\frac{DH}{AH}=tg2\alpha$$

Rpta.: B

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



11

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometria

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

I. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES (Vp = valor principal)

1) sen (Ax + B) = a , $a \in [-1, 1]$

$$Vp = \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{sen}\,\theta = a$$

2) cos (Ax + B) = a , $a \in [-1, 1]$

$$Vp = \theta \in [0, \pi], \quad \cos\theta = a$$

3) tan (Ax + B) = a , $a \in \mathbb{R}$

$$Vp = \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle, \quad \tan\theta = a$$

4) cot (Ax + B) = a , $a \in \mathbb{R}$

$$Vp = \theta \in \langle 0, \pi\rangle, \quad \cot\theta = a$$

5) sec (Ax + B) = a , $a \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$

$$Vp = \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad \sec\theta = a$$

6) csc (Ax + B) = a , $a \in \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty \rangle$

$$Vp = \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right] \quad , \quad \csc\theta = a$$

II. SOLUCIÓN GENERAL PARA LAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

1) Para seno y cosecante

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = a \\ \csc x = a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = n\pi + (-1)^n Vp,\ n \in \mathbb{Z}$$

2) Para coseno y secante

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = a \\ \sec x = a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = 2n\pi \pm Vp,\ n \in \mathbb{Z}$$

3) Para tangente y cotagente

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{tan}\, x = a \\ \mathbf{cot}\, x = a \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x = n\pi + Vp,\ n \in \mathbb{Z}$$

Trigonometria

EJERCICIOS

1. Halle el conjunto solución de la ecuación $\tan^3 x+\cot^3 x=8\csc^3 2x+1$.

A) $\left\{\frac{(4n+3)\pi}{2} / n\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{(2n+1)\pi}{4} / n\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\{n\pi / n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\left\{\frac{n\pi}{3} / n\in\mathbb{Z}\right\}$

Solución:

Como $\tan^3 x+\cot^3 x=8\csc^3 2x+1$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos^3 x}{\text{sen}^3 x}=\frac{8}{\text{sen}^3 2x}+6$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos^3 x}{\text{sen}^3 x}=\frac{8}{(2\,\text{sen}\,x\cos x)^3}+6$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos^3 x}{\text{sen}^3 x}=\frac{1}{\text{sen}^3 x\cos^3 x}+6$$

$$\Rightarrow \text{sen}^6 x+\cos^6 x=1+6\,\text{sen}^3 x\cos^3 x$$

$$\Rightarrow 1-3\text{sen}^2 x\cos^2 x=1+6\,\text{sen}^3 x\cos^3 x$$

$$\Rightarrow 6\,\text{sen}^3 x\cos^3 x+3\text{sen}^2 x\cos^2 x=0$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x\cos^2 x\,(6\,\text{sen}x\cos x+3)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\text{sen}^2 2x\left(3\,\text{sen}2x+3\right)=0$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 2x=0 \;\vee\; \text{sen}2x=-1$$

$$\Rightarrow \text{sen}2x=-1$$

$$\Rightarrow 2x=2n\pi+\frac{3\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{(4n+3)\pi}{4},\ n\in\mathbb{Z}$$

Rpta.: A

2. La nota que obtuvo Luis en su examen final del curso de trigonometría está representado por el valor de la expresión $5\sqrt{3}\tan\left(\omega-\frac{\pi}{12}\right)+3$ donde ω es la menor solución positiva de la ecuación $\frac{2\,\text{sen}\,x}{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x}=1$, halle la nota que obtuvo Luis en su examen.

A) 16 B) 18 C) 12 D) 14

$$\frac{2\,\text{sen}\,x}{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x}=1$$

Solución:

Como $\dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x}=1$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}\,x}{\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,x+\frac{1}{2}\cos x}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=1$$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\text{sen}\,x=0 \quad\Rightarrow\quad 2\,\text{sen}\frac{\pi}{12}\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0$$

$$\Rightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x_{\text{mín}}=\frac{5\pi}{12}$$

Sea E el valor buscado, entonces

$$E=5\sqrt{3}\tan\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)+3$$

$$E=18$$

Rpta.: B

3. Un atleta en su preparación para los juegos Olímpicos de Tokio 2020, recorrió en línea recta las distancias de una a otra de las cuatro estaciones cuyas ubicaciones están representadas por los puntos consecutivos A, B, C y D. Si $AB=24\,\text{sen}^4(2x)$ km, $BC=24\cos^4(2x)$ km, $CD=24\,\text{sen}^2(2x)$ km y $AD=24$ km donde $x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right\rangle$, halle la distancia que recorrió el atleta de la estación C a la estación D.

A) 16 km B) 18 km C) 12 km D) 14 km

Solución:

Como $\operatorname{sen}^4 2x + \cos^4 2x + \operatorname{sen}^2 2x = 1$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^4 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 2x - \cos^4 2x$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^4 2x = \cos^2 2x - \cos^4 2x$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^4 2x = \cos^2 2x(1 - \cos^2 2x)$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 2x(\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos 4x = 0$

$\Rightarrow \quad 4x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{8}$

$\therefore \ CD = 24\operatorname{sen}^2 2(\frac{\pi}{8}) \text{ km} = 12 \text{ km}$

Rpta.: C

4. Un ciclista se desplazó con rapidez constante por una carretera, y la distancia que recorrió está dado por $\lfloor 2 - \operatorname{tg}(2\pi t) \rfloor \lfloor 1 + \operatorname{sen}(2\pi t) \rfloor - \cos(2\pi t) + 10$ kilómetros, donde $\frac{1}{8} < t < \frac{7}{40}$ denota el tiempo transcurrido en horas. Si el ciclista recorrió una distancia de 10 kilómetros, halle el tiempo que empleó en recorrer dicha distancia.

A) 10 min B) 12 min C) 18 min D) 14 min

Solución:

Como $\lfloor 2 - \tan(2\pi t) \rfloor \lfloor 1 + \operatorname{sen}(2\pi t) \rfloor - \cos(2\pi t) + 10 = 10$

$\Rightarrow \quad 2 - \tan(2\pi t) = \frac{\cos(2\pi t)}{1 + \operatorname{sen}(2\pi t)}$

$\Rightarrow \quad 2 - \tan(2\pi t) = \frac{1}{\sec(2\pi t) + \tan(2\pi t)}$

$\Rightarrow \quad 2 - \tan(2\pi t) = \sec(2\pi t) - \tan(2\pi t)$

$$\Rightarrow \quad \sec(2\pi t) = 2$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi t = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{6} \text{ hrs}$$

Por lo tanto, el automóvil empleó 10 minutos en recorrer dicha distancia.

Rpta.: A

5. Para un dia nublado los cientificos llegaron a la conclusión que la instensidad de la luz solar está modelado por $I = I_M \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{D}\right)$ donde $0 \le t \le D$ es el tiempo en horas, I_M es la intensidad máxima de la luz solar y D es el número de horas de la luz diurna. Si D=12, determine el número de veces al día donde la intensidad de la luz es igual a la cuarta parte de la intensidad máxima.

A) 6 B) 1 C) 2 D) 4

<u>Solución</u>:

Como $I = I_M \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{D}\right) \ \wedge \ I = \frac{I_M}{4} \ \wedge \ 0 \le t \le D \ \wedge \ D = 12$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_M}{4} = I_M \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad t = 2, 10$$

Por lo tanto, el número de veces es 2.

Rpta.: C

6. La parte administrativa de una empresa determinó que el costo total y el costo variable están representados por las expresiones $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$ y $\cos x$ en millones de soles respectivamente, donde $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ denota el tiempo en años. Si el costo fijo de la empresa es $\cos 2\pi$ millones de soles, halle el doble del costo variable de la empresa.

A) $\sqrt{3}$ millones de soles
B) 2 millones de soles
C) 1,2 millones de soles
D) 4 millones de soles

Solución:

Como $(\operatorname{sen} x+\cos x)^2=\cos 2\pi+\cos x$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x+\cos^2 x=1+\cos x$

$\Rightarrow \quad \cos x(2\operatorname{sen} x-1)=0$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} x=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore$ Costo variable $=\cos\dfrac{\pi}{6}$ millones $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ millones

Rpta.: A

7. Un climatólogo modeló la temperatura del 6 de Agosto del 2020 de la ciudad de Lima por la expresión $12-4\cos\left(\dfrac{\pi t}{24}+\dfrac{5\pi}{2}\right)$ en °C, donde $t\in[0,24]$ es el tiempo transcurrido en horas a partir de la media noche del 5 de Agosto del 2020, determine a qué hora por segunda vez la temperatura fue de 14 °C.

A) 4:00 a.m. B) 6:00 p.m. C) 4:00 p.m. D) 8:00 p.m.

Solución:

Como $12-4\cos\left(\dfrac{\pi t}{24}+\dfrac{5\pi}{2}\right)=14$

$\Rightarrow \quad 12+4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{24}\right)=14$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi t}{24}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\pi t}{24}=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad t=4,20$

Rpta.: D

8. El ingreso y el costo total de producción de una empresa en China que se dedica a la fabricación y venta de mascarillas están modelado por las expresiones $3+\cos(2\pi x)$ y $1+\sqrt{3}\operatorname{sen}(2\pi x)$ en decenas de miles de soles respectivamente, donde $x\in\left[\dfrac{1}{12},\dfrac{5}{12}\right]$ representa la cantidad de mascarillas fabricadas en docenas de miles, determine la mínima cantidad de mascarillas (en miles de unidades) que debe producir la empresa para recuperar lo invertido.

A) 2 B) 6 C) 1 D) 4

Solución:

Como $1+\sqrt{3}\,\text{sen}(2\pi x)=3+\cos(2\pi x)$

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}\,\text{sen}(2\pi x)-\cos(2\pi x)=2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}(2\pi x)-\dfrac{1}{2}\cos(2\pi x)=1$

$\Rightarrow \quad \text{sen}\left(2\pi x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

$\Rightarrow \quad 2\pi x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{3}$

Por lo tanto, la mínima cantidad que debe producir y vender es 4000 mascarillas.

Rpta.: D

9. Halle el número de soluciones de la ecuación $x^2+x=\text{sen}\,x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3

Solución:

Como $x^2+x+1=\text{sen}\,x \quad \wedge \quad x^2+x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad 0<\text{sen}\,x\le 1$

Para $x=-\dfrac{\pi}{6}$: $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)<0 \ (\Rightarrow / \Leftarrow)$

$\therefore$ C.S. $=\varnothing$

Rpta.: B

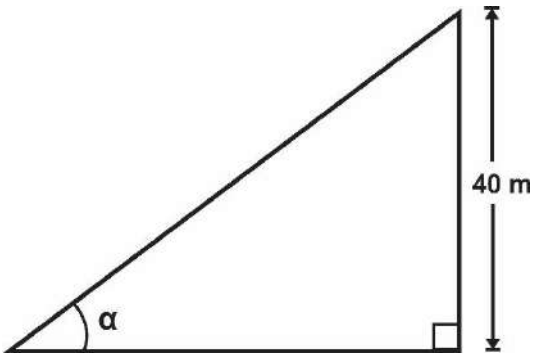
10. Pedro tiene un terreno de forma triangular (figura adjunta) destinado para el sembrío de plantas medicinales. Si α es la menor solución positiva de la ecuación $1-\text{sen}\,2x+\cos 2x=\cos\dfrac{\pi}{2}$, halle el área de dicho terreno.

A) 600 m^2

B) 1600 m^2

C) 800 m^2

D) 400 m^2



Solución:

Como $1-\operatorname{sen}2x+\cos 2x=0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$\Rightarrow \quad \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{mín}}=\frac{\pi}{4}$

Por lo tanto, la superficie del terreno es $800\ m^2$.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle la menor solución de la ecuación $2\cot^2 x+3\csc x=0,\ x\in\left[\frac{7\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right]$.

A) $\frac{19\pi}{6}$ B) $\frac{17\pi}{6}$ C) $\frac{19\pi}{3}$ D) $\frac{17\pi}{3}$

Solución:

Como $2\cot^2 x+3\csc x=0$

$\Rightarrow \quad 2\left(\csc^2 x-1\right)+3\csc x=0$

$\Rightarrow \quad 2\csc^2 x+3\csc x-2=0$

$\Rightarrow \quad (2\csc x-1)(\csc x+2)=0$

$\Rightarrow \quad \csc x=-2$

$\Rightarrow \quad x=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x_{\text{mín}}=\frac{19\pi}{6}$

Rpta.: A

2. En una clase del curso de Trigonometría de la CEPREUNMSM, el profesor planteó la siguiente ecuación en la pizarra: $8\operatorname{sen}^3 x+1=6\operatorname{sen}x$ y solicitó a sus estudiantes la menor solución positiva que satisface dicha ecuación. Josué, un estudiante, consigue resolverla correctamente y da su respuesta, ¿cuál fue la respuesta que obtuvo Josué?

A) $\frac{\pi}{18}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{9}$ D) $\frac{\pi}{3}$

Solución:

Como $8\operatorname{sen}^3 x + 1 = 6\operatorname{sen} x$

$\Rightarrow \quad 2\left(3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x\right) = 1$

$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} 3x = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad 3x = \dfrac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{18}$

Rpta.: A

3. Halle la suma de soluciones de la ecuación $\cos^2 3x = \cos 2x + \operatorname{sen}^2 x,\ x \in [0,\pi]$.

A) 3π B) 2π C) $\dfrac{3\pi}{2}$ D) $\dfrac{5\pi}{2}$

Solución:

Como $\cos^2 3x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$

$\Rightarrow \quad \cos 2x \cos 4x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \quad \cos 2x\left(\cos 4x - 1\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \cos 2x = 0 \quad \vee \quad \cos 4x = 1$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{(2n+1)\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x = \dfrac{n\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$

Por lo tanto, la suma de soluciones es $\dfrac{5\pi}{2}$.

Rpta.: D

4. La altura respecto al suelo a la que se encuentra un paracaidista desde que abre el paracaídas está determinado por el valor de la expresión en $6000\cos\left(\dfrac{\pi t}{54}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi t}{54}\right)\cos\left(\dfrac{\pi t}{54} - \dfrac{\pi}{3}\right)$ metros, donde $t \in [0,9]$ es el tiempo transcurrido en minutos, determine el tiempo en el cual el paracaidista se encontró a una altura de 750 m.

A) 2,5 min B) 4 min C) 6 min D) 8 min

Solución:

Como $6000\cos\left(\dfrac{\pi t}{54}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi t}{54}\right)\cos\left(\dfrac{\pi t}{54} - \dfrac{\pi}{3}\right) = 750$

$$\Rightarrow \quad 4\cos\left(\frac{\pi t}{54}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi t}{54}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi t}{54}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi t}{18}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi t}{18}=\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad t=6$$

Rpta.: C

5. Halle el número de soluciones de la ecuación $\sqrt{6}\left(\operatorname{sen}2x+\cos 2x\right)+10\operatorname{sen}4x=8$, $x\in[0,\pi]$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

<u>Solución</u>:

Como $\sqrt{6}\left(\operatorname{sen}2x+\cos 2x\right)=8-10\operatorname{sen}4x$

$$\Rightarrow \quad 6\left(1+\operatorname{sen}4x\right)=64-160\operatorname{sen}4x+100\operatorname{sen}^2 4x$$

$$\Rightarrow \quad 50\operatorname{sen}^2 4x-83\operatorname{sen}4x+29=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(25\operatorname{sen}4x-29\right)\left(2\operatorname{sen}4x-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}4x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{n\pi}{4}+\left(-1\right)^n\frac{\pi}{24},\ n\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{24},\frac{5\pi}{24},\frac{13\pi}{24},\frac{17\pi}{24}$$

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la ecuación

$$F=\frac{1}{2}(1-\cos\theta),\ 0\le\theta\le\pi,$$

la fracción F representa la medida astronómica de la superficie de la Luna iluminada por el Sol. Determine la suma de los ángulos correspondientes para las fases de luna nueva y cuarto creciente.

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{7\pi}{4}$ D) $\frac{3\pi}{4}$

Solución:

$F=\frac{1}{2}(1-\cos\theta),\ 0\le\theta\le\pi$

(1) Luna nueva: $\frac{1}{2}(1-\cos\theta)=0\Rightarrow\cos\theta=1\ \Rightarrow\theta=0$

(2) Cuarto creciente: $\Rightarrow\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ 0+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}.$

Rpta.: B

2. El desplazamiento del amortiguador de un automóvil está modelado por la ecuación

$D=2^{-0,2t}\operatorname{sen}4\pi t,\ 0\le t\le\frac{1}{2}$, donde t denota el número de segundos después de iniciado el desplazamiento. Halle la suma de los tiempos cuando el amortiguador está en posición de equilibrio.

A) $\frac{5}{6}$s B) $\frac{4}{7}$s C) $\frac{3}{4}$s D) $\frac{6}{7}$s

Solución:

$D=2^{-0,2t}\operatorname{sen}4\pi t,\ 0\le t\le\frac{1}{2}$

Posición de equilibrio $D=0\ \Rightarrow\ \operatorname{sen}4\pi t=0\Rightarrow\ 4\pi t=0,\ \pi,\ 2\pi\Rightarrow\ t=0,\ \frac{1}{4},\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{3}{4}.$

Rpta.: C

3. Las ondas modeladas por las ecuaciones: $y_1 = 1{,}5\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{5} - 3t\right)$, $y_2 = 1{,}5\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{5} + 3t\right)$ están viajando a lo largo de una misma cuerda de 30 pies de largo, donde x denota un punto de la cuerda. Si el movimiento de la cuerda está determinado por $y = y_1 + y_2$ para cualquier valor de t, halle la suma de los valores de x cuando $y = 0$ (tales puntos son llamados **nodos**).

A) 105 B) 95 C) 115 D) 120

Solución:

$$y_1 = 1{,}5\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{5} - 3t\right),\ y_2 = 1{,}5\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{5} + 3t\right)$$

$$\Rightarrow y = 1{,}5\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{5} - 3t\right) + 1{,}5\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{5} + 3t\right) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right)\cdot\cos 3t$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right)\cdot\cos 3t = 0 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi x}{5} = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 5n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30.$$

$$\therefore\ 0 + 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 = 105.$$

Rpta.: A

4. Determine θ, ángulo formado por dos de los lados de un terreno de forma triangular que miden $(40.\cos\theta)$ m y (60) m, si su área es igual a $(600\,\text{sen}4\theta)\,\text{m}^2$.

A) $\frac{\pi}{8}$rad B) $\frac{\pi}{4}$rad C) $\frac{\pi}{6}$rad D) $\frac{\pi}{3}$rad

Solución:

$$S = \frac{1}{2}(60)(40\cos\theta)\text{sen}\theta$$

$$S = 600\text{sen}2\theta = 600\text{sen}4\theta \Rightarrow \text{sen}2\theta = \text{sen}4\theta = 2\text{sen}2\theta\cos 2\theta$$

$$\text{sen}2\theta \neq 0 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_{menor} = \frac{\pi}{6}\text{rad}.$$

Rpta.: C

5. En una ciudad donde el frío es intenso, la temperatura del día está determinado por la expresión $12+16\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ en $°C$, donde t denota el tiempo en horas. Si el registro de la temperatura se inicia después de la medianoche, ¿a qué hora la temperatura alcanza los $4°C$ por tercera vez?

A) 1 p.m. B) 2 p.m. C) 3 p.m. D) 4 p.m.

Solución:

$$12+16\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)=4 \Rightarrow 16\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)=-8 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi t}{6}=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{8\pi}{3} \Rightarrow t=4,8,16$$

$\therefore$ La temperatura alcanza los $4°C$ por tercera vez a las 16 hrs., esto es 4:00 pm

Rpta.: D

6. Halle el conjunto solución de la ecuación $\cot(2x+\frac{\pi}{4})-\cot(\frac{\pi}{4}-2x)=2$.

A) $\left\{\frac{(4n+1)\pi}{16}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ B) $\left\{\frac{(4n-1)\pi}{8}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{(4n-1)\pi}{16}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ D) $\left\{\frac{(4n+1)\pi}{8}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

Solución:

$$\cot(2x+\frac{\pi}{4})-\cot(\frac{\pi}{4}-2x)=2 \Rightarrow \cot(2x+\frac{\pi}{4})-\tan(2x+\frac{\pi}{4})=2$$

$$\Rightarrow 2\cot(4x+\frac{\pi}{2})=2 \Rightarrow \tan 4x=-1 \Rightarrow 4x=n\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=(4n-1)\frac{\pi}{16}, n\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore \{(4n-1)\frac{\pi}{16}/n\in\mathbb{Z}\}.$$

Rpta.: C

7. Determine el mayor valor que toma la expresión $\sqrt{3}\tan t - \tan\frac{t}{2}$, siendo t una de las soluciones de la ecuación $2\tan x + \sqrt{3}\tan^2 x = \sqrt{3},\ x \in [0, \pi]$.

A) $\sqrt{3}+1$ B) $\sqrt{3}-1$ C) $\sqrt{2}+1$ D) $3\sqrt{2}-1$

Solución:

Resolviendo la ecuación: $2\tan x + \sqrt{3}\tan^2 x = \sqrt{3},\ x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow 2\tan x = \sqrt{3}(1-\tan^2 x) \Rightarrow 2\tan x = \sqrt{3}(1-\tan^2 x)$

$\Rightarrow 2\tan x = \sqrt{3}(1-\tan^2 x) \Rightarrow 2\tan x = \sqrt{3}(1-\tan^2 x) \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$

Luego:

(1) $Q(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{6}) - \tan(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}}) - (2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$

(2) $Q(3) = \sqrt{3}\tan(\frac{2\pi}{3}) - \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}(-\sqrt{3}) - (\sqrt{3}) = -3-\sqrt{3}$

$\therefore$ El mayor valor que puede tomar Q es $\sqrt{3}-1$.

Rpta.: B

8. Las edades de Juan y Pedro son $25x^2$ y $15\tan^2\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ años, respectivamente. Si $\cos 35° + \operatorname{sen} 65° = x\cos 5°$, halle la diferencia de ambas edades.

A) 35 años B) 30 años C) 33 años D) 40 años

Solución:

$\cos 35° + \operatorname{sen} 65° = x\cos 5° \Rightarrow \cos 35° + \cos 25° = x\cos 5°$

$\Rightarrow 2\cos 30° \cdot \cos 5° = x\cos 5° \Rightarrow x = \sqrt{3}$

Luego: $25x^2 - 15\tan^2\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) = 25(3) - 15\tan^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 75 - 45 = 30.$

Rpta.: B

9. Dado $M = 32\tan\dfrac{\pi}{3}\cdot \operatorname{sen} 4x$ y $N = 32\cos\dfrac{\pi}{6}\cdot \operatorname{sen} 2x$, calcule $\tan^2 2\alpha$, siendo α la menor solución positiva de la ecuación $\dfrac{M}{N} = 2$.

A) 1 B) $\dfrac{2}{3}$ C) 2 D) 3

Solución:

$$\frac{M}{N} = 2 \Rightarrow \frac{32\tan\frac{\pi}{3}\cdot \operatorname{sen} 4x}{32\cos\frac{\pi}{6}\cdot \operatorname{sen} 2x} = 2 \Rightarrow \frac{32(\sqrt{3})\cdot \operatorname{sen} 4x}{32(\frac{\sqrt{3}}{2})\operatorname{sen} 2x} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{32(\sqrt{3})\cdot \operatorname{sen} 4x}{32(\frac{\sqrt{3}}{2})\operatorname{sen} 2x} = 2 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore \tan^2 2\alpha = 3.$

Rpta.: D

10. En qué año nació Carlos si su edad está determinada por la solución de la ecuación $\cos^4\dfrac{\pi t}{24} - \operatorname{sen}^4\dfrac{\pi t}{24} + \cos\dfrac{5\pi t}{12} = 0$, donde $t \in \langle 14, 18\rangle$ denota el número de años.

A) 2003 B) 2002 C) 2004 D) 2005

Solución:

$$\cos^4\frac{\pi t}{24}-\text{sen}^4\frac{\pi t}{24}+\cos\frac{5\pi t}{12}=0 \Rightarrow \cos^2\frac{\pi t}{24}-\text{sen}^2\frac{\pi t}{24}+\cos\frac{5\pi t}{12}=0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi t}{12}+\cos\frac{5\pi t}{12}=0 \Rightarrow 2\cos\frac{\pi t}{4}\cdot\cos\frac{\pi t}{6}=0,\ 14<t<18$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi t}{4}\cdot\cos\frac{\pi t}{6}=0 \Rightarrow \cos\frac{\pi t}{4}=0 \vee \cos\frac{\pi t}{6}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi t}{4}=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2} \vee \frac{\pi t}{6}=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t=2,6,10,14,18 \vee t=3,9,15,21$$

$$\Rightarrow t=15$$

$\therefore$ Carlos nació en el año 2004.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La expresión $(10\sec^2\frac{\pi}{3}+2)(\cos\frac{7200\pi t}{7841})$ representa la distancia en kilómetros que recorre un maratonista en los Juegos Panamericanos y t denota el tiempo en horas. Si Cristian Pacheco recorrió 42 kilómetros, halle el tiempo que empleó para recorrer dicha distancia.

A) $2h:15m:41s$ B) $2h:20m:10s$ C) $2h:01m:41s$ D) $2h:10m:41s$

Solución:

$$(10\sec^2\frac{\pi}{3}+2)(\cos\frac{7200\pi t}{7841})=42 \Rightarrow \cos\frac{7200\pi t}{7841}=1$$

$$\Rightarrow \frac{7200\pi t}{7841}=2\pi \Rightarrow t=\frac{7841}{3600}\text{horas}$$

Luego el tiempo empleado es: $2h:10m:41s$

Rpta.: D

2. La garantía de funcionamiento de una máquina está determinada por la ecuación $\text{sen}^6\frac{\pi t}{48}+\cos^6\frac{\pi t}{48}=\frac{7}{16}$, donde $9<t<25$ denota el tiempo en trimestres. ¿Cuántos años de garantía tiene la máquina?

A) 4 años B) 5 años C) 6 años D) 3 años

Solución:

$$\text{sen}^6\frac{\pi t}{48}+\cos^6\frac{\pi t}{48}=\frac{7}{16}\ ,\ 9<t<25\Rightarrow\ 1-3\,\text{sen}^2\frac{\pi t}{48}\cdot\cos^2\frac{\pi t}{48}=\frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow\ 4\,\text{sen}^2\frac{\pi t}{48}\cdot\cos^2\frac{\pi t}{48}=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \text{sen}^2\frac{\pi t}{24}=\frac{3}{4}\Rightarrow\ 2\text{sen}^2\frac{\pi t}{24}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\ 1-\cos\frac{\pi t}{12}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ \cos\frac{\pi t}{12}=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{\pi t}{12}=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}\Rightarrow\ t=8,\ 16.$$

$\therefore\ t=16\,\text{trimestres}=4$ años.

Rpta.: A

3. Si α es agudo y es solución de la ecuación $\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+3=0$, halle el valor de la expresión $50\sqrt{3}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}+2\tan\alpha\right)$.

A) 500 B) 400 C) 600 D) 300

Solución:

$$\tan^2 x-2\sqrt{3}\tan x+3=0\ \Rightarrow(\tan x-\sqrt{3})^2=0\Rightarrow\tan x=\sqrt{3}\Rightarrow x=\alpha=\frac{\pi}{3}$$

Luego, $50\sqrt{3}\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\text{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}+2\,\text{tg}\,\alpha\right)=50\sqrt{3}\left(\frac{2\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}+2\tan\alpha\right)$

$$=100\sqrt{3}(\cot\alpha+\tan\alpha)=100\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)=400.$$

Rpta.: B

4. La corriente que fluye por un circuito de corriente alterna está modelada por la expresión $2\cos 3t\cdot\text{sen}\,t-\cos 3t$, donde $t\in[0,\pi]$ es el tiempo en segundos. ¿Cuántas veces la corriente se hace cero?

A) 3 veces B) 2 veces C) ninguna vez D) 4 veces

Solución:

$$2\cos 3t\cdot\text{sen}\,t-\cos 3t=0$$

$$\cos 3t(2\text{sen}\,t-1)=0$$

$$\cos 3t=0\quad\vee\quad\text{sen}\,t=\frac{1}{2}$$

$$3t=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\quad\vee\quad t=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$$

$$\text{C.S.}=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}$$

Rpta.: A

5. Halle el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{3}\,\text{sen}\,3x+\cos 3x=1$.

A) $\{[6n+(-1)^{n+1}-1]\frac{\pi}{18}\ /\ n\in\mathbb{Z}\}$

B) $\{[6n+(-1)^{n}]\frac{\pi}{18}\ /\ n\in\mathbb{Z}\}$

C) $\{[3n+(-1)^{n}-1]\frac{\pi}{18}\ /\ n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\{[6n+(-1)^{n}-1]\frac{\pi}{18}\ /\ n\in\mathbb{Z}\}$

<u>Solución</u>:

$\sqrt{3}\,\text{sen}\,3x+\cos 3x=1 \Rightarrow \text{sen}\,3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 3x\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \text{sen}(3x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2} \Rightarrow 3x+\frac{\pi}{6}=n\pi+(-1)^{n}\frac{\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3x=n\pi+(-1)^{n}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\ \ n\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=[6n+(-1)^{n}-1]\frac{\pi}{18},\ n\in\mathbb{Z}$

$\therefore \{[6n+(-1)^{n}-1]\frac{\pi}{18}\ /\ n\in\mathbb{Z}\}$

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS DE LA SEMANA Nº 11

1. Hallar el número de soluciones de la ecuación trigonométrica

$$2\operatorname{sen}x - \csc x = 1,\ x \in [0, 2\pi].$$

A) 5 B) 3 C) 2 D) 4 E) 6

Solución:

$$2\operatorname{sen}x - \frac{1}{\operatorname{sen}x} = 1 \Rightarrow \frac{2\operatorname{sen}^2x - \operatorname{sen}x - 1}{\operatorname{sen}x} = 0$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2x - \operatorname{sen}x - 1 = 0 \ \wedge \ \operatorname{sen}x \neq 0$$

$$\Rightarrow (2\operatorname{sen}x + 1)(\operatorname{sen}x - 1) = 0,\ x \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}x = -\frac{1}{2} \ \vee \ \operatorname{sen}x = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \ \vee \ x = \frac{\pi}{2}$$

Luego, el número total de soluciones es 3.

Rpta.: B

2. La temperatura en la ciudad de Lima, durante el mes de enero del año 2017, en grados ^{o}C, se modela mediante la ecuación $T = 29 + 2\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3})$, donde t representa el día del mes. ¿Cuál es el primer día del mes de enero donde se registra una temperatura de $30^{o}C$?

A) 05/01/17 B) 02/01/17 C) 03/01/17 D) 04/01/17 E) 06/01/17

Solución:

$$T = 29 + 2\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow 30 = 29 + 2\operatorname{sen}(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \frac{1}{2} = \operatorname{sen}(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 3.$$

Luego, el tercer día del mes de enero la temperatura fue $30^{o}C$.

Rpta.: C

3. La ecuación $\cos 2t = \cos t$ describe el desplazamiento de un insecto, donde t denota el tiempo en segundos. ¿Cuál es el menor valor de t que satisface la ecuación?.

A) 4π B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{5}$ D) 2π E) $\frac{2\pi}{3}$

Solución:

$\cos 2t = \cos t \Rightarrow 2\cos^2 t - 1 = \cos t \Rightarrow (2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \vee \cos t = 1 \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} \vee t = 0$

Luego, el menor tiempo es $\frac{2\pi}{3}$.

Rpta.: E

4. Halle la mayor solución negativa de la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos 2\theta = 2\operatorname{sen}2\theta.$$

A) $-\frac{\pi}{2}$ B) $-\frac{\pi}{3}$ C) $-\frac{\pi}{4}$ D) $-\pi$ E) $-\frac{3\pi}{2}$

Solución:

$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos 2\theta = 2\operatorname{sen}2\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta(1 + \cos 2\theta) - 2\operatorname{sen}2\theta = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cdot 2\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}2\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}2\theta\,(\cos\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}2\theta = 0 \vee \cos\theta = 2 \Rightarrow 2\theta = -\pi \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}.$

Luego, $-\frac{\pi}{2}$ es la mayor solución negativa.

Rpta.: A

5. Resolver la ecuación $z\cdot\sec 3\alpha - 5 = 2\operatorname{sen}(\frac{3\alpha}{2})$, donde α (agudo) es una solución de la ecuación trigonométrica $\cos^2 2x(1+\operatorname{tg}^2 2x)\cdot\operatorname{sen}x = \cos\frac{7\pi}{18}$.

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

Solución:

$\cos^2 2x\cdot\sec^2 2x\cdot\operatorname{sen}x = \cos\frac{7\pi}{18} \Rightarrow \operatorname{sen}x = \cos\frac{7\pi}{18} \Rightarrow V_P = \frac{\pi}{9}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9}$.

Reemplazando el valor de $\alpha = \frac{\pi}{9}$ en la expresión $z\cdot\sec 3\alpha - 5 = 2\operatorname{sen}(\frac{3\alpha}{2})$ se tiene $z\cdot\sec\frac{\pi}{3} - 5 = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 3$.

Rpta.: C

6. El ingreso total, el gasto total y la ganancia de una empresa están dadas por $4\cos^2 x$, $\csc x$ y $-\cos\pi$ respectivamente, en millones de soles. Si $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, halle el ingreso total.

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 3,5

Solución:

$\text{Ingreso total} - \text{Gastos totales} = \text{Ganancia}$

$4\cos^2 x - \csc x = -\cos\pi \Rightarrow 4\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}x - 1 = \operatorname{sen}x$

$\Rightarrow 4\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}x = 1 \Rightarrow 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x = 1$

$\Rightarrow \operatorname{sen}3x = 1 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Luego, $\text{Ingreso total} = 4\cos^2 x = 4\cos^2\frac{\pi}{6} = 4(\frac{3}{4}) = 3$ millones de soles.

Rpta.: D

7. Halle la suma de las soluciones de la ecuación trigonométrica

$$|\text{sen}\,2x| - 2|\text{sen}\,x| - 4|\cos x| + 4 = 0,\ x \in [\pi, 3\pi]\ .$$

A) 4π B) C) 6π D) E) 7π

Solución:

$2|\text{sen}\,x \cdot \cos x| - 2|\text{sen}\,x| - 4|\cos x| + 4 = 0$

$2|\text{sen}\,x||\cos x| - 2|\text{sen}\,x| - 4|\cos x| + 4 = 0$

$(|\text{sen}\,x| - 2)(|\cos x| - 1) = 0 \Rightarrow |\text{sen}\,x| = 2 \vee |\cos x| = 1$

$\Rightarrow |\cos x| = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1,\ x \in [\pi, 3\pi]$

$\Rightarrow x = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \Rightarrow \sum x = \pi + 2\pi + 3\pi = 6\pi.$

Rpta.: C

8. Halle la menor solución positiva de la ecuación $\text{tg}\,2x + \text{ctg}\,x = 8\cos^2 x$.

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{24}$ C) D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{5\pi}{12}$

Solución:

$\frac{\text{sen}\,2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = 8\cos^2 x$

$\Rightarrow \text{sen}\,2x \cdot \text{sen}\,x + \cos 2x \cdot \cos x = 8\cos^2 x \cdot \cos 2x \cdot \text{sen}\,x$

$\Rightarrow \cos x(1 - 8\cos x \cdot \cos 2x \cdot \text{sen}\,x) = 0$

$\Rightarrow \cos x(1 - 2\text{sen}\,4x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \vee \text{sen}\,4x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{24}$

Por lo tanto, la mínima solución positiva es $\frac{\pi}{24}$.

Rpta.: B

9. Halle la suma de las soluciones de la ecuación trigonométrica

$$\sec^2 x + tg^2 x + ctg^2 x = \csc^2 x + 1,\ -\pi < x < 0.$$

A) B) π C) D) E) $\frac{3\pi}{2}$

Solución:

$\sec^2 x + 1 + tg^2 x + 1 + ctg^2 x = \csc^2 x + 3$

$\Rightarrow 2\sec^2 x = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \cos 2x = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 2x = -\alpha,\ -(2\pi - \alpha) \Rightarrow x = -\frac{\alpha}{2},\ -\pi + \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \sum x = -\pi.$

Rpta.: D

10. Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\sec 2x \cdot ctg\, x = 4\csc 2x - \sec 2x \cdot tg\, x.$$

A) $\{ n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} / \ n \in \mathbb{Z}\}$ B) $\{n\pi \pm \frac{\pi}{3} / \ n \in \mathbb{Z}\}$ C) $\{2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} / \ n \in \mathbb{Z}\}$

D) $\{n\pi \pm \frac{\pi}{6} / \ n \in \mathbb{Z}\}$ E) $\{n\pi \pm \frac{2\pi}{3} / \ n \in \mathbb{Z}\}$

Solución:

$\sec 2x \cdot tg\, x + \sec 2x \cdot ctg\, x = 4\csc 2x \Rightarrow \sec 2x (tg\, x + ctg\, x) = 4\csc 2x$ α

$\Rightarrow 2\csc 2x \cdot \sec 2x = 4\csc 2x \Rightarrow \csc 2x (\sec 2x - 2) = 0$

$\Rightarrow \csc 2x = 0 (\text{no es posible}) \vee \sec 2x = 2 \Rightarrow \sec 2x = 2$

$\Rightarrow 2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \{n\pi \pm \frac{\pi}{6} / \ n \in \mathbb{Z}\}$

Rpta.: D

EVALUACIÓN Nº 11

1. La edad de un niño es $(ctg\,\alpha)$ años y la de su padre ($\frac{2}{5}\csc^2 \alpha$) años, siendo un ángulo agudo. Si la suma de ambas edades es setenta años, calcule el producto de ambas edades.

A) 695 B) 690 C) 585 D) 596 E) 696

Solución:

$\frac{2}{5}\csc^2\alpha + \text{ctg}\,\alpha = 70 \Rightarrow 2(\text{ctg}^2\alpha + 1) + 5\,\text{ctg}\,\alpha = 350$ 4π

$\Rightarrow (2\,\text{ctg}\,\alpha + 29)(\text{ctg}\,\alpha - 12) = 0 \Rightarrow \text{ctg}\,\alpha = 12.$

Luego, la edad del padre es 58 años y el producto de ambas edades es 696.

Rpta.: E

2. Si $\text{sen}^2 2x - \cos^2 4y = 1$, halle la suma de los dos menores valores positivos de "x" y los tres menores valores positivos de "y" que satisfacen la ecuación.

A) B) $\frac{7\pi}{8}$ C) $\frac{17\pi}{8}$ D) E)

Solución:

Despejando,

$\text{sen}^2 2x = 1 + \cos^2 4y \Rightarrow 1 + \cos^2 4y \geq 1$

Pero $\text{sen}^2 2x \leq 1 \Rightarrow 1 + \cos^2 4y \leq 1 \Rightarrow \cos^2 4y = 0 \Rightarrow 4y = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y = (2k+1)\frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \cdots (1)$

Además

$\text{sen}^2 2x = 1 \Rightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \cdots (2)$

Luego, de (1) y (2) la suma es $\frac{17\pi}{8}$.

Rpta.: C

3. Halle el número de soluciones para la ecuación

$$\text{sen}^2 x + \text{sen}3x + \text{sen}7x = \cos^2 x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

A) 3 B) 5 C) 4 D) 7 E) 6

Solución:

$\text{sen}3x + \text{sen}7x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow 2\,\text{sen}5x \cdot \cos 2x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x(2\,\text{sen}5x - 1) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \vee \text{sen}5x = \frac{1}{2},\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \vee 5x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{30}, \frac{5\pi}{30}, \frac{13\pi}{30}$

Luego, el número total de soluciones es cuatro.

Rpta.: C

4. Determine la suma de la menor solución con la mayor solución de la ecuación trigonométrica

$$\frac{\cos 2x - \operatorname{sen} x - 1}{\csc 2x} = 0,\ x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}].$$

A) $\frac{5\pi}{3}$ B) C) $\frac{11\pi}{6}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E)

Solución:

$\cos 2x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$, $\csc 2x \neq 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0$, $\operatorname{sen} 2x \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2},\ \operatorname{sen} x \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$, $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}]$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

Luego, la suma pedida es $-\frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$.

Rpta.: A

5. Hallar el conjunto solución de la ecuación trigonométrica

$$2\cos x + \operatorname{tg} x = \sec x.$$

A) $\{2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} / n \in \mathbb{Z}\}$

B) $\{2n\pi - \frac{\pi}{6} / n \in \mathbb{Z}\}$

C) $\{ n\pi + (-1)^n (-\frac{\pi}{6}) / n \in \mathbb{Z}\}$

D) $\{n\pi + \frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$

E) $\{ n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} / n \in \mathbb{Z}\}$

Solución:

$2\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 2\cos^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0,\ \cos x \neq 0$

$\Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow (2\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \vee \operatorname{sen} x = 1$ (no puede ser pues $\cos x \neq 0$)

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n (-\frac{\pi}{6}), n \in \mathbb{Z}$

$\therefore \{ n\pi + (-1)^n (-\frac{\pi}{6}) / n \in \mathbb{Z}\}.$

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Halle la solución de la ecuación $\text{tg}3x - 3\text{ctg}3x = 0$.

A) $\left\{\frac{\pi}{2}(3n \pm 1) / \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{\pi}{4}(3n \pm 1) / \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{\frac{\pi}{3}(3n \pm 1) / \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\frac{\pi}{9}(3n \pm 1) / \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{\frac{\pi}{9}(2n \pm 1) / \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

Solución:

$$\text{tg}3x - 3\text{ctg}3x = 0 \Rightarrow \text{tg}^2 3x = 3 \Rightarrow 1 - \cos 6x = 3 + 3\cos 6x$$

$$\Rightarrow 4\cos 6x = -2 \Rightarrow \cos 6x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 6x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9}(3n \pm 1).$$

Rpta.: D

2. Halle la suma de las dos menores soluciones positivas de la ecuación

$$\frac{4\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}^3 x}{\cos 3x + \cos x} = \text{tg}\left(\frac{49\pi}{3}\right).$$

A) $\frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) π D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

Solución:

$$\frac{4\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}^3 x}{\cos 3x + \cos x} = \text{tg}\left(\frac{49\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{\text{sen}\,3x + \text{sen}\,x}{\cos 3x + \cos x} = \text{tg}\left(16\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2\,\text{sen}\,2x \cdot \cos x}{2\cos 2x \cdot \cos x} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \text{tg}\,2x = \sqrt{3} \;\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}$$

$$\therefore \sum \text{Sol.} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Rpta.: A

3. En un viaje de excursión al sur, se compran caramelos, la primera vez se paga $3\cos^2 x$ soles y en una segunda oportunidad se paga $\text{sen}^2 x$ soles, donde x es un ángulo agudo. Si la diferencia entre la primera compra y la segunda es de dos soles, ¿cuánto se pagó en total?.

A) S/ 3,00 B) S/ 2,50 C) S/ 3,50 D) S/ 2,80 E) S/ 3,20

Solución:

$$3\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2 \;\Rightarrow 3(1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^2 x = 2$$

$$\Rightarrow 2\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow 1 - \cos 2x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow\; x = \frac{\pi}{6}$$

Luego se paga: $3\cos^2\frac{\pi}{6} + \text{sen}^2\frac{\pi}{6} = 3\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$

Rpta.: B

4. En la ciudad de Puno, la temperatura en el mes de agosto, en grados centígrados, está determinada por la expresión $8+12\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, donde t denota el tiempo en días. Halle los días en que la temperatura promedio en la ciudad es de 14ºC.

A) 5, 10 y 26 B) 2, 15 y 26 C) 4, 10 y 26
D) 2, 10 y 16 E) 2, 10 y 26

Solución:

$8+12\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)=14 \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{12}=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$

$\Rightarrow t=2, 10, 26$

$\therefore$ Los días 2, 10 y 26 la temperatura promedio es de 14°C.

Rpta.: E

5. En un campo de entrenamiento se lanza un misil con un ángulo de elevación de $90^{\circ}-2\alpha$, a una velocidad de $(3+2\cos 2\alpha)\,\text{m/s}$. Si después de 20 segundos el misil se encuentra a una distancia horizontal de $(120\,\text{tg}\alpha)\,\text{m}$ del punto de lanzamiento, calcule la medida de α.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{12}$

Solución:

$v=(2\cos 2\alpha+3)\,\text{m/s}$

$v_H=\cos(90^{\circ}-2\alpha)(2\cos 2\alpha+3)\,\text{m/s}$

$\Rightarrow \text{sen}2\alpha(2\cos 2\alpha+3)\times 20=120\,\text{tg}\alpha$

$\Rightarrow 2\cos^2\alpha(2\cos 2\alpha+3)=6 \Rightarrow (\cos 2\alpha+1)(2\cos 2\alpha+3)=6$

$\Rightarrow 2\cos^2 2\alpha+5\cos 2\alpha-3=0 \Rightarrow (2\cos 2\alpha-1)(\cos 2\alpha+3)=0$

$\Rightarrow \cos 2\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}.$

Rpta.: C

6. Si dos ángulos agudos x e y satisfacen la ecuación

$$\text{sen}^2x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \frac{3}{4} + \text{tg}^2y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{tg}\,y + \frac{1}{3} = 0,$$

calcule el valor de la expresión $10\,\text{tg}^2x + 12\csc^2 y$.

A) 70 B) 78 C) 88 D) 75 E) 82

Solución:

$$\text{sen}^2x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \frac{3}{4} + \text{tg}^2y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\text{tg}\,y + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\text{sen}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\text{tg}\,y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ 10\,\text{tg}^2x + 12\csc^2 y = 10\,\text{tg}^2\frac{\pi}{3} + 12\csc^2\frac{\pi}{6}$$

$$= 10(3) + 12(4) = 78$$

Rpta.: B

7. Una investigación realizada por un grupo de biólogos que estudia los efectos nutricionales de un alimento balanceado, suministrado a pollos en una granja determina que si se suministran x kilogramos ($0 < x < \pi$) de dicho alimento el peso del pollo aumenta en $\cos^2x - \frac{5}{2}\cos x + 11$ gramos. Cuantos kilogramos de dicho alimento como mínimo se debe suministrar para que el pollo aumente de peso 10 gramos.

A) $\frac{\pi}{5}$ kg B) $\frac{\pi}{6}$ kg C) $\frac{\pi}{3}$ kg D) $\frac{\pi}{4}$ kg E) $\frac{2\pi}{3}$ kg

Solución:

$$\cos^2x - \frac{5}{2}\cos x + 11 = 10 \Rightarrow 2\cos^2x - 5\cos x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = 2$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}\ \text{kg.}$$

Rpta.: C

8. Cuando la luna gira alrededor de la tierra, el lado que da la cara a la tierra por lo general está solo parcialmente iluminado por el sol. Las fases de la luna describen cuánto de la superficie parece estar a la luz del sol; una medida astronómica está dada por $F=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$, donde F denota la fracción iluminada del disco lunar y θ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ es el ángulo entre el sol, la tierra y la luna. Determine los ángulos que corresponden las fases cuarto creciente y cuarto menguante $(F=0,25)$.

A) $\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$

Solución:

$$\frac{1}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{4}\Rightarrow 1-\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}.$$

Rpta.: D

9. Un proyectil es disparado con una velocidad inicial $v_0=400$ pies/s con un ángulo de elevación θ. Si la altura de la trayectoria del proyectil está modelada por $h(\theta)=\frac{v_0^2\,\text{sen}^2\theta}{64}$, encuentre el ángulo θ cuando el proyectil alcanza una altura de 625 pies.

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{12}$

Solución:

$$625=\frac{(400)(400)\text{sen}^2\theta}{64}\Rightarrow 625=\frac{(4\times100)(4\times100)\text{sen}^2\theta}{4\times4\times4}$$

$$\Rightarrow 625=\frac{(4\times25)(4\times25)\text{sen}^2\theta}{4}\Rightarrow 625=(4\times25)(25)\text{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow \text{sen}\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}.$$

Rpta.: C

10. Un constructor realiza una obra en 120 días, los días t de entrega de los pedidos de ladrillos satisfacen la ecuación $\sqrt{6+\text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right)}=\text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right)$. ¿Cuántas veces durante el tiempo que demora la construcción de la obra se realiza la entrega de ladrillos?.

A) 4 veces B) 6 veces C) 8 veces D) 7 veces E) 5 veces

Solución:

$$\sqrt{6+\text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right)}=\text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right) \Rightarrow 6+\text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right)=\text{tg}^4\left(\frac{\pi t}{48}\right)$$

$$\Rightarrow \text{tg}^4\left(\frac{\pi t}{48}\right)-\text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right)-6=0 \Rightarrow \left[\text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right)-3\right]\left[\text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right)+2\right]=0$$

$$\Rightarrow \text{tg}^2\left(\frac{\pi t}{48}\right)-3=0 \Rightarrow 1-\cos\left(\frac{\pi t}{24}\right)=3+3\cos\left(\frac{\pi t}{24}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{24}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{24}=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{10\pi}{3},\ \frac{14\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t=16,\ 32,\ 64,\ 80,\ 112.$$

Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle la diferencia entre la mayor y menor solución de la ecuación

$$\frac{2\,\text{sen}^2x+\cos 8x-1}{\text{sen}3x\cdot\cos 3x+2\,\text{sen}3x}=0,\quad -\frac{\pi}{5}\le x<\pi.$$

A) π B) 3π C) $-\pi$ D) $\frac{-3\pi}{2}$ E) 2π

Solución:

$$\frac{2\,\text{sen}^2x+\cos 8x-1}{\text{sen}3x\cdot\cos 3x+2\,\text{sen}3x}=0 \Rightarrow \frac{1-\cos 2x+\cos 8x-1}{\text{sen}3x\cdot\cos 3x+2\,\text{sen}3x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 8x-\cos 2x}{\text{sen}3x(\cos 3x+2)}=0 \Rightarrow \frac{-2\text{sen}5x\cdot\text{sen}3x}{\text{sen}3x(\cos 3x+2)}=0$$

$$\Rightarrow \text{sen}5x=0 \wedge \text{sen}3x\neq 0,\quad -\pi\le 5x<5\pi$$

$$\Rightarrow 5x=-\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{5},\ 0,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5}$$

$$\therefore \frac{4\pi}{5}-\left(-\frac{\pi}{5}\right)=\pi.$$

Rpta.: A

2. Halle el conjunto solución de la ecuación

$$\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x+\operatorname{sen} x\cdot\cos x}+\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}=-4.$$

A) $\{2n\pi\pm\frac{\pi}{3}/n\in\mathbb{Z}\}$ B) $\{2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}/n\in\mathbb{Z}\}$ C) $\{2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}/n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\{2n\pi\pm\frac{\pi}{6}/n\in\mathbb{Z}\}$ E) $\{2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}/n\in\mathbb{Z}\}$

Solución:

$$\frac{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)}+\frac{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}=-4$$

$$\Rightarrow \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}=-4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x}=-2 \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ n\in\mathbb{Z}.$$

$$\therefore \{2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}/n\in\mathbb{Z}\}$$

Rpta.: C

3. En un laboratorio se construye un drone para recabar información sobre un evento deportivo en un estadio, a los t segundos de iniciado el vuelo. La altura que alcanza dicho drone está dada por la expresión $\left(400\operatorname{sen}\frac{t}{14}-400\operatorname{sen}^2\frac{t}{14}\right)$ en metros, con $0\le t\le 7\pi$ en segundos. ¿Después de cuantos segundos el drone se encontrará a una altura de 100 metros?.

A) $\frac{7\pi}{5}$s B) $\frac{5\pi}{3}$s C) $\frac{6\pi}{7}$s D) $\frac{7\pi}{3}$s E) $\frac{7\pi}{4}$s

Solución:

$$400\,\text{sen}\frac{t}{14} - 400\,\text{sen}^2\frac{t}{14} = 100 \Rightarrow 4\,\text{sen}\frac{t}{14} - 4\,\text{sen}^2\frac{t}{14} = 1$$

$$\Rightarrow 4\,\text{sen}^2\frac{t}{14} - 4\,\text{sen}\frac{t}{14} + 1 = 0 \Rightarrow \left(2\,\text{sen}\frac{t}{14} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{sen}\frac{t}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t}{14} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{7\pi}{3}\text{s.}$$

Rpta.: D

4. La edad en años de una persona es igual al número de grados sexagesimales de un ángulo, tal que la tangente de dicha edad aumentado en $\frac{\pi}{4}$ es igual a dos unidades aumentado el triple de su cotangente y disminuido seis veces la cotangente de su doble. Determine la edad factible de dicha persona.

A) 35 años B) 30 años C) 28 años D) 33 años E) 31 años

Solución:

Sea x la edad de la persona

Del enunciado se tiene:

$$\text{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 2 + 3\,\text{ctg}\,x - 6\,\text{ctg}\,2x \Rightarrow \text{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 2 + 3(\text{ctg}\,x - 2\,\text{ctg}\,2x)$$

$$\Rightarrow \text{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 2 + 3(\text{ctg}\,x - \text{ctg}\,x + \text{tg}\,x)$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}\,x} = 2 + 3\,\text{tg}\,x \Rightarrow 1 + \text{tg}\,x = 2 + 3\,\text{tg}\,x - 2\text{tg}\,x - 3\,\text{tg}^2x$$

$$\Rightarrow 3\,\text{tg}^2x = 1 \Rightarrow 3 - 3\cos 2x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ.$$

Por lo tanto, la edad factible es de 30 años.

Rpta.: B

5. La inversión que hace un empresario y el ingreso que obtiene están dadas por las expresiones $(1 - \text{sen}\,\pi t)$ y $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \pi t\right)$, respectivamente, en miles de soles. Si t denota el tiempo en años, halle el menor tiempo en que el empresario recupera su capital invertido.

A) 9 meses B) 8 meses C) 7 meses D) 6 meses E) 5 meses

Solución:

Por la condición del problema:

$$1-\operatorname{sen}\pi t=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\pi t\right)\Rightarrow 1-\operatorname{sen}\pi t=\cos\pi t\ \Rightarrow 1-\operatorname{sen}\pi t=\cos\pi t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\pi t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\pi t\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{sen}\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$$

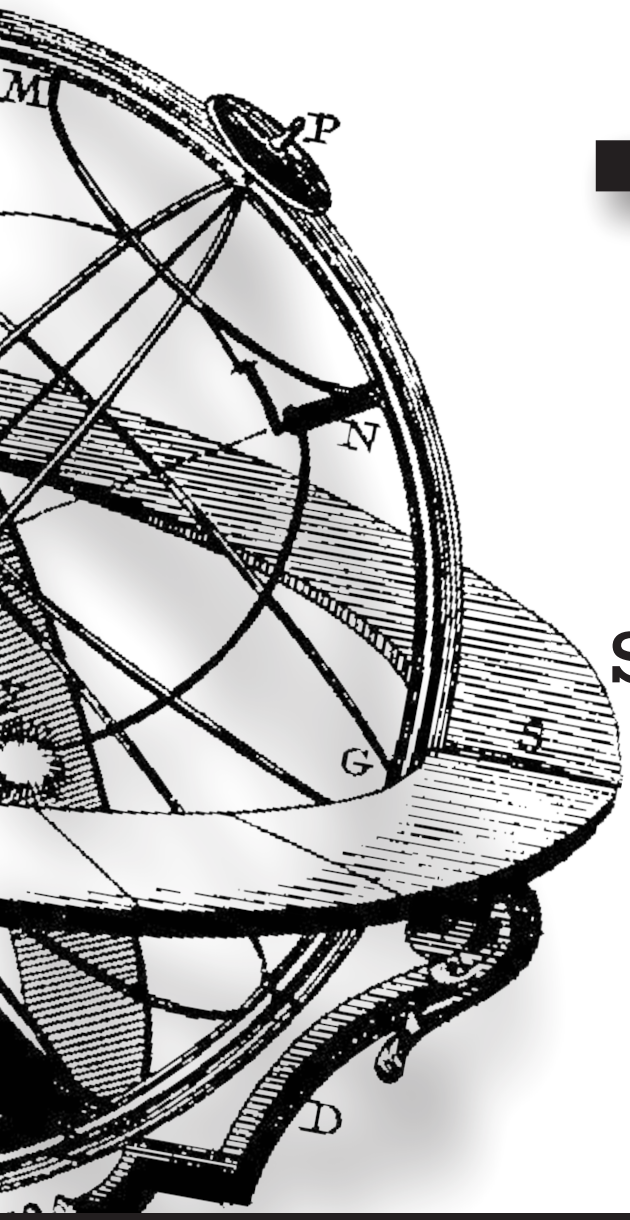
$$\Rightarrow\ \pi t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4}\Rightarrow\ t=\ 0,\ \frac{1}{2},2$$

$\therefore$ El menor tiempo es $\frac{1}{2}$ año $=6$ meses.

Rpta.: D

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



12

semana

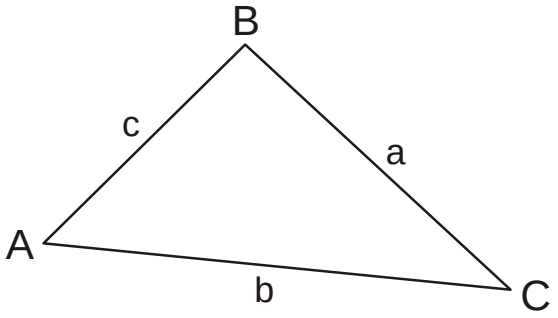
pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1) LEY DE SENOS



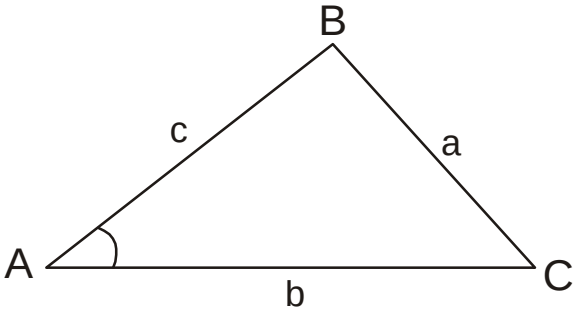
En todo triángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

NOTA: Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia y cumple

$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

2. LEY DE COSENOS



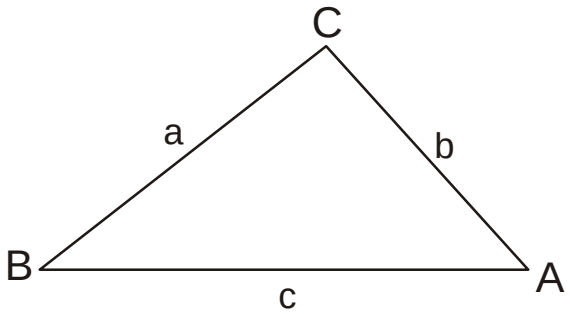
En un triángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de ellos multiplicado por el coseno del ángulo que forman.

Es decir, de la figura se tiene : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

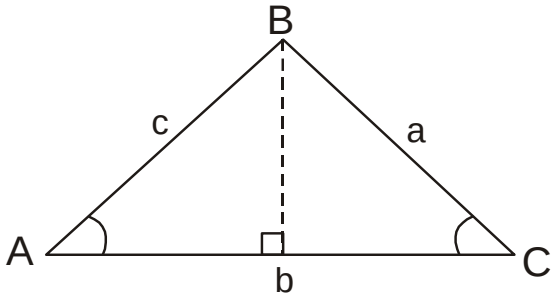
3. LEY DE TANGENTES



En todo triángulo, la suma de dos de sus lados es a su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos que se oponen a dichos lados es a la tangente de la semidiferencia de los mismos. Así, en la figura, se tiene:

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}, \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)} \qquad \text{y} \qquad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

4. LEY DE PROYECCIONES



En todo triángulo, cualquiera de sus lados se puede expresar como la suma de las proyecciones de los otros dos sobre este.

Es decir:

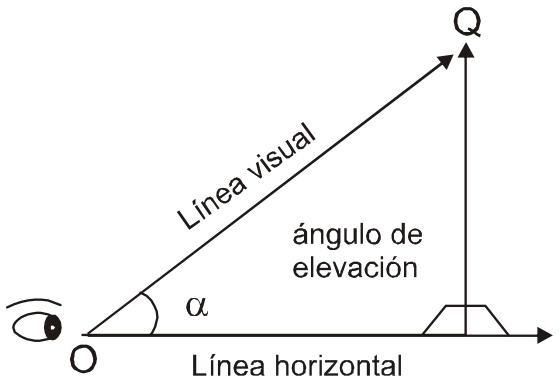
b = a cos C + c cos A

a = c cos B + b cos C

c = a cos B + b cos A

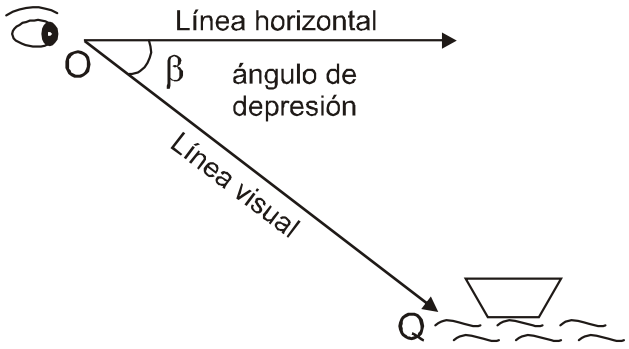
5. ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN

a) Ángulo de elevación



Línea visual: es la semirecta $\overrightarrow{OQ}$ trazada del punto de observación O hacia el punto observado Q.

b) Ángulo de depresión



Trigonometría

EJERCICIOS

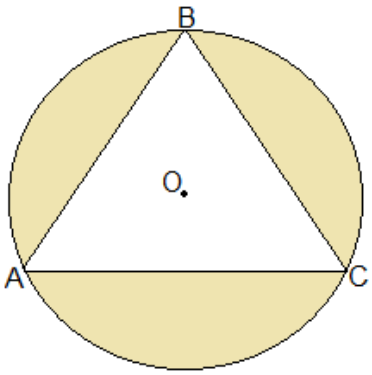
1. En la siguiente figura se representa una plazuela circular de centro O cuyo radio mide $\frac{25}{4}$ dam, se sabe lo siguiente: En la región sombreada se colocarán plantas ornamentales cuyo costo es $625\left(\text{sen}^2A+\text{sen}^2B+\text{sen}^2C\right)$ soles. Si la parte triangular ABC tiene un perímetro de 32 dam y la suma de sus productos de los lados tomados de dos en dos es 340 dam^2,¿cuánto es el costo por colocar las plantas ornamentales?

A) S/. 1 475

B) S/. 1 350

C) S/. 1 450

D) S/. 1 376

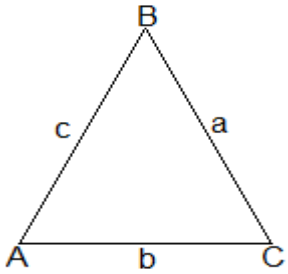


Solución:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

$$(32)^2=4\left(\frac{25}{4}\right)^2\left(\text{sen}^2A+\text{sen}^2B+\text{sen}^2C\right)$$

$$1376=625\left(\text{sen}^2A+\text{sen}^2B+\text{sen}^2C\right)$$



Rpta.: D

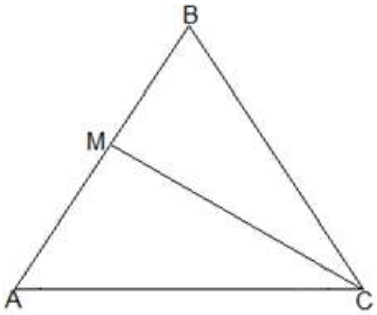
2. Un topógrafo usando un teodolito analizó un terreno de forma triangular ABC (figura adjunta) y observó que $2BC=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)AM$ y $m\measuredangle CAB=2m\measuredangle MCA=50°$. ¿Cuánto es la medida del ángulo ABC?

A) 65°

B) 55°

C) 60°

D) 70°

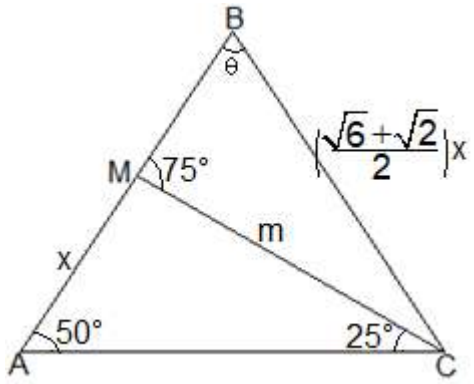


Solución:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{\text{sen}\theta} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}x}{\text{sen}75°} \\ \dfrac{m}{\text{sen}50°} = \dfrac{x}{\text{sen}25°} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\text{sen}75°}{\text{sen}\theta\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\text{sen}25°}{2\text{sen}25°\cos 25°}$$

$$\rightarrow \theta = 65° \ \vee \ \theta = 115°$$



Rpta.: A

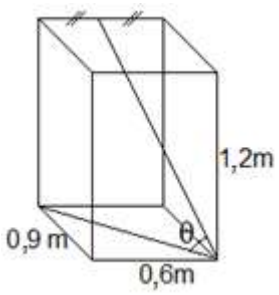
3. La empresa "CAJAS PERÚ" diseña y vende cajas que tienen la forma de un prisma rectangular, como se representa en la figura adjunta. Si el precio unitario es de $13\sqrt{2}\cos\theta$ soles y se venden 50 cajas, ¿cuánto es el ingreso de la empresa?

A) S/. 640

B) S/. 480

C) S/. 660

D) S/. 550

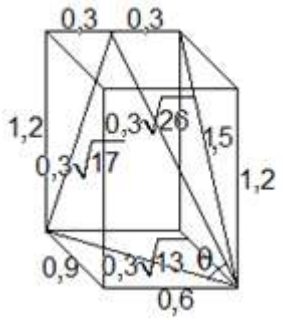


Solución:

$$\left(\sqrt{17}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{26}\right)^2 - 2\left(\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{26}\right)\cos\theta$$

$$\sqrt{2}\cos\theta = \frac{11}{13}$$

$$\text{Ingreso} = (11)(50) = 550$$

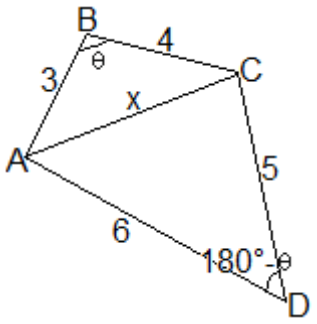


Rpta.: D

4. Dos hermanos se reparten un terreno que tiene forma de un cuadrilátero inscriptible ABCD, donde BC = 4 dam, AD = 6 dam, AB = 3 dam y CD = 5 dam . Si para ello hacen un muro recto que une los puntos A y C cuyo costo es de $7(AC)^2$ decenas de soles, ¿a cuánto asciende dicho costo?

A) S/. 2 640 B) S/. 2 850 C) S/. 2 300 D) S/. 2 470

Solución:



$$\begin{cases} x^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos\theta \\ x^2 = 6^2 + 5^2 - 2(6)(5)\cos(180° - \theta) \end{cases}$$

$$9 + 16 - 24\cos\theta = 36 + 25 + 60\cos\theta$$

$$\rightarrow \cos\theta = -\frac{3}{7}$$

$$\rightarrow \quad 7x^2 = 247$$

$$\rightarrow \quad 70x^2 = 2\ 470$$

Rpta.: D

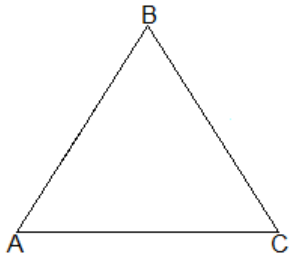
5. Un ingeniero usando un odómetro observó un terreno de forma triangular, representado por el triángulo ABC, anota que $AB = 16$ m, $AC = 14$ m y $\cot\frac{B}{2} = 33\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)$. Si el costo por metro lineal para enrejar el perímetro del terreno es de S/. 70, ¿cuánto costará enrejar el terreno?

A) S/. 3 290

B) S/. 4 410

C) S/. 4 550

D) S/. 3 570



Solución:

$*A + B + C = 180°$

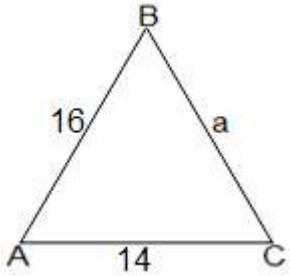
$$\frac{B}{2} = 90° - \left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$*\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}$$

$$\frac{a+16}{a-16} = \frac{\cot\frac{B}{2}}{\frac{1}{33}\cot\frac{B}{2}}$$

$$a = 17$$

$$\text{costo} = (47)(70) = S/.3\ 290$$



Rpta.: A

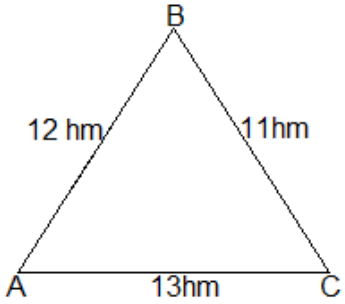
6. Dos socios compraron un terreno de forma triangular ABC, como se representa en la figura a un precio de $\dfrac{12\cos A\,\text{sen}A+11\cos C\,\text{sen}A}{12\text{sen}A\,\text{sen}B-13\text{sen}A\,\text{sen}C+\text{sen}B}$ decenas de miles de soles. Si ambos aportaron la misma cantidad de dinero, ¿cuánto aportó cada uno?

A) S/. 60 000

B) S/. 58 000

C) S/. 52 000

D) S/. 55 000



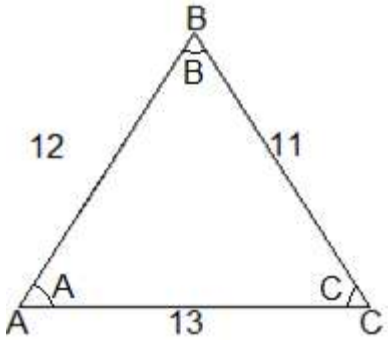
Solución:

$$P=\frac{12\cos A\,\text{sen}A+11\cos C\,\text{sen}A}{12\text{sen}A\,\text{sen}B-13\text{sen}A\,\text{sen}C+\text{sen}B}$$

$$P=\frac{(12\cos A+11\cos C)\text{sen}A}{(12\text{sen}B-13\text{sen}C)\text{sen}A+\text{sen}B}$$

$$P=13\frac{11}{13}\text{ decenas de miles}$$

$$\frac{P}{2}=S/.55\ 000$$



Rpta.: D

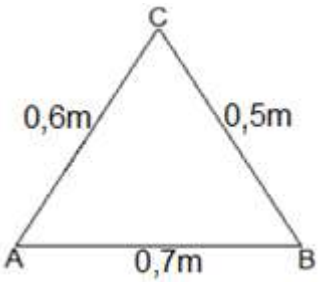
7. Una plancha de aluminio tiene la forma de un triángulo ABC, como se representa en la figura adjunta, en el mercado cada plancha tiene un precio de $\left(\dfrac{42}{5}\cos A+7\cos B+6\cos C\right)$ en decenas de soles. ¿Cuánto costará adquirir una decena de planchas?

A) S/. 1 000

B) S/. 1 250

C) S/. 1 100

D) S/. 1 300



Solución:

$$(0,7)^2 = (0,6)^2 + (0,5)^2 - 2(0,6)(0,5)\cos C$$

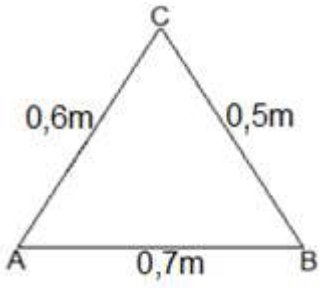
$$\cos C = \frac{1}{5}$$

$$P = 42\left(\frac{\cos A}{5} + \frac{\cos B}{6} + \frac{\cos C}{7}\right)\text{decenas de soles}$$

$$P = 42\left(\frac{6\cos A + 5\cos B}{30} + \frac{\cos C}{7}\right)\text{decenas de soles}$$

$$P = 110\,\text{soles} \Rightarrow \text{Una decena de planchas:}$$

$$\text{costará} = S/.1\,100$$



Rpta.: C

8. Sean A, B y C tres edificios ubicados de forma colineal (en ese orden), B tiene una altura de 10 m, C tiene una altura de 13 m y desde las partes más altas de A y C se observa la parte más alta del edificio B con ángulos de depresión α y β respectivamente donde $\tan\beta = \frac{3}{4}$, $\sec\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2}$ además $AB = BC$. Halle la altura del edificio A.

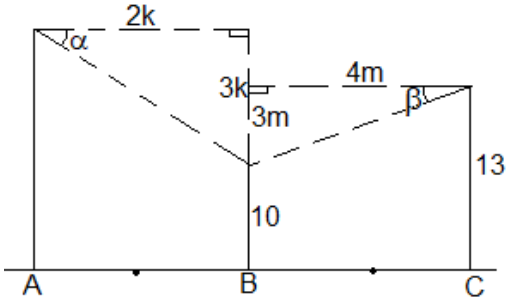
A) 18 m B) 15 m C) 16 m D) 19 m

Solución:

$*3m = 3 \rightarrow m = 1$

$*2k = 4 \rightarrow k = 2$

Edificio $A = 10 + 6 = 16m$



Rpta.: C

9. Don Hugo observó la azotea de un edificio con un ángulo de elevación α, luego avanzó hacia el edificio las cuatro quintas partes de la distancia que había inicialmente y volvió a observar la azotea ahora con un ángulo de elevación de 3α, calcular $7\tan^2\alpha$.

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 1

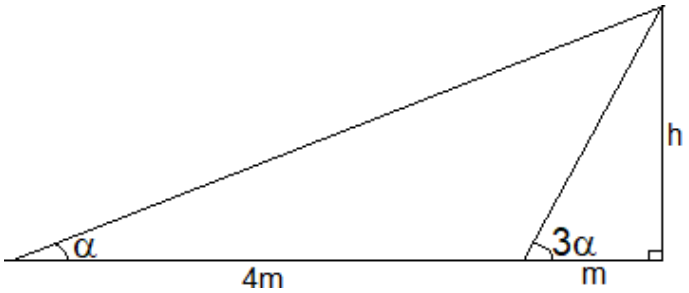
Solución:

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{h}{5m} \\ \tan 3\alpha = \dfrac{h}{m} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{5}\tan 3\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{5}\left(\frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}\right)$$

$$\tan\alpha = 0 \ \vee \ 7\tan^2\alpha = 1$$



Rpta.: D

10. Un atleta realizó el siguiente recorrido, partió de la estación A con dirección N70°E avanzando $20\sqrt{3}$ km hasta llegar a la estación B y finalmente recorrió cierta distancia en la dirección S5°E hasta llegar a la estación C, donde allí observó su posición inicial en la dirección N65°O. ¿Qué distancia hay desde la estación A hasta la estación C?

A) $10\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$km

B) $10\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$km

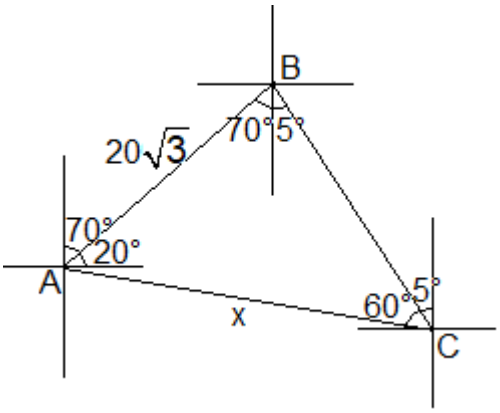
C) $12\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$km

D) $12\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$km

Solución:

$$\frac{x}{\text{sen}75°} = \frac{20\sqrt{3}}{\text{sen}60°}$$

$$x = 10\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\text{km}$$



Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

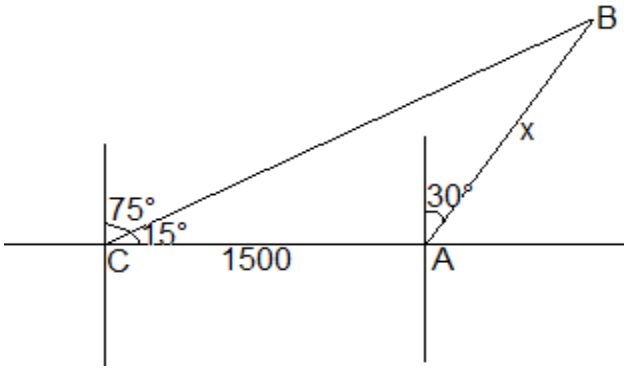
1. Desde la estación A se observan en las direcciones N30°E y oeste a las estaciones B y C respectivamente. Si desde A hasta C hay una distancia de 1500 m y B se encuentra respecto de C en la dirección N75°E, ¿cuánto mide la distancia de A hasta B?

A) $800\left(\sqrt{3}-1\right)$ m
B) $750(\sqrt{3}-1)$ m
C) $800(\sqrt{3}+1)$ m
D) $750(\sqrt{3}+1)$ m

Solución:

$$\frac{x}{\text{sen}15°}=\frac{1500}{\text{sen}45°}$$

$$x=750\left(\sqrt{3}-1\right)\text{m}$$



Rpta.: B

2. Dos embarcaciones partieron simultáneamente del mismo puerto, siguiendo las direcciones NθE y S2θE; luego de recorrer distancias de 48 km y 15 km respectivamente. Si se encuentran distanciadas 57 km, determine el rumbo seguido por la segunda embarcación.

A) S60°E
B) S30°E
C) S20°E
D) S40°E

Solución:

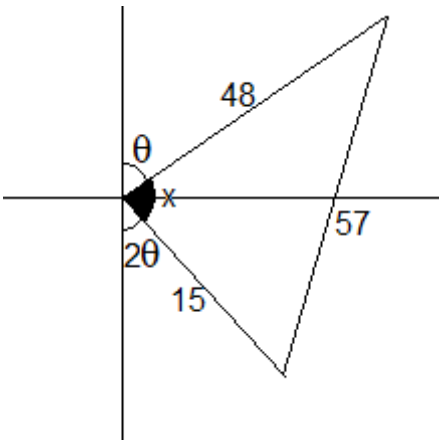
$$(57)^2=(15)^2+(48)^2-2(15)(48)\cos x$$

$$\cos x=-\frac{1}{2}$$

$$x=120°$$

$$\theta=20°$$

S40°E



Rpta.: D

3. Un terreno tiene la forma de una región triangular ABC $(AB = c\ u,\ BC = a\ u,\ AC = b\ u)$. Halle el perímetro del terreno, si se cumple que $a\cos^2\frac{B}{2} + b\cos^2\frac{A}{2} = 6\cos 40°\csc 30°\csc 50°$.

A) 12 u B) 18 u C) 24 u D) 26 u

Solución:

$$a\cos^2\frac{B}{2} + b\cos^2\frac{A}{2} = 12$$

$$a\left(\frac{\cos B + 1}{2}\right) + b\left(\frac{\cos A + 1}{2}\right) = 12$$

$$a + b + c = 24\ u$$

Rpta.: C

4. Desde un punto P en la parte más alta de un edificio se observa un punto M en el suelo con un ángulo de depresión de 45° a una distancia de $40\left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$dam, también se observa (en el mismo lado) otro punto N en el suelo con un ángulo de depresión de 15°. Si P, M y N son puntos coplanares, ¿cuánto mide la distancia desde M hasta N?

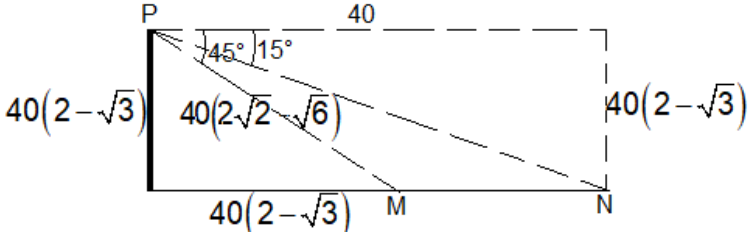
A) $40\left(\sqrt{3} - 1\right)$ dam B) $20\left(\sqrt{3} - 1\right)$ dam

C) $20\left(\sqrt{3} + 1\right)$ dam D) $40\left(\sqrt{3} + 1\right)$ dam

Solución:

$$MN = 40 - 40\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$MN = 40\left(\sqrt{3} - 1\right)\ \text{dam}$$



Rpta.:A

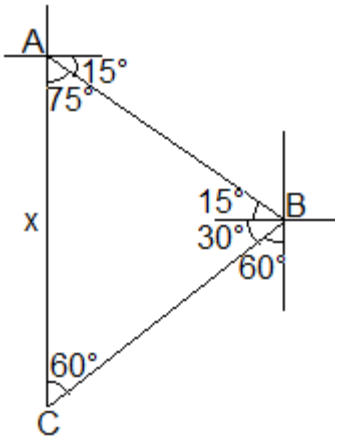
5. Un móvil partió del punto A con dirección S75°E, avanzando $90\sqrt{6}$ km hasta llegar al punto B, luego avanzó cierta distancia en la dirección S60°O hasta el punto C, que está situado al sur de A. ¿Cuánto mide la distancia desde A hasta C?

A) 160 km B) 200 km C) 180 km D) 210 km

Solución:

$$\frac{x}{\text{sen}45°} = \frac{90\sqrt{6}}{\text{sen}60°}$$

$x = 180$ km



Rpta.: C

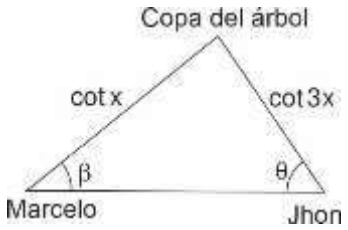
Trigonometría

EJERCICIOS

1. Marcelo y John observan la copa de un árbol con ángulos de elevación β y θ respectivamente, ubicándose en posiciones opuestas respecto al árbol y en un mismo plano con el árbol. Además, Marcelo y John se encuentran a una distancia de $\cot x$ y $\cot 3x$ en metros respectivamente de la copa del árbol (3x agudo), sabiendo que $\cos 2x = \frac{k}{2}$ $(k \neq 1)$, determine el valor de $\text{sen}\theta \csc\beta$ en términos de k.

A) $\frac{k-1}{k+1}$ B) $\frac{k+1}{k-1}$

C) $\frac{2k+1}{k-1}$ D) $\frac{k+1}{2k-1}$



Solución:

Ley de senos

$$\frac{\cot 3x}{\text{sen}\beta} = \frac{\cot x}{\text{sen}\theta} \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\beta} = \frac{\cot x}{\cot 3x} = \frac{2\cos(2x)+1}{2\cos(2x)-1} = \frac{k+1}{k-1}$$

Rpta.: B

2. Un satélite que orbita la tierra pasa arriba de las estaciones de observación en las ciudades de Phoenix y Los Ángeles, separadas 340 millas. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, es observado de manera simultánea desde Phoenix y Los Ángeles con ángulos de elevación de $60°$ y $75°$ respectivamente. Determine la distancia entre el satélite y Los Ángeles en ese instante.

A) $170\sqrt{6}$ millas B) $150\sqrt{3}$ millas

C) $160\sqrt{5}$ millas D) $180\sqrt{7}$ millas

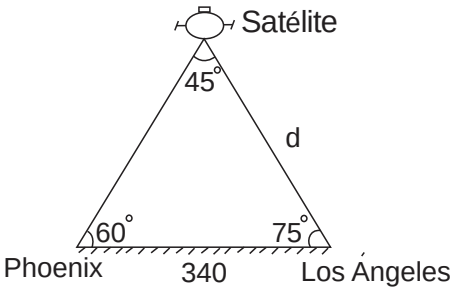
Solución:

Ley de senos

$$\frac{d}{\text{sen}60°} = \frac{340}{\text{sen}45°} \Rightarrow d = \frac{340\text{sen}60°}{\text{sen}45°}$$

$$d = \frac{340\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$\therefore\ d = 170\sqrt{6}$ millas.



Rpta.: A

3. El coseno del mayor ángulo de un triángulo cuyas longitudes de sus lados están representados por tres números enteros y consecutivos, es igual a $\frac{1}{5}$ Calcule el perímetro de dicho triangulo.

A) 28 m B) 20 m C) 25 m D) 18 m

Solución:

Ley de cosenos, sea θ el mayo ángulo, con $\cos\theta = \frac{1}{5}$ y los lados $(n-1)$, n ,$(n+1)$

$(n+1)^2 = (n-1)^2 + n^2 - 2(n-1)n\cos\theta$

$\Rightarrow -3n^2 + 18n = 0 \Rightarrow n(3n-18) = 0 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow \text{perímetro} = 5+6+7 = 18$

Rpta.: D

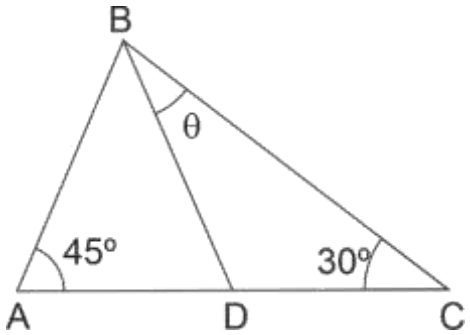
4. Carlos ubicado en el punto A observa la parte más alta de un poste con un ángulo de elevación de 45° (el poste DB está inclinado). Andrés que se encuentra al otro lado del poste en el punto C, colineal con el punto A observa también la parte más alta del poste con un ángulo de elevación de 30°. Si AB = DC, halle $G = 5\tan\theta$.

A) $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

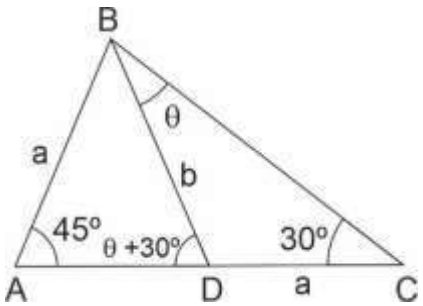


Solución:

Ley de senos

$\Delta DBC: \ \frac{a}{\text{sen}\theta} = \frac{b}{\text{sen}30^o} \Rightarrow a = 2b\text{sen}\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{a}{2b}$

$\Delta ABC: \ \frac{a}{\text{sen}(\theta+30^o)} = \frac{b}{\underbrace{\text{sen}45^o}_{\sqrt{2}/2}} \Rightarrow \text{sen}(\theta+30^o) = \frac{\sqrt{2}a}{2b}$



$\text{sen}\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}a}{2b} \Rightarrow \cos\theta = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})a}{2b}$ ($\frac{a}{2b}$)

$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2b}}{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2b}} = \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5} \Rightarrow G = 5\tan\theta = 2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Rpta.: A

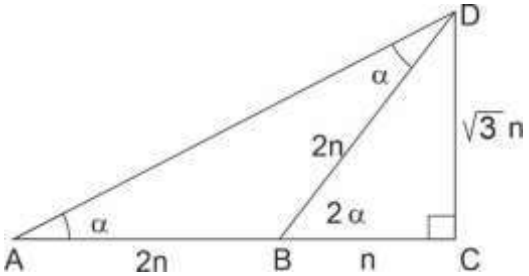
5. Nandito está frente a un edificio y observa la parte más alta con un ángulo de elevación α, se acerca al edificio y nuevamente observa la parte más alta con ángulo de elevación que es el doble del anterior, la distancia horizontal hacia el edificio de la observación inicial es a la distancia horizontal hacia el edifico de la segunda observación como 3 es a 1. Halle $\tan\alpha$.

A) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Solución:

$AC = 3n \Rightarrow AB = 2n$ y $BC=n$; $\measuredangle DBC = 2\measuredangle DAB \Rightarrow \Delta ABD$: isóseles

ΔBCD de 30° y 60° y $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}n}{3n} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Rpta.: B

6. El pueblo A está a 2 km al norte del pueblo B, la orientación del pueblo C desde A y B es N42°E y N28°E respectivamente. Si un automóvil parte de A hacia B haciendo escala en C, ¿qué distancia ha recorrido?

A) 2cos55°csc7° B) 2sen46°
C) 2sen55°sec14° D) 2cos50°sec28°

Solución:

Ley de senos: $\measuredangle CAB = 138^o$ y $\measuredangle BCA = 14^o$

$$\frac{2}{sen14^o} = \frac{AC}{sen28^o} = \frac{BC}{sen138^o}$$

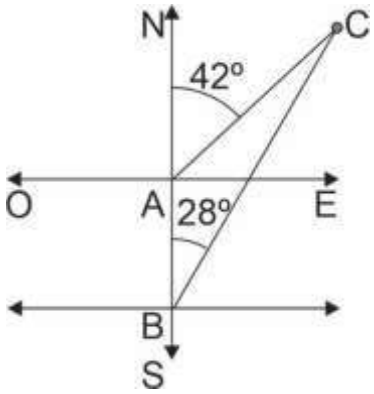
$$AC = \frac{2sen28^o}{sen14^o} = 4\cos14^o \text{ y } BC = \frac{2sen138^o}{sen14^o}$$

Distancia recorrida $d = AC + CB$

$$d = 4\cos14^o + \frac{2sen138^o}{sen14^o} = \frac{4sen14^o\cos14^o + 2sen138^o}{sen14^o}$$

$$\frac{2(sen28^o + sen138^o)}{sen14^o} = \frac{4sen83^o\cos55^o}{sen14^o}$$

$$= \frac{4\cos7^o\cos55^o}{2sen7^o\cos7^o} = 2\cos55^o\csc7^o$$



Rpta.: A

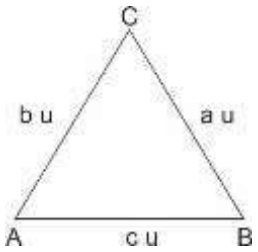
7. En el punto A de la figura mostrada se encuentra un topógrafo con su teodolito, este registra que el área del terreno triangular ABC es $\dfrac{(2a-2b\cos C)\tan B\,\text{sen}C}{b\,\text{sen}^2(A+B)}\,\text{km}^2$. Si dicho terreno se dividirá en dos partes iguales. Halle el área de cada parte.

A) $1\,\text{km}^2$

B) $2\,\text{km}^2$

C) $3\,\text{km}^2$

D) $4\,\text{km}^2$



Solución:

Ley de proyecciones: $a = b\cos C + c\cos B$

Ley de senos:

$$\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \text{ y } S = \frac{(2a-2b\cos C)\tan B\,\text{sen}C}{b\,\text{sen}^2(A+B)}$$

$$= \frac{2(a-b\cos C)\tan B\,\text{sen}C}{b\,\text{sen}^2(A+B)} = \frac{2c\cos B\tan B\,\text{sen}C}{b\,\text{sen}^2(A+B)}$$

$$= \frac{2c\,\text{sen}B\,\cancel{\text{sen}C}}{b\underbrace{\text{sen}^2(A+B)}_{\text{sen}^2C}} = \frac{2\cancel{c\,\text{sen}B}}{\underbrace{b\,\text{sen}C}_{c\,\text{sen}B}} = 2 \Rightarrow S = 2\text{km}^2 \Rightarrow \text{Cada parte } S_1 = 1\text{km}^2$$

Rpta.: A

8. Los lados de un triángulo ABC, son tales que AB=cu, BC=au, CA=bu. Si $\dfrac{c\,\text{sen}A + a\,\text{sen}A - a\,\text{sen}C - b\,\text{sen}B}{c\,\text{sen}B} - \dfrac{\text{sen}C}{\text{sen}B} = -\text{sen}^2\left(\dfrac{A+B+C}{6}\right)$, halle $\cos A$.

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $-\dfrac{1}{2}$ C) $-\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{8}$

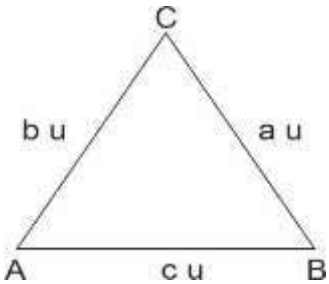
Solución:

Ley de senos

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \Rightarrow a\,\text{sen}B = b\,\text{sen}A \wedge c\,\text{sen}A = a\,\text{sen}C$$

$$c\,\text{sen}B = b\,\text{sen}C \wedge \frac{\text{sen}C}{\text{sen}B} = \frac{c}{b} \wedge \frac{\text{sen}A}{\text{sen}C} = \frac{a}{c}$$

Entonces



$$\frac{asenA - bsenB}{\underbrace{csenB}_{bsenC}} - \frac{c}{b} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{asenA}{bsenC} - \frac{bsenB}{bsenC} - \frac{c}{b} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\frac{b}{b} - \frac{c}{b}\frac{c}{c} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\overbrace{a^2 - b^2 - c^2}^{-2bc\cos A}}{bc} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{8}$$

Rpta.: D

9. En una plazoleta de forma triangular ABC, cuyos lados miden BC=30 m, CA=50 m y AB=70 m. Si por pintar cada metro cuadrado se paga 10 soles, ¿cuánto se paga por pintar toda la superficie de la plazoleta?

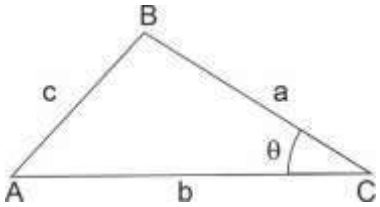
A) $3750\sqrt{3}$ soles
B) $3900\sqrt{3}$ soles
C) $3509\sqrt{3}$ soles
D) $3590\sqrt{3}$ soles

Solución:
Ley de cosenos

$$70^2 = 30^2 + 50^2 - 2(30)(50)\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{30^2 + 50^2 - 70^2}{2(30)(50)}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^0 \Rightarrow sen120^o = sen60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

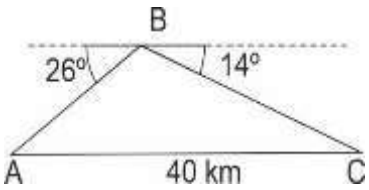
$$Gasto = 10\frac{soles}{m^2} \times \frac{1}{2}(30)(50)\frac{\sqrt{3}}{2}m^2 = 3750\sqrt{3} \text{ soles}$$



Rpta.: A

10. Un helicóptero viaja de una ciudad a otra, distantes entre sí, en 40 Km. En un determinado momento, los ángulos que forman las visuales, desde el helicóptero hacia las ciudades con la horizontal, primera ciudad 26º y segunda ciudad 14º. ¿Qué distancia hay en ese momento entre el helicóptero y la primera ciudad en ese instante?

A) $\frac{20sen26^o}{sen40^o}$ m
B) $\frac{40sen26^o}{sen40^o}$ m
C) $\frac{20sen14^o}{sen40^o}$ m
D) $\frac{40sen14^o}{sen40^o}$ m



Solución:

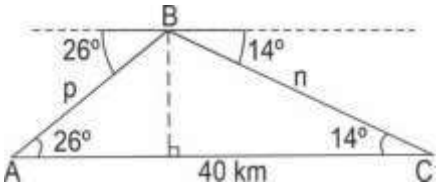
$\measuredangle ABC = 140^o$

Ley de senos

$$\frac{40}{sen140^o} = \frac{p}{sen14^o} = \frac{n}{sen26^o}$$

Entonces

$$AB = p = \frac{40sen14^o}{sen40^o}$$



Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

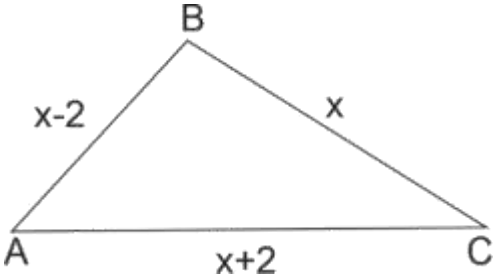
1. Se ha recortado una cartulina en forma de un triángulo ABC como se muestra en la figura, se definen los números $N = \tan\left(\frac{A+C}{2}\right) + \tan\left(\frac{A-C}{2}\right)$ y $D = \tan\left(\frac{A+C}{2}\right) - \tan\left(\frac{A-C}{2}\right)$. Si x satisface la siguiente expresión $x^2 - 10x + 25 = 0$, determine la razón entre N y D.

A) $\frac{2}{5}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{2}{3}$



Solución:

$$x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow AB = 3; BC = 5, CA = 7$$

Ley de tangentes

$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}} = \frac{5+3}{5-3} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{N}{D} = \frac{\tan\frac{A+C}{2} + \tan\frac{A-C}{2}}{\tan\frac{A+C}{2} - \tan\frac{A-C}{2}} = \frac{5}{3}$$

Rpta.: C

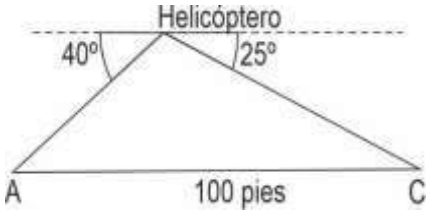
2. Desde un helicóptero se localizan en un instante en los puntos A y C a dos personas, con ángulos de depresión 25° y 40° como se ilustra en la figura. Si los observadores están separados entre sí 100 pies y el helicóptero está sobre la línea que los une, ¿a qué altura está el helicóptero?

A) $\dfrac{100}{\cot 40^o + \cot 25^o}$ pies

B) $\dfrac{100}{\tan 40^o + \cot 25^o}$ pies

C) $\dfrac{200}{\cot 40^o + \cot 25^o}$ pies

D) $\dfrac{100}{\cot 40^o - \cot 25^o}$ pies

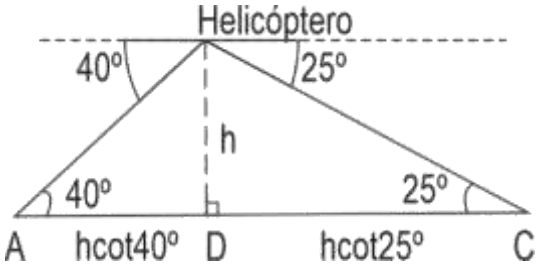


Solución:

$AD = h\cot 40^o \wedge DC = h\cot 25^o$

$h\cot 40^o + h\cot 25^o = 100$

$h = \dfrac{100}{\cot 40^o + \cot 25^o}$



Rpta.: A

3. Desde una superficie horizontal base de una colina, Claudio observa y mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto de la colina con respecto a la horizontal y obtiene 43º; retrocede 10 m en trayectoria recta, se detiene y mide un nuevo ángulo para el mismo punto, obteniendo un resultado de 35º, determine la altura de la colina.

A) $20\text{sen}35^o \csc 8^o \text{sen}43^o$ m

B) $10\csc 35^o \csc 8^o \text{sen}43^o$ m

C) $30\text{sen}35^o \csc 8^o \text{sen}43^o$ m

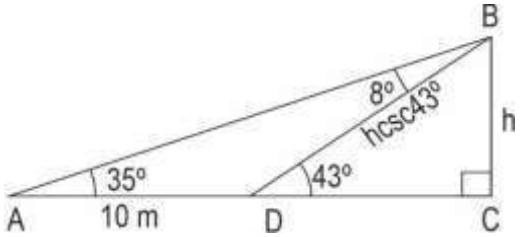
D) $10\text{sen}35^o \csc 8^o \text{sen}43^o$ m

Solución:

$DB = h\csc 43^o$

$\dfrac{10}{\text{sen}8^o} = \dfrac{h\csc 43^o}{\text{sen}35^o} \Rightarrow h = \dfrac{10\text{sen}35^o}{\text{sen}8^o \csc 43^o}$

$h = 10\text{sen}35^o \csc 8^o \text{sen}43^o$



Rpta.: D

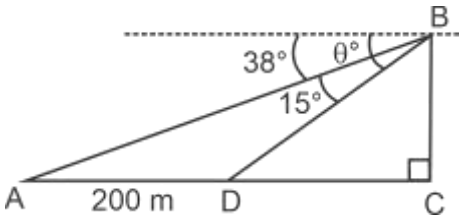
4. Desde un acantilado en un instante se observa un barco en el punto con un ángulo de depresión de θº. Cuando el barco se ha alejado 200 m adicionales, el nuevo ángulo de depresión es de 38º. Halle el triple de la distancia a la que se encontraba el barco del acantilado originalmente. $\left(\sec\theta = \frac{5}{3}\right)$

A) $120(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{sen}38^{o}$ m

B) $1200(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{sen}38^{o}$ m

C) $360\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\text{sen}38^{\circ}$ m

D) $100(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{sen}38^{o}$ m



Solución:

Sea $DC = x \Rightarrow DB = x\sec\theta$

Ley de senos

$$\frac{x\sec\theta}{\text{sen}38^{\circ}} \frac{200}{\text{sen}15^{o}} \Rightarrow x = \frac{200\text{sen}38^{o}}{\text{sen}15^{o}\sec\theta}$$

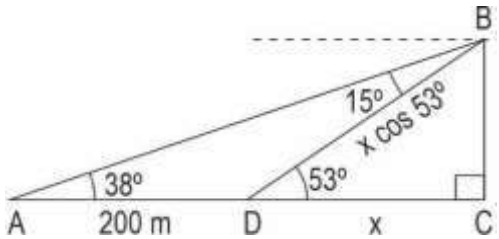
$$x = 200\text{sen}38^{o}\csc 15^{o}\cos\theta$$

$$= 200\text{sen}38^{o} \times \left(\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right) \times \frac{3}{5}$$

$$3x = 1000(\sqrt{6}+\sqrt{2})\text{sen}38^{o}$$

Entonces $x = 120\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\text{sen}38^{\circ}$

Asi $3x = 360\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\text{sen}38^{\circ}$



Rpta.: C

5. En un terreno de forma triangular ABC, tiene como medidas AB=30m, BC=50m, y CA=70m. Si $P = \frac{\text{sen}(A+B)}{\text{sen}A} + \frac{\text{sen}(A+C)}{\text{sen}C} + \frac{\text{sen}(B+C)}{\text{sen}B}$, determine el valor de P.

A) $\frac{383}{105}$ B) $\frac{105}{383}$ C) $\frac{383}{150}$ D) $\frac{383}{103}$

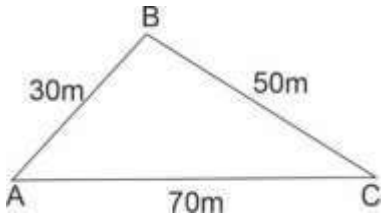
Solución:

$A + B + C = 180^{o}$

Ley de senos

$$\frac{30}{\text{sen}C} = \frac{50}{\text{sen}A} = \frac{70}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{\text{sen}C}{\text{sen}A} = \frac{3}{5} \wedge \frac{\text{sen}B}{\text{sen}C} = \frac{7}{3} \wedge \frac{\text{sen}A}{\text{sen}B} = \frac{5}{7}$$

$$P = \frac{\text{sen}(A+B)}{\text{sen}A} + \frac{\text{sen}(A+C)}{\text{sen}C} + \frac{\text{sen}(B+C)}{\text{sen}B}$$
$$= \frac{\text{sen}C}{\text{sen}A} + \frac{\text{sen}B}{\text{sen}C} + \frac{\text{sen}A}{\text{sen}B}$$
$$= \frac{3}{5} + \frac{7}{3} + \frac{5}{7} = \frac{383}{105}$$

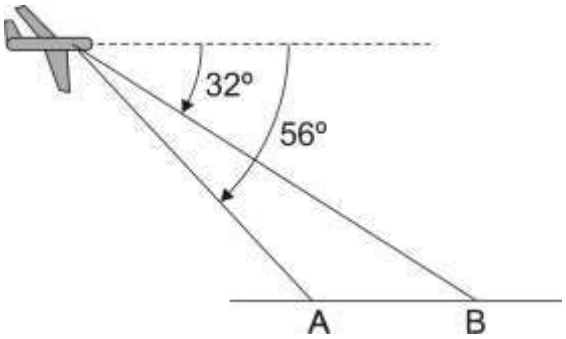


Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Un avión vuela horizontalmente, en el instante mostrado observa los puntos A y B al nivel del suelo con ángulos de depresión de 56º y 32º respectivamente. Si los puntos A y B están separados por 4,3 km. Determinar la distancia desde el punto A hacia el avión en el instante mostrado. Si $\frac{\text{sen}32^o}{\text{sen}24^o} = 1{,}3$



A) 5,59 km

B) 6,15 km

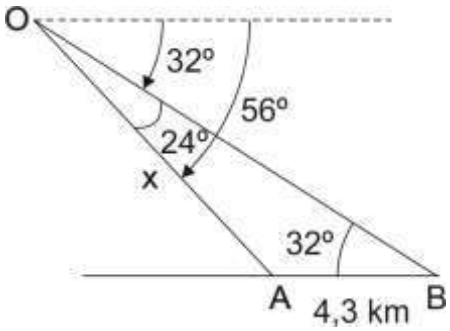
C) 5,61 km

D) 6,51 km

E) 6,55 km

Solución:

ΔOAB : Ley de senos



$$\frac{x}{\text{sen}32^o} = \frac{4{,}3}{\text{sen}24^o}$$

$$x = 4{,}3\frac{\text{sen}32^o}{\text{sen}24^o}$$

$$x = 4{,}3(1{,}3) = 5{,}59 \text{ km.}$$

Rpta.: A

2. Desde lo alto de un faro a 300m de altura, se observa un barco que se aleja con ángulo de depresión α y media hora más tarde se observa en la misma dirección al barco con un ángulo de depresión β. Si $\text{sen}\alpha = \frac{15}{17}$ y $\cos\beta = \frac{12}{13}$, determine la rapidez del barco en km/h

A) 5,60 km/h B) 7,00 km/h C) 7,50 km/h
D) 9,00 km/h E) 1,12 km/h

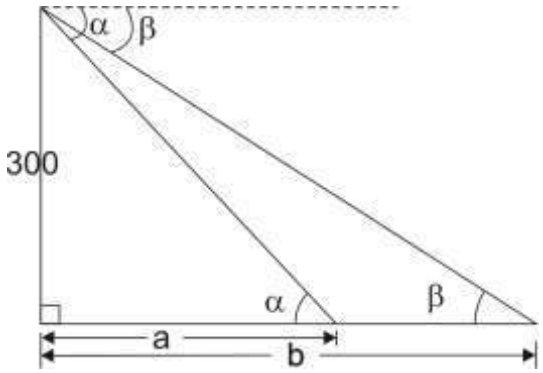
Solución:

Si $\text{sen}\alpha = \frac{15}{17} \rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{15}{8} = \frac{300}{a} \rightarrow a = 160$

Si $\cos\beta = \frac{12}{13} \rightarrow \text{tg}\beta = \frac{5}{12} = \frac{300}{b} \rightarrow b = 720$

$$v = \frac{e}{t} = \frac{720-160}{0{,}5h} = \frac{560m}{0{,}5h}$$

$$v = 1{,}12\frac{km}{h}$$



Rpta. : E

3. En la figura, una persona de altura h ubicada en el punto P observa los puntos A y C con ángulos de depresión θ y ϕ respectivamente, luego observa el punto B con ángulo de elevación , calcule $\operatorname{tg} x$

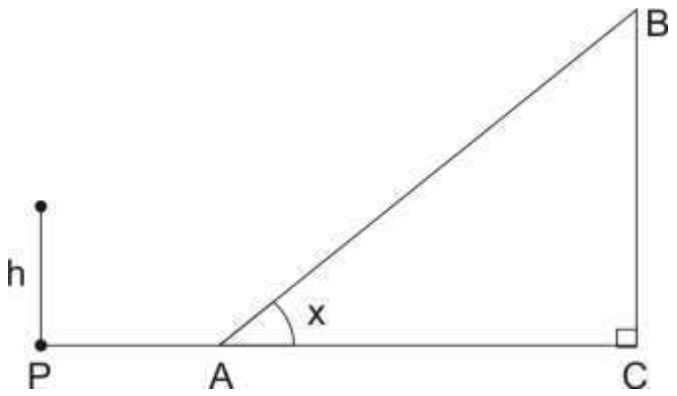
A) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\phi\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\phi-\operatorname{ctg}\theta}$

B) $\dfrac{\operatorname{tg}\phi+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\phi-\operatorname{ctg}\theta}$

C) $\operatorname{ctg}\phi\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\theta$

D) $\dfrac{\operatorname{ctg}\phi+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\phi-\operatorname{ctg}\theta}$

E) $\operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\theta$



<u>Solución</u>:

$PE = h \quad \Rightarrow \quad PA = h\operatorname{ctg}\theta$

$\Delta EHC: HC = h \ ; \ HE = h\operatorname{ctg}\phi$

$AC = h(\operatorname{ctg}\phi - \operatorname{ctg}\theta)$

$\Delta EHB:$

$HB = h\operatorname{ctg}\phi\operatorname{tg}\beta$

$BC = h(1+\operatorname{ctg}\phi\operatorname{tg}\beta)$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1+\operatorname{ctg}\phi\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\phi-\operatorname{ctg}\theta}$

Rpta.: A

4. En el triángulo ABC, AC=BD. Si $2\operatorname{sen}7\theta\cos 3\theta = \operatorname{sen}10\theta + \operatorname{sen}4\theta$, halle el valor de θ

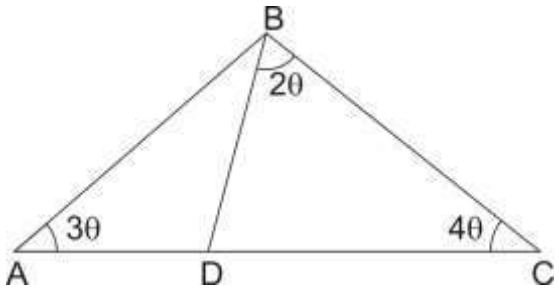
A) 10º

B) 30º

C) 50º

D) 18º

E) 36º



Solución:

$$\Delta ABD: \frac{c}{sen6\theta} = \frac{b}{sen3\theta}$$

$$\Delta ABC: \frac{b}{sen(180^o - 7\theta)} = \frac{c}{sen4\theta}$$

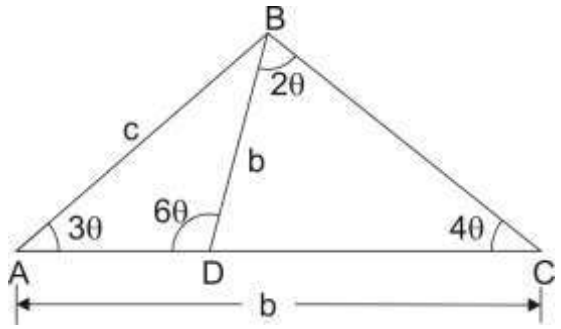
$$\Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{sen3\theta}{sen6\theta} = \frac{sen7\theta}{sen4\theta}$$

$$sen3\theta sen4\theta = sen7\theta sen6\theta$$

$$sen3\theta sen4\theta = sen7\theta s(2sen3\theta \cos 3\theta)$$

$$sen4\theta = 2sen7\theta s\cos 3\theta = sen10\theta + sen4\theta$$

$$sen10\theta = 0 \Rightarrow 10\theta = 180^o \Rightarrow \theta = 18^o$$



Rpta: D

5. Determinar la altura de un acantilado sabiendo que desde un punto en el plano de la base se ve la parte mas alta con un ángulo de elevación de 45º y a 30m más cerca de la base, el ángulo de observación es 60º

A) $(45+15\sqrt{3})m$ B) $(15+2\sqrt{3})m$ C) $(45+20\sqrt{3})m$
D) $(20+15\sqrt{3})m$ E) $(25+\sqrt{3})m$

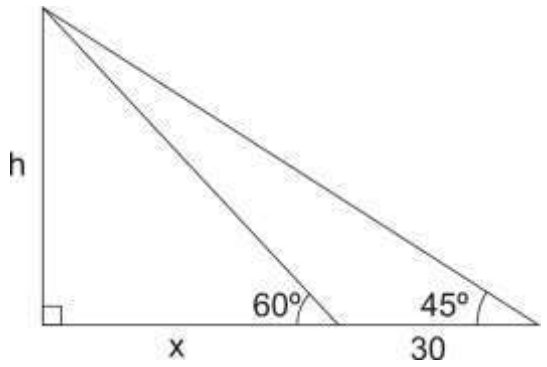
Solución:

$$tg60^o = \frac{h}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$tg45^o = \frac{h}{x+30} = 1 \Rightarrow h = x + 30$$

$$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 30 \Rightarrow h(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 30$$

$$h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}) = 45 + 15\sqrt{3}$$



Rpta.: A

6. En el triángulo ABC AB=cu, BC=au, CA=bu. Hallar el valor de la expresión $\frac{a^3b\cos C - b^4 + a^3c\cos B}{c^2 + 2ab\cos C}$

A) $a^2 + b^3$ B) $a^2 - b^3$ C) $a^2 - b^2$ D) $a^3 - b^3$ E) $a^2 + b^3$

Solución: β

$$E=\frac{a^3b\cos C-b^4+a^3c\cos B}{c^2+2ab\cos C}=\frac{a^3(b\cos C+c\cos B)-b^4}{c^2+2ab\cos C}$$

Ley de cosenos: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ y ley de proyecciones $a=b\cos C+c\cos B$

$$E=\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=a^2-b^2$$

Rpta.: C

7. Una antena de telefonía celular de $20\,m$ se instala en la meseta de una montaña. Después de una semana de vientos muy fuertes, esta sufre una inclinación como se aprecia en la figura, de tal manera que AD//BC y $BC=10\,m$. Si desde la base técnica ubicada en A, se divisa el punto más alto de la antena con un ángulo de elevación de 60°, halle el valor de $(\sqrt{13}+1)\csc\beta$, donde es el ángulo de inclinación de la antena, respecto del horizonte.

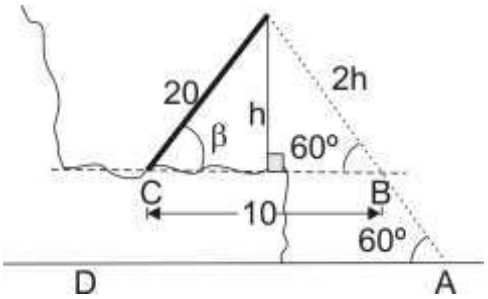
A) 2

B) 8

C) 4

D) 6

E) 7



Solución:

$$20^2=10^2+4h^2-2(10)(2h)(\frac{1}{2})$$

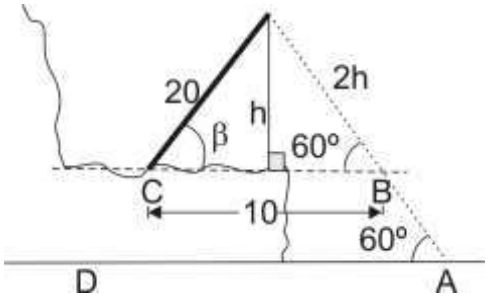
$$4h^2-20h+(30)(-10)=0\Rightarrow h^2-5h-3(25)=0$$

$$\Rightarrow\ (h-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2-3(25)=0$$

$$(h-\frac{5}{2})^2=25(\frac{13}{4})\Rightarrow h=\frac{5}{2}(\sqrt{13}+1)$$

$$\csc\beta=\frac{20}{h}=\frac{20}{\frac{5}{2}(\sqrt{13}+1)}=\frac{8}{(\sqrt{13}+1)}$$

$$E=(\sqrt{13}+1)\csc\beta=8$$



Rpta.: B

8. En el triángulo ABD halle el valor de: $E = 9\dfrac{\text{Sen}\alpha}{\text{Sen}\beta}$; si AB=5cm, BD=3cm, AC=3cm, CD=4cm

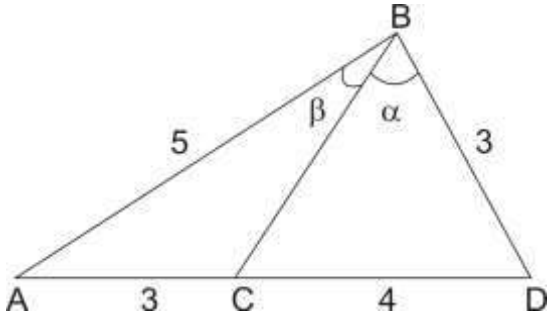
A) 10

B) 30

C) 45

D) 20

E) 40



<u>Solución</u>:

Ley de senos

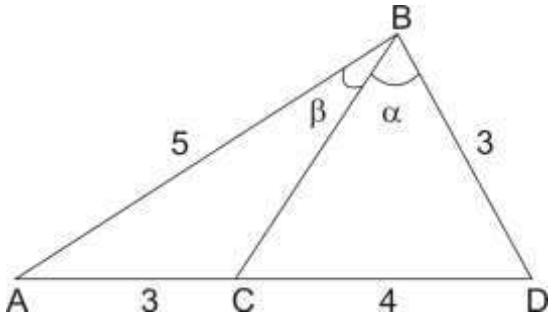
$\Delta ABC: \dfrac{3}{\text{sen}\beta} = \dfrac{5}{\text{sen}\theta} \Rightarrow \text{sen}\theta = \dfrac{5}{3}\text{sen}\beta$

$\Delta CBD: \dfrac{4}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{3}{\text{sen}\gamma} \Rightarrow \text{sen}\gamma = \dfrac{3}{4}\text{sen}\alpha$

$\Rightarrow \theta + \gamma = 180^o$

$\Rightarrow \text{sen}\theta = \text{sen}(180^o - \gamma) = \text{sen}\gamma$

$\Rightarrow \dfrac{5}{3}\text{sen}\beta = \dfrac{3}{4}\text{sen}\alpha \Rightarrow E = 9\dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} = 20$



Rpta.: D

9. En un triángulo ABC, se cumple que $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$. Calcule la medida del ángulo "A".

A) 45º B) 60º C) 150º D) 75º E) 15º

<u>Solución</u>:

De la condición: $([b+c]+a)([b+c]-a) = 3bc$

$\Rightarrow [b+c]^2 - a^2 = 3bc \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 - a^2 = 3bc$

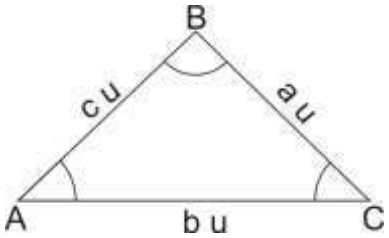
$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$

Ley de cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\Rightarrow 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 = bc$

$\cos A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 60^o$



Rpta.: B

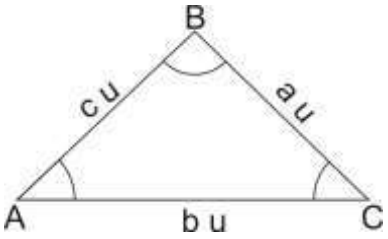
10. Considerando el triángulo ABC de la figura, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

i) $tg(A+B)=tgC$
ii) $sen(B+C)=-senA$
iii) Si $c=3cm,\ a=5cm,\ b=9cm$ entonces el triángulo no existe

A) VVV D) VFV

B) FFF E) FVF

C) FFV



Solución:

$A+B+C=180^o$

i) $tg(A+B)=tg(180^o-C)=-tgC$ F
ii) $sen(B+C)=sen(180^o-A)=senA$ F
iii) El triángulo existe si $a-c<b<a+c$
$2<b<8$, el triángulo no existe V

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el triángulo ABC, AB=5 cm y BC = 4cm. Halle el área de la región sombreada ACD

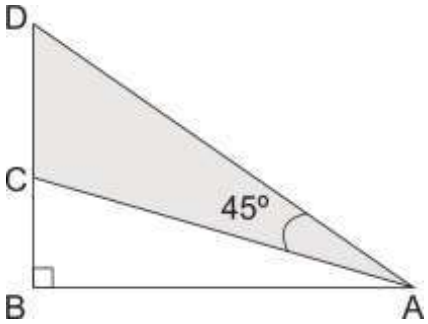
A) 152,5 cm^2

B) 122,5 cm^2

C) 125,5 cm^2

D) 112,5 cm^2

E) 102,5 cm^2



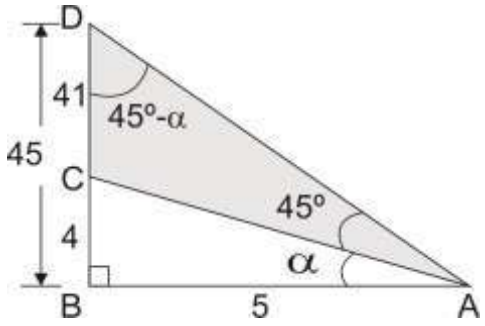
Solución:

$$\frac{DB}{sen(45+\alpha)}=\frac{5}{sen(45-\alpha)}$$

$$\Rightarrow DB = \frac{5(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\alpha)}{(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\alpha)} = 5\frac{(\cos\alpha + \text{sen}\alpha)}{\cos\alpha - \text{sen}\alpha}$$

$$DB = 5\frac{(\frac{5}{\sqrt{41}} + \frac{4}{\sqrt{41}})}{(\frac{5}{\sqrt{41}} - \frac{4}{\sqrt{41}})} = 45$$

$$S_{ACD} = \frac{45(5)}{2} - \frac{4(5)}{2} = \frac{205}{2} = 102{,}5\,cm^2$$



Rpta.: E

2. Los rayos del sol hacen un ángulo de 23º con la horizontal, cual es longitud de la sombra que proyecta un árbol de 20 pies de altura?

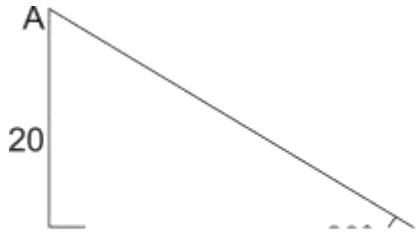
A) $20ctg23^o$

B) $10ctg23^o$

C) $23ctg20^o$

D) $20ctg46^o$

E) $5ctg23^o$



<u>Solución</u>:

$$tg23^o = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 20ctg23^o$$

Rpta.: A

3. En el triángulo ABC. Determine el valor de la expresión $\sqrt{17}(\text{sen}\theta + \cos\theta)$

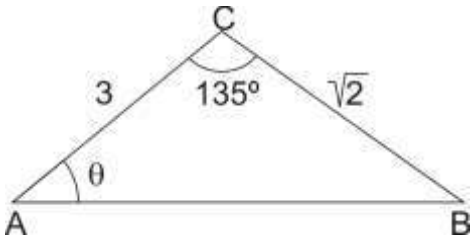
A) 1

B) 5

C) 3

D) 2

E) 4



Solución:

$$\frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\theta}=\frac{3}{\text{sen}(45^{o}-\theta)} \Rightarrow \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\theta)=3\text{sen}\theta \Rightarrow \text{ctg}\theta=4$$

$$\text{sen}\theta=\frac{1}{\sqrt{17}} \text{ y } \cos\theta=\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow E=\sqrt{17}(\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}})=5$$

Rpta.: B

4. En el triángulo ABC, el lado AB=17 cm, BC=15 cm. Si $E=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}$, halle el valor de $R=15E$

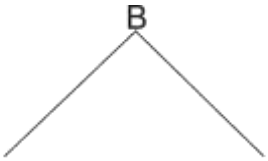
A) 10

B) 15

C) 16

D) 20

E) 17



Solución:

$$\frac{17}{\text{sen}(\alpha+\beta)}=\frac{15}{\text{sen}(\alpha-\beta)}$$

$$\Rightarrow 17(\text{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\text{sen}\beta)=15(\text{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\text{sen}\beta)$$

$$2\text{sen}\alpha\cos\beta=32\cos\alpha\text{sen}\beta \Rightarrow \frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\beta}=16 \Rightarrow \frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}=\frac{16+1}{16-1}=\frac{17}{15} \Rightarrow 15E=17$$

Rpta.: E

5. Desde la parte más alta de su casa Ángel observa a un ave reposando sobre un poste de alumbrado con un ángulo de elevación de 40° a una distancia de 30 metros, desde el mismo punto observa también a un auto estacionado con un ángulo de depresión de 20° a una distancia de 40 metros. Calcule la distancia entre el ave y el auto, si Ángel, el ave y el auto se encuentran en un mismo plano.

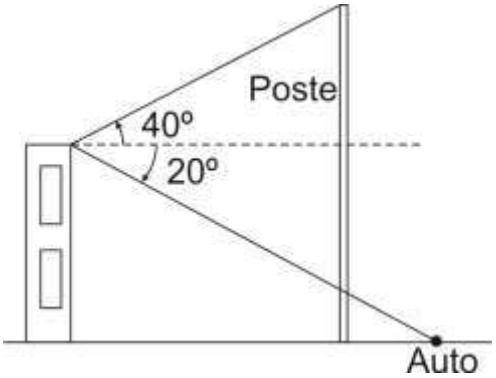
A) $10\sqrt{13}$ m

B) $91\sqrt{10}$ m

C) $91\sqrt{5}$ m

D) $13\sqrt{10}$ m

E) $5\sqrt{31}$ m



<u>Solución</u>:

Ley de cosenos

$$d^2 = 30^2 + 40^2 - 2(30)(40)\cos 60^o$$
$$= 1300$$
$$d = \sqrt{1300} = 10\sqrt{13}$$

Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Un trapecista quiere saber cuántos metros de cuerda necesita como mínimo para sujetarlo de sus extremos en los puntos A y B de los hoteles mostrados en la figura. Para ello, desde el punto P que está a un metro de altura del suelo, observa con un ángulo de elevación de 45º al punto A y al punto B con 75º. Hallar la longitud de la cuerda.

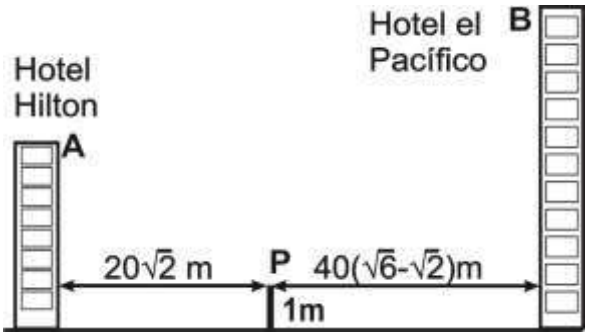
A) $20\sqrt{13}$ m

B) $28\sqrt{13}$ m

C) $40\sqrt{13}$ m

D) $45\sqrt{13}$ m

E) $50\sqrt{13}$ m



Solución:

De la figura

$\triangle$ANP: $AP = 40$

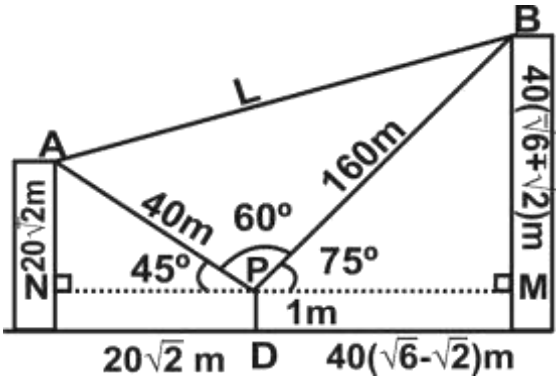
$\triangle$PMB: $BM = 10(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{ctg}15^o$

$BM = 10(\sqrt{6}-\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$BM = 10(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $PB = 160\text{m}$

$L^2 = 40^2 + 160^2 - 2(40)(160)\cos 60^o$

$L = 40\sqrt{13}\text{m}$



Rpta.: B

2. Dos antenas de radio tiene alturas de 45 m y 55 m, respectivamente, y la recta que une sus puntos más altos, forma un ángulo de 30° con la horizontal. Halle la distancia que separa a ambas antenas.

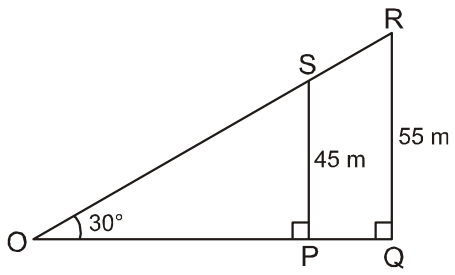
A) $14\sqrt{3}$ m B) $10\sqrt{3}$ m C) $5\sqrt{3}$ m D) $15\sqrt{3}$ m E) $12\sqrt{3}$ m

Solución:

$OP = 45ctg30^o = 45\sqrt{3}$

$OQ = 55ctg30^o = 55\sqrt{3}$

$OQ - OP = 10\sqrt{3}$ m



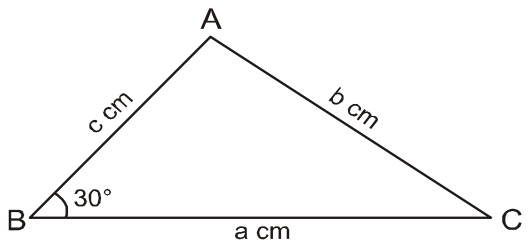
Rpta.: B

3. En la figura, a > c. Si $2a^2 + 5c^2 = 11ac$, calcule $tg\left(\frac{A-C}{2}\right)$.

A) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2(2+\sqrt{3})}{3}$

C) $3 + \sqrt{3}$ D) $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$



Solución:

$2a^2 - 11ac + 5c^2 = 0 \Rightarrow (2a-c)(a-5c) = 0$; $c = 2a \vee a = 5c$

$$\Rightarrow \frac{tg\left(\frac{A-C}{2}\right)}{tg\left(\frac{A+C}{2}\right)} = \frac{tg\left(\frac{A-C}{2}\right)}{tg75°} = \frac{a-c}{a+c} = \frac{4c}{6c} = \frac{2}{3}; \Rightarrow tg\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{2(2+\sqrt{3})}{3}$$

Rpta.: B

4. En una base militar, sobre su espacio aéreo, se detecta un avión desconocido en la dirección $N\alpha O$ a una distancia de 5 km respecto del centro de control; después de dos minutos, nuevamente el avión es detectado en la dirección $E\beta N$ a una distancia 7 km respecto al centro de control. Si $\csc\alpha = 5$ y $\sec\beta = \frac{7}{5}$, determine la rapidez del avión que se desplaza en línea recta horizontal, con velocidad constante.

A) 180 km/h B) 150 km/h C) 120 km/h D) 100 km/h E) 200 km/h

Solución:

Ley de proyecciones

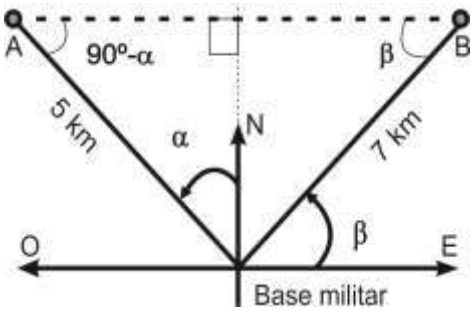
$AB = 5\cos(90^o - \alpha) + 7\cos\beta$

$AB = 5\text{sen}\alpha + 7\cos\beta$

Del dato: $\csc\alpha = 5$ y $\sec\beta = \frac{7}{5}$

$AB = 5(\frac{1}{5}) + 7(\frac{5}{7}) = 6\,\text{km}\,;\, AB = vt$

$\rightarrow\ v = \frac{AB}{t} = \frac{6\text{km}}{2\text{min}\frac{\text{h}}{60\text{min}}} = 180\frac{\text{km}}{\text{h}}$



Rpta.: A

5. Desde la azotea de un edificio de 150m de altura, se observa un avión en la dirección $N25^oO$ con un ángulo de elevación α y que se encuentra a 750 m respecto del suelo; también un automóvil en la dirección $N65^oE$, con un ángulo de depresión θ, si $tg\theta = \frac{5}{12}$ y $tg\alpha = \frac{5}{4}$. Determine la distancia que separa al avión del automóvil en el instante de la observación.

A) $150\sqrt{41}$ m B) $150\sqrt{41}$ m C) 900 m

D) $200\sqrt{5}$ m E) 1200 m

Solución:

De la figura

$\triangle DMC:\ MC = 150ctg\theta = 150(\frac{12}{5}) = 360m$

$\triangle DQA:$

$DQ = MP = 600ctg\alpha = 600(\frac{4}{5}) = 480m$

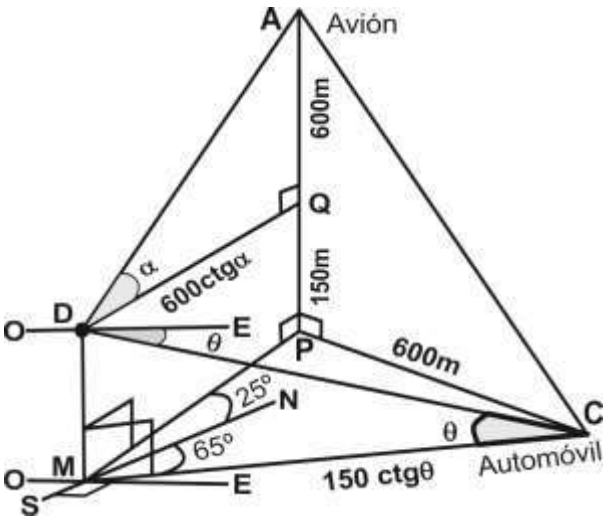
$\triangle PMC$ recto en M: $(PC)^2 = (MP)^2 + (MC)^2$

$(PC) = \sqrt{480^2 + 360^2} = 600$

$\triangle APC$, recto en C: $x^2 = (PA)^{)2} + (PC)^2$

$=>\ x = \sqrt{(750)^{)2} + (600)^2}$

$x = 150\sqrt{41}m$



Rpta.: A

6. Desde el punto más alto de un edificio de 50 m de altura se observa un automóvil con un ángulo de depresión de 30º cuando está pasando por el punto A y, luego de $(\sqrt{3}+1)$ minutos, se observa el mismo automóvil con un ángulo de depresión de 15º cuando pasa por el punto B. Si el automóvil viaja con rapidez constante, ¿cuál es su valor expresado en m/min.?

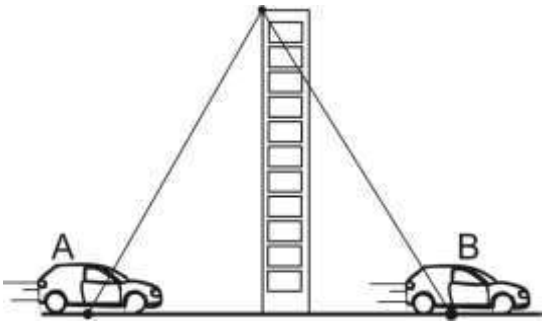
A) $100\dfrac{m}{min}$

B) $100(\sqrt{3}+1)\dfrac{m}{min}$

C) $100(\sqrt{3}-1)\dfrac{m}{min}$

D) $50(\sqrt{3}+1)\dfrac{m}{min}$

E) $50\sqrt{3}\dfrac{m}{min}$



<u>Solución</u>:

$tg30^o = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $tg15^o = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$\triangle ADC$

$AD = 50ctg30^o = 50\sqrt{3}$

$\triangle CDB$

$DB = 50ctg15^o$; $DB = 50(2+\sqrt{3})$

$AB = AD + DB = 100(\sqrt{3}+1)$

$AB = vt \Rightarrow v = \dfrac{AB}{t} = \dfrac{100(\sqrt{3}+1)m}{(\sqrt{3}+1)min} = 100\dfrac{m}{min}$

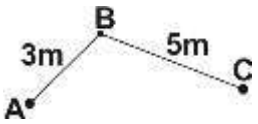
Rpta.: A

7. En un partido de fútbol, la calificación de los pases realizados se mide por $Q = 13\sec\theta$ expresado en porcentaje. La trayectoria que sigue la pelota se inicia en el punto A, llega al punto B y termina en el punto C. Si se considera la menor abertura entre dos lados del triángulo formado por los puntos A, B y C para la trayectoria, donde AB = 3 m, BC = 5 m, y la distancia entre el punto inicial y final es 7 m, ¿cuánto le falta a la calificación para alcanzar valor ideal?

A) 68% B) 14%

C) 86% D) 41%

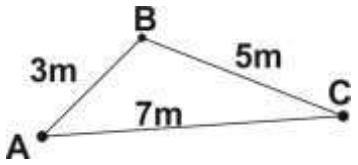
E) 32%



Solución:

Ley de Cosenos: $3^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7)\cos\theta$ => $\cos\theta = \frac{13}{14}$

La calificación de los pases es: $Q = 13\sec\theta = 14\%$
La calificación ideal es 100%; Si F es lo que falta
$F = 100\% - 14\% = 86\%$



Rpta.: C

8. Una silla plegadiza tiene las patas formando ángulos como los que se muestran en la figura. ¿A qué distancia x en pulgadas, medido desde un extremo del asiento debe estar el cruce de las patas (barras metálicas), y cuál es el valor aproximado del ángulo θ? , si ABCD es un rectángulo, $\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{\sqrt{80}}$. Usar $\text{sen}53^o = 0,789 \approx 0,8$

A) $10,50$ pulg.; 75°

B) $10,62$ pulg.; 74°

C) $10,65$ pulg. ; 74°

D) $10,49$ pulg. ; 75°

E) $10,26$ pulg. ; 75°

Solución:

$\text{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{\sqrt{80}} \Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac{4}{5}$;

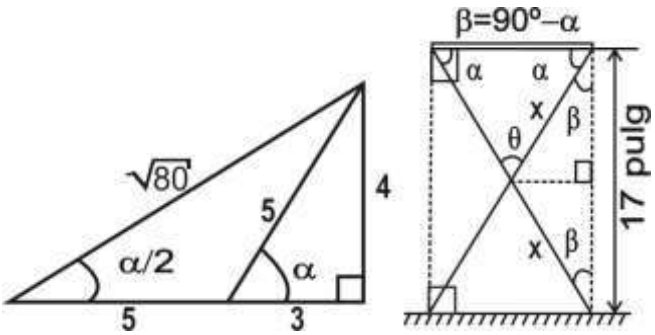
$\beta = 90^o - \alpha$

Ley de proyecciones

$(2x)\cos(90^o - \alpha) = 17$

$x = \frac{17}{2\text{sen}\alpha} = \frac{17}{2(4/5)} = 10,625$

$\theta = 180^o - 2(53^o) = 73,74^o$



Rpta.: B

9. Con frecuencia los topógrafos se enfrentan a obstáculos, como los árboles, cuando miden los límites de un terreno. Una técnica para obtener una medición precisa es el llamado método de triangulación. Consiste en construir un triángulo alrededor del obstáculo y medir uno de sus ángulos y dos de sus lados. Determine la longitud de la línea de frontera $\overline{AB}$. Si se conoce que $\cos^2\theta - \cos\theta = -\frac{1}{4}$. (dato: $\sqrt{183} = 13{,}52$)

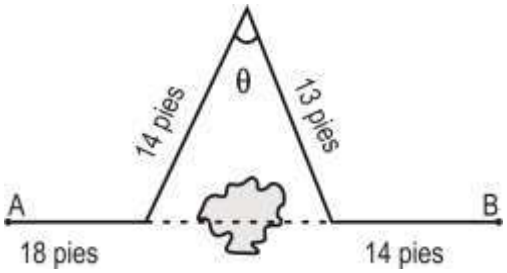
A) 45, 52 pies

B) 42,25 pies

C) 45,25 pies

D) 42,52 pies

E) 44,55 pies



<u>Solución</u>:

$$\cos^2\theta - \cos\theta + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (\cos\theta - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow \theta = 60^o$$

Ley de cosenos

$$x^2 = 13^2 + 14^2 - 2(13)(14)\cos\theta \Rightarrow x = \sqrt{13^2 + 14^2 - 2(13)(14)(1/2)} = 13{,}52$$

$$\overline{AB} = 13{,}52 + 14 + 18 = 45{,}52$$

Rpta.: A

10. El asta de una bandera tiene una posición vertical en una ladera que hace un ángulo de 30° con la horizontal, tiene unidos dos alambres de apoyo que lo sostienen, como lo muestra la figura. Si $a = 15\text{pies}$, calcule la suma de los cuadrados de los números que determinan las medidas de las longitudes de los alambres.

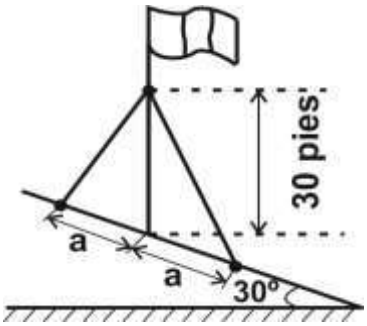
A) 1508 pies^2

B) 1890 pies^2

C) 1908 pies^2

D) 2008 pies^2

E) 2250 pies^2



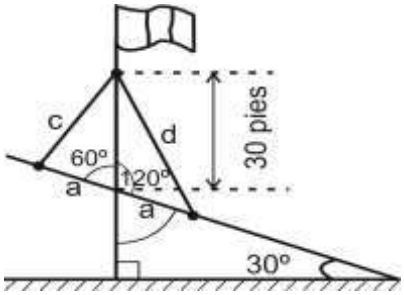
Solución:

Ley de Cosenos

$c^2 = 15^2 + 30^2 - 2(15)(30)\cos 60^o = 675$

$d^2 = 15^2 + 30^2 - 2(15)(30)\cos(90^o + 30^o) = 1575$

$k = c^2 + d^2 = 2250$



Rpta.: E

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una bandera en un asta de 8 pies está montada sobre el edificio a un ángulo θ, como se muestra en la figura. Determine la longitud del soporte, si $\theta = 135^o$, y $\beta = 2\alpha$.

A) $3\sqrt{8}$ pies

B) $6\sqrt{2}$ pies

C) $2\sqrt{8}$ pies

D) $2\sqrt{3}$ pies

E) $8\sqrt{2}$ pies

Solución:

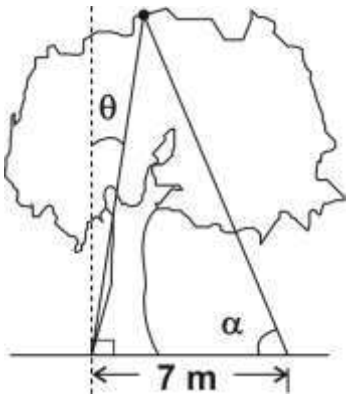
$135^o + \beta + \alpha = 180^o$, con $\beta = 2\alpha \Rightarrow \beta = 30^o$

Ley de senos: SI x es la longitud del soporte

$$\frac{x}{\text{sen}135} = \frac{8}{\text{sen}30^o} \Rightarrow x = \frac{8\text{sen}(90 + 45^o)}{1/2} = 16\cos 45 = 8\sqrt{2}$$

Rpta.: E

2. Un árbol creció inclinado con un ángulo de $\theta = 15^o$ desde la vertical. Desde un punto a 7 metros de la parte inferior del árbol, el ángulo de elevación a la parte más alta es α, si $\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ y h es la altura del árbol, calcule el valor de $R = 6h$.



A) $21 + 7\sqrt{3}$

B) $7 + 21\sqrt{3}$

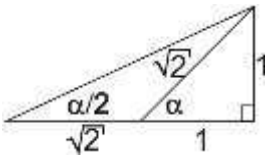
C) $21 + 3\sqrt{7}$

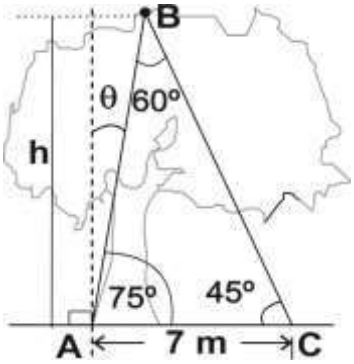
D) $7 + 3\sqrt{21}$

E) $22 + 7\sqrt{3}$

Solución:

$$tg\alpha = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\ ;\ \alpha = 45^o$$





$\triangle$ ABC Ley de senos

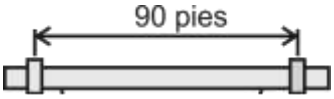
$$\frac{7}{sen60^o} = \frac{AB}{sen45^o} = \frac{BC}{sen75^o}$$

$$AB = \frac{7sen45^o}{sen60^o} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$$

$$h = ABsen75^o = \frac{7\sqrt{6}}{3}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ;\ R = 6h = 21+7\sqrt{3}$$

Rpta.: A

3. Un peso está soportado por cables unidos a ambos extremos de una barra de balance, como se muestra en la figura. Cual es valor de $36\cos\alpha + 48\cos\theta$.



A) 71

B) 74

C) 72

D) 75

E) 73

Solución:

Ley de cosenos

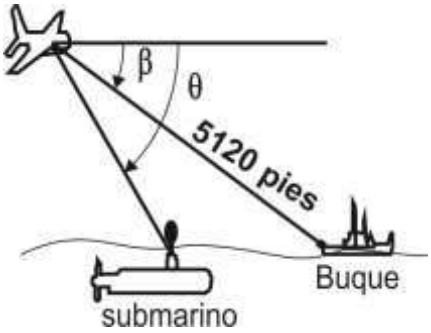
$$60^2 = 45^2 + 90^2 - 2(45)(90)\cos\alpha \Rightarrow -\cos\alpha = \frac{60^2 - 45^2 - 90^2}{2(45)(90)} = -\frac{29}{36}\ ;\ \cos\alpha = \frac{29}{36}$$

$$45^2 = 90^2 + 60^2 - 2(60)(90)\cos\theta \Rightarrow -\cos\theta = \frac{45^2 - 90^2 - 60^2}{2(60)(90)} = -\frac{43}{48}\ ;\ \cos\theta = \frac{43}{48}$$

$$R = 36\cos\alpha + 48\cos\theta = 29 + 43 = 72$$

Rpta.: C

4. Desde un avión que sobrevuela el océano, el ángulo de depresión a un submarino es θ. En ese mismo momento, el ángulo de depresión desde el avión a un buque es β. Como se muestra en la figura La distancia desde el avión al buque es de 5120 pies. Determine la distancia entre el buque y el submarino. Asumir que el avión, el submarino y el buque están en un plano vertical. Si $\operatorname{sen}\theta\cos\beta = \frac{1}{2} + \cos\theta\operatorname{sen}\beta$, y $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$



A) $2065\sqrt{2}$ pies

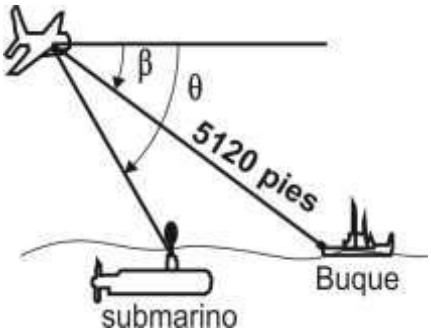
B) $2506\sqrt{2}$ pies

C) $2605\sqrt{2}$ pies

D) $2560\sqrt{2}$ pies

E) $2650\sqrt{2}$ pies

Solución:



$\operatorname{sen}\theta\cos\beta - \cos\theta\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen}(\theta-\beta) = \frac{1}{2}$

De $\cos\theta = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \theta = 45^{o}$

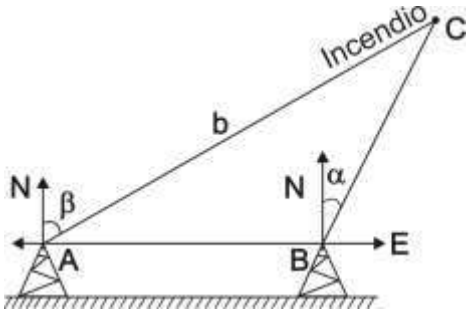
Ley de senos

$$\frac{x}{\operatorname{sen}(\theta-\beta)} = \frac{5120}{\operatorname{sen}(180-\theta)} \Rightarrow \frac{x}{\operatorname{sen}(\theta-\beta)} = \frac{5120}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{5120(1/2)}{1/\sqrt{2}} = 2560\sqrt{2}\text{ pies}$$

Rpta.: D

5. Dos estaciones de policía están en una recta este-oeste separadas una distancia de 110 km. Un incendio forestal está ubicado en un rumbo de N30°E desde la estación occidental en A y en un rumbo de N15°E desde la estación oriental en B. ¿A qué distancia de la estación occidental se localiza el incendio?



A) $55(4-\sqrt{3})$ km

B) $55(2+\sqrt{3})$ km

C) $55(2-\sqrt{3})$ km

D) $55(4+\sqrt{3})$ km

E) $4(55+\sqrt{3})$ km

Solución:

$\beta = 30^0$; $\alpha = 15^o$; $\text{ctg}15^o = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

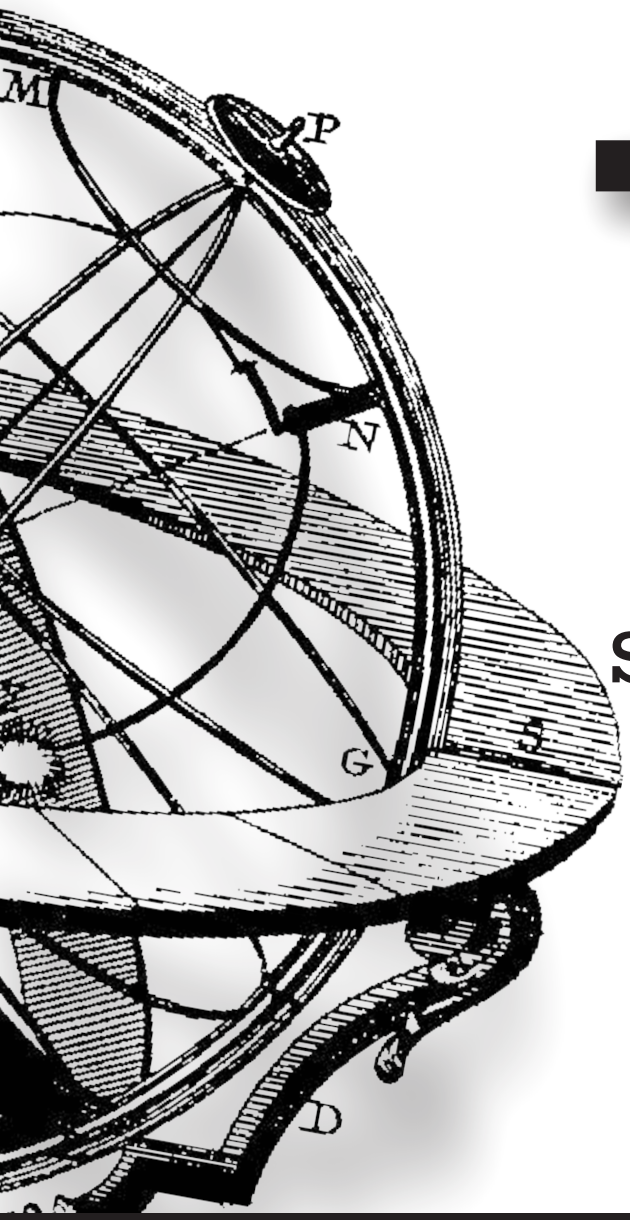
Ley de senos: ΔABC;

$$\frac{b}{\text{sen}(90^o+15^o)} = \frac{110}{\text{sen}15^o} \Rightarrow b = \frac{110(\cos 15^o)}{\text{sen}15^o} = 110\ \text{tg}15^o = 55(4+\sqrt{3})$$

Rpta.: D

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



13

semana

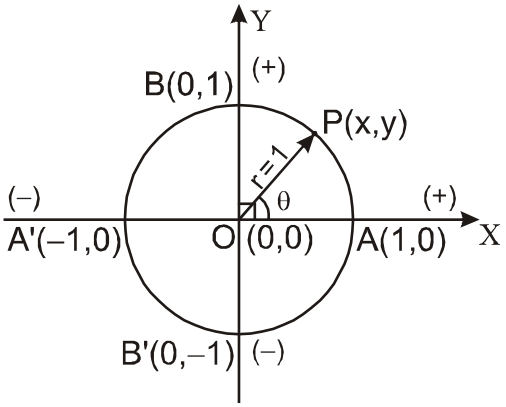
pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA I

LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA Y SUS ELEMENTOS



Es una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio 1. Sirve para representar las líneas trigonométricas.

Observación:

La ecuación canónica de la circunferencia de radio 1 es C: $x^2 + y^2 = 1$.

En la circunferencia trigonométrica se distingue los siguientes elementos:

1) O(0,0), origen de la circunferencia

2) A(1,0), origen de arcos

3) B(0,1), origen de complementos

4) A′(– 1,0), origen de suplementos

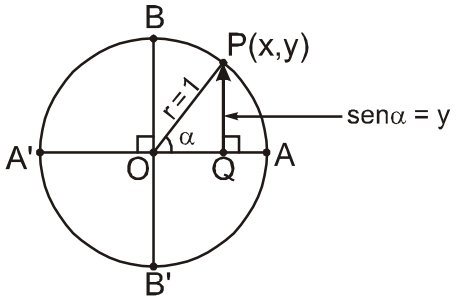
5) B′(0,– 1), no tiene denominación específica

6) P(x,y), extremo del arco AP de medida θ

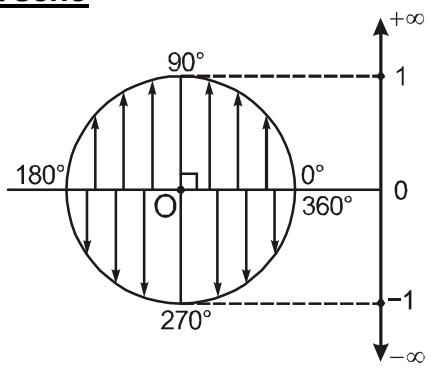
LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

I. Línea seno

Es la ordenada del punto extremo del arco.



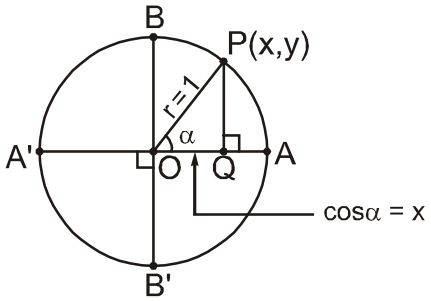
Análisis de la línea seno



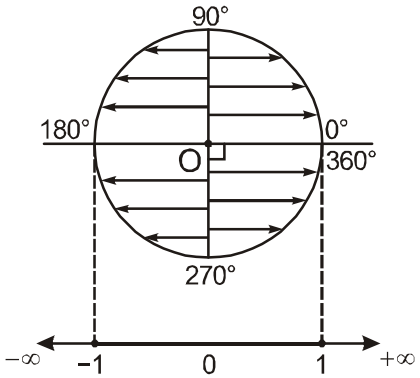
$-1 \leq \text{sen}\alpha \leq 1$

II. Línea coseno

Es la abscisa del punto extremo del arco.



Análisis de la línea coseno



$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

Trigonometría

EJERCICIOS

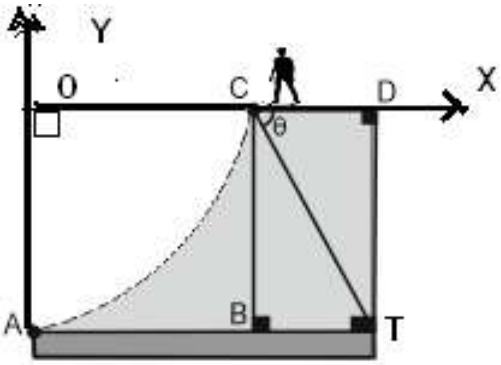
1. En la figura, se muestra una rampa para practicar *skateboard* (deporte sobre una tabla con ruedas). Dicha rampa está formada por un arco de sector circular de radio 1 dam, halle la suma de coordenadas del punto T.

A) $\tan\theta$

B) $\cot\theta$

C) $2 + \cot\theta$

D) $1 + \tan\theta$



Solución:

T(x;y) coordenadas de T

De la figura y siendo θ ángulo agudo

$y = -1$

$x = 1 + \cot\theta$

$x + y = \cot\theta$

Rpta.: B

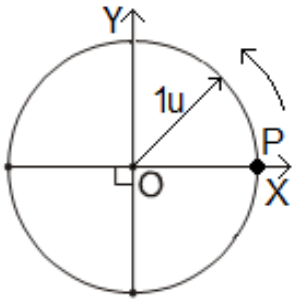
2. Una partícula P sigue una trayectoria circular como se muestra en la figura, si partió desde el origen de arcos con una rapidez constante de $\frac{2\pi}{3}$ unidades por segundo, halle la suma de las coordenadas de P cuando han transcurrido los primeros 5 segundos.

A) $-1-\sqrt{3}$

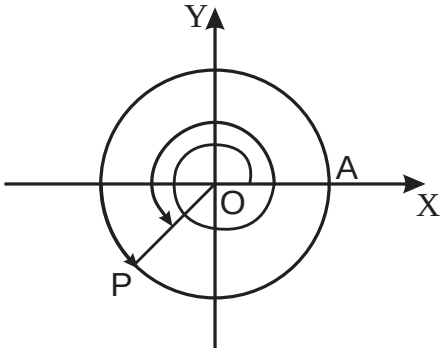
B) $1-\sqrt{3}$

C) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$



Solución:



Como $E = v \times T$

$\Rightarrow E = 2\pi \text{ rad/seg} \times 5 \text{ seg} \rightarrow E = \dfrac{10\pi}{3}\text{rad}$

Coordenada de $P\left(\cos\dfrac{10\pi}{3}, \text{sen}\dfrac{10\pi}{3}\right)$

$P\left(\cos\left(2\pi + \dfrac{4\pi}{3}\right), \text{sen}\left(2\pi + \dfrac{4\pi}{3}\right)\right) = P\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}, \text{sen}\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$P\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \text{Suma } S = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Rpta.: C

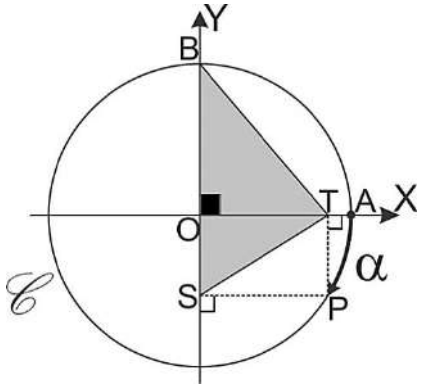
3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si el área de la región sombreada es $\left(\dfrac{3}{4}\cos\alpha\right)u^2$, determine $2\cos(2\alpha)$.

A) 1

B) – 1

C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{1}{3}$

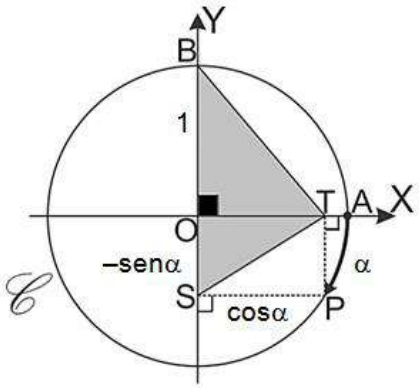


Solución:

De la figura tenemos

$\left(\dfrac{3}{4}\cos\alpha\right) = \dfrac{(1 - \text{sen}\alpha)}{2}\cos\alpha \Rightarrow 1 - \text{sen}\alpha = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \text{sen}\alpha = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = -30° \Rightarrow 2\cos 2\alpha = 1$



Rpta.: A

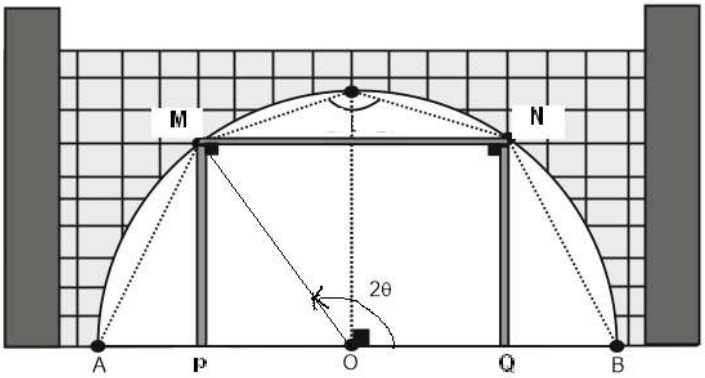
4. En la figura, se muestra la vista frontal de un túnel, cuyo interior tiene forma de una semicircunferencia de diámetro 2 dam. Para el mantenimiento de dicho túnel, se colocan los soportes metálicos MP, MN y NQ, halle el área máxima (siendo esta un número entero) del rectángulo MPQN.

A) 99 m^2

B) 89 m^2

C) 100 m^2

D) 79 m^2



<u>Solución</u>:

De la figura tenemos lo siguiente:

$MP = \text{sen}2\theta \quad \wedge \quad PQ = -2\cos 2\theta$

$S = -2\text{sen}2\theta\cos 2\theta = -\text{sen}4\theta$

figura

$90 < 2\theta < 180°$

$'0 < -\text{sen}4\theta < 1 \Rightarrow 0 < S < 100\ m^2$

El mayor valor entero de S es 99 metros cuadrados.

Rpta.: A

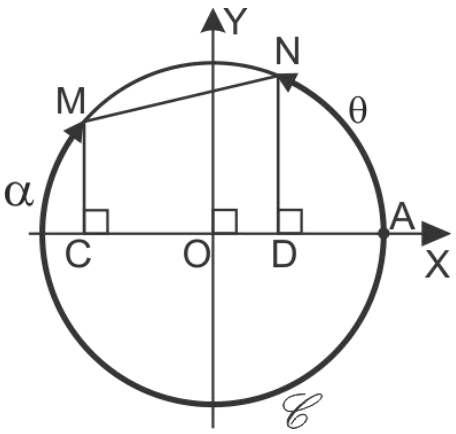
5. Se desea construir un corral en forma de trapecio MCDN de tal manera que MC + ND = CD y $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, halle la relación entre θ y α para dichos requerimientos.

A) $\theta - \alpha = 270°$

B) $\theta - \alpha = 240°$

C) $\theta = \alpha + 260°$

D) $\theta = 90° + \alpha$



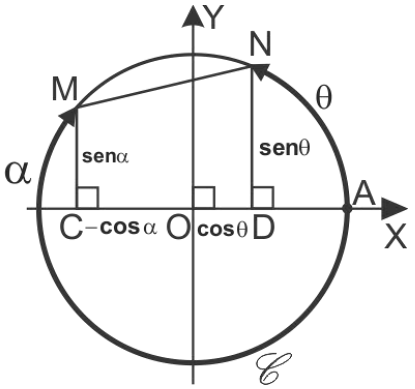
Solución:

$$\frac{ND+MC}{CD}=\frac{sen\theta+sen\alpha}{\cos\theta-\cos\alpha}$$

$$\frac{ND+MC}{CD}=\frac{2sen\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{-2sen\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)sen\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{ND+MC}{CD}=-ctg\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)=1$$

$$\frac{\theta-\alpha}{2}=135°\Rightarrow\theta-\alpha=270°$$



Rpta.: C

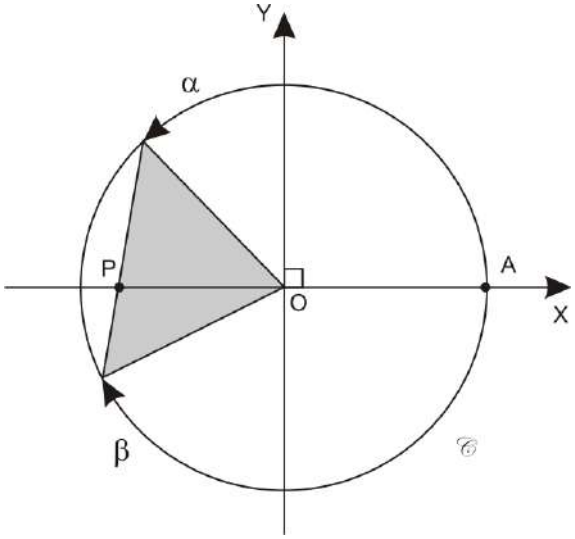
6. La aplicación "Perú en tus manos" nos muestra las posibles zonas afectadas por el Covid19 en un radio de 1 km de cierto distrito limeño (figura adjunta). Si el área de la región sombreada representa una zona de riesgo muy alta, y siendo O el centro de la circunferencia con 5OP = 4OA, halle el área de dicha zona de riesgo.

A) $\frac{2}{5}(sen\alpha-sen\beta)km^2$

B) $\frac{4}{5}(sen\alpha-sen\beta)km^2$

C) $(sen\alpha-sen\beta)km^2$

D) $\frac{2}{5}(sen\alpha+sen\beta)km^2$



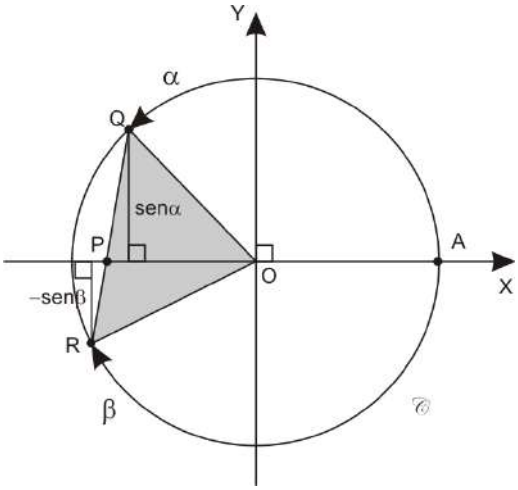
Solución:

Notemos del gráfico que

$$A_{\triangle OQP}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)sen\alpha$$

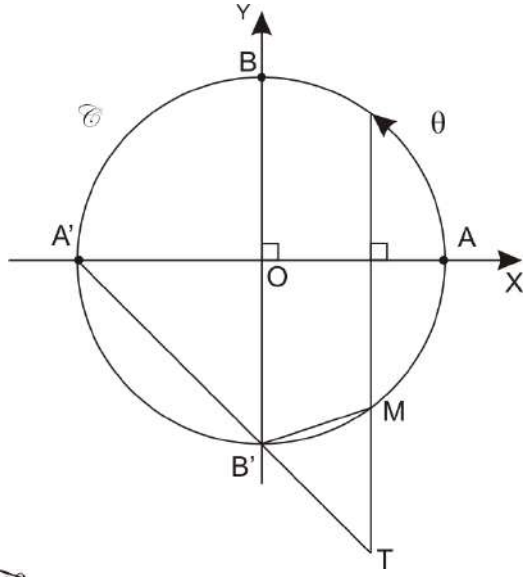
$$A_{\triangle OQP}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)(-sen\beta)$$

Luego, $A_{TOTAL}=\frac{2}{5}(sen\alpha-sen\beta)$



Rpta.: A

7. Un ingeniero construye una región triangular B´MT (observa la figura adjunta) de tal manera que B'M $=\sqrt{\tan 15°}$ km, donde $\mathscr{C}$ es una circunferencia de radio 1 km centrada en O; determine el valor de θ que satisfaga los requerimientos de dicho ingeniero.



A) $\frac{\pi}{4}$ rad

B) $\frac{\pi}{3}$ rad

C) $\frac{\pi}{6}$ rad

D) $\frac{\pi}{12}$ rad

Solución:

Sea $B'S = 1 - \text{sen}\theta$ y

$(B'M)^2 = \cos^2\theta + (1 - \text{sen}\theta)^2$

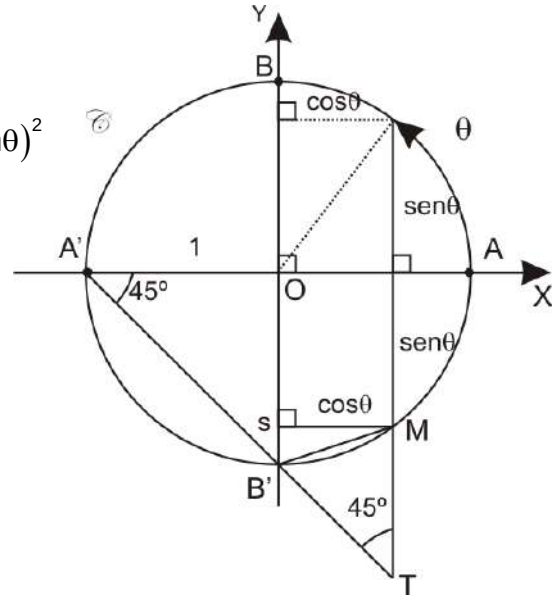
$(B'M)^2 = 2 - 2\text{sen}\theta$

$\tan 15° = 2 - 2\text{sen}\theta$

$2 - \sqrt{3} = 2 - 2\text{sen}\theta$

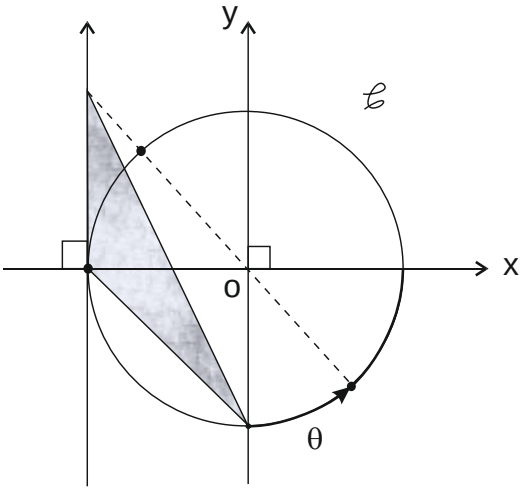
$\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ rad



Rpta.: B

8. En la figura, $\mathscr{C}$ es una circunferencia de 2 km de radio centrada en O. Determine el área de la región sombreada, sabiendo que el arco θ parte desde el punto (0;–2).



A) 2 km^2

B) (3tanθ) km^2

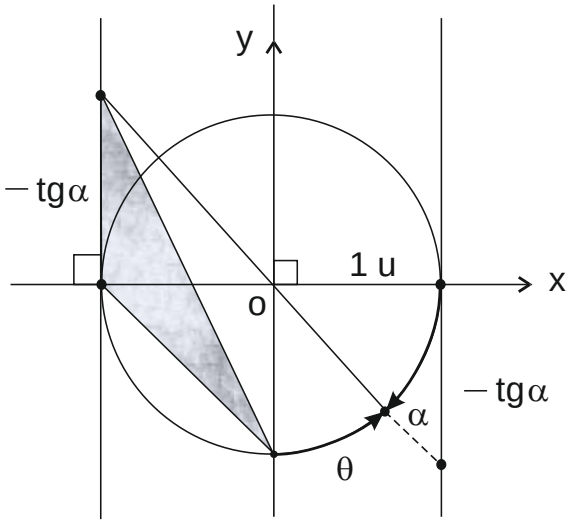
C) (senθcosθ) km^2

D) (2cotθ) km^2

Solución:

Al hacer 1u = 2 km, podemos considerar $\mathscr{C}$ como un C.T.

1) De la figura:



$$\theta-\alpha=90°\Rightarrow\alpha=\theta-90°$$

2) $\tan\alpha=\tan(\theta-90°)$

$$\tan\alpha=-\tan(90°-\theta)$$

$$\tan\alpha=-\cot\theta$$

3) Area sombreada $=\dfrac{(-\tan\alpha)(1)}{2}u^2$

$$=\frac{\cot\theta}{2}u^2=2\cot\theta\ \text{Km}^2$$

Rpta.: D

9. La utilidad diaria de la microempresa POLPERÚ que produce y vende polos está modelado por $U(x)=4\,\text{tg}\left(\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\cos x\right)$ miles de soles, donde $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$ representa los polos (en cientos de unidades aproximadamente) que se producen y venden al día. Halle la máxima utilidad diaria de dicha microempresa.

A) 4 mil soles B) 5 mil soles C) 6 mil soles D) 7 mil soles

Solución:

Como $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{5\pi}{4}$

$\rightarrow -1\le\cos x\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\le\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\cos x\le\dfrac{\pi}{4}$

$\rightarrow \text{tg}\left(-\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)\le\text{tg}\left(\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\cos x\right)\le 1$

$\rightarrow 4\text{tg}\left(-\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)\le 4\text{tg}\left(\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\cos x\right)\le 4$

$\therefore U_{máx}=4.$

Rpta.: A

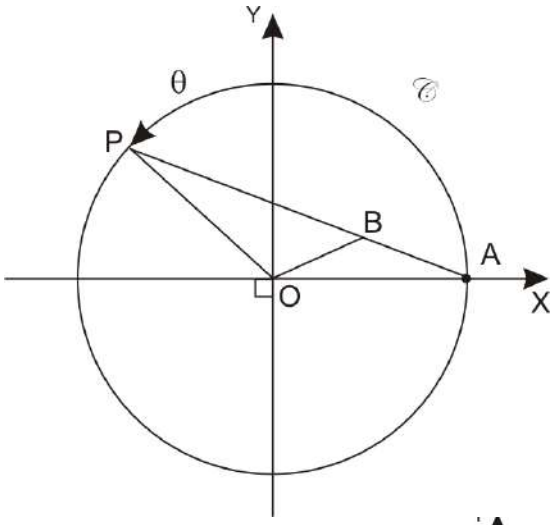
10. Un agricultor tiene un terreno de forma circular de radio 1u representado en la figura. Si en la región triangular OAB construye un establo para sus caballos, donde B es punto de trisección de AP, halle el área de dicho establo.

A) $\frac{1}{6}\text{sen}\theta\ u^2$

B) $\frac{1}{2}\cos\theta\ u^2$

C) $\frac{1}{3}\text{sen}\theta\ u^2$

D) $\frac{1}{6}\cos\theta\ u^2$



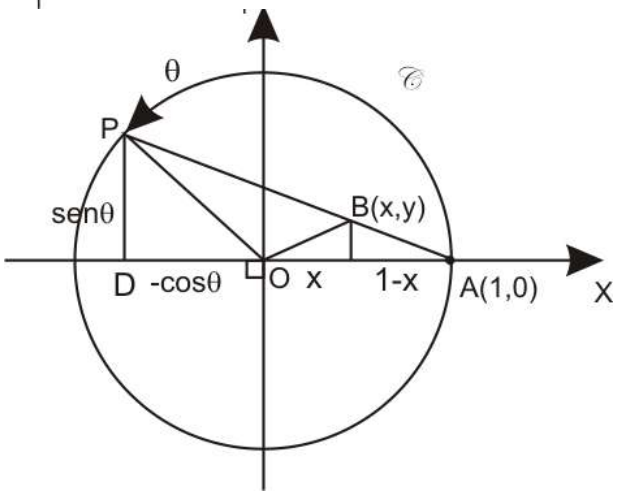
Solución:

Sean (x,y) las coordenadas de B.

$\Rightarrow \quad \frac{1-x}{1-\cos x}=\frac{1}{3}\ ;\ x=\frac{2+\cos\theta}{3}$

Además $\frac{y}{\text{sen}\theta}=\frac{1}{3}\ ;\ y=\frac{1}{3}\text{sen}\theta$

Luego $A_{\triangle OBA}=\frac{1}{6}\text{sen}\theta\ u^2$.



Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Indique la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. cos4 < cos5
II. sen1 > sen4
III. cos5 < sen5

A) VVV B) VFF C) VFV D) VVF

Solución:

$4 \in \text{IIIC y } 5 \in \text{IVC}$

$\cos 4 < \cos 5$

$1 \in \text{IC y } 4 \in \text{IIIC}$

$\text{sen}1 > \text{sen}4$

$5 \in \text{IVC}$

$\cos 5 > \text{sen}5$

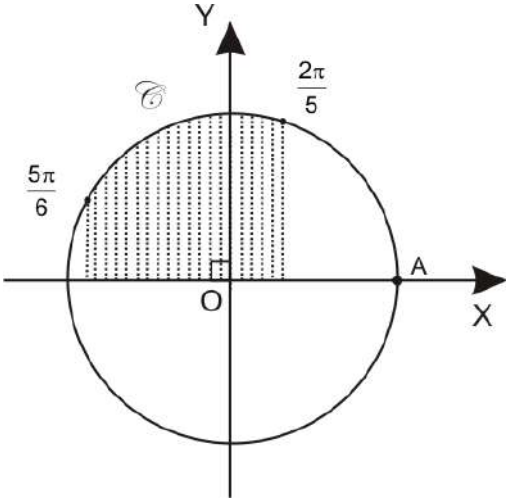
I) V II) V III) F

Rpta.: D

2. Halle $\tan\left(\frac{\pi}{3a}\right)$, si a es el máximo valor de $E = 2(\text{sen}x + \cos x)^2$, $\frac{4\pi}{5} < 4x \le \frac{5\pi}{3}$

A) $2+\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) $2-\sqrt{3}$

Solución:



$E = 2(1+\text{sen}2x) = 2 + 2\text{sen}4x$

Como $\frac{2\pi}{5} < 2x \le \frac{5\pi}{6}$

Observando la CT tenemos

escribir $\frac{1}{2} \le \text{sen}2x \le 1$

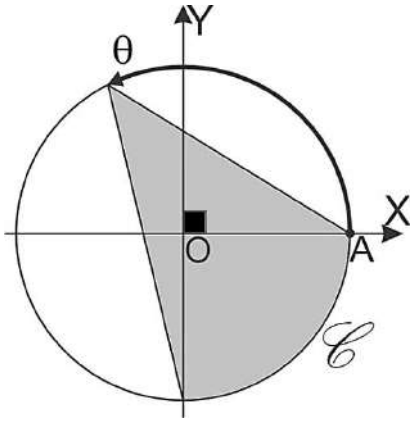
Entonces, $3 \le E \le 4$

Luego, el valor máximo de E es 4.

Entonces, $\tan\left(\frac{\pi}{3a}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

Rpta.: D

3. En una plaza circular de radio 1 dam se va habilitar un área de recreación para niños (región sombreada) y siendo $\mathscr{C}$ la circunferencia trigonométrica, halle el área destinada para tal fin.



A) $\frac{1}{4}(\pi + 2\text{sen}\theta - 2\cos\theta)\ \text{dam}^2$

B) $(\pi + 2\text{sen}\theta - 2\cos\theta)\text{dam}^2$

C) $\frac{1}{2}(\pi + 2\text{sen}\theta - 2\cos\theta)\text{dam}^2$

D) $\frac{1}{8}(\pi + 2\text{sen}\theta - 2\cos\theta)\text{dam}^2$

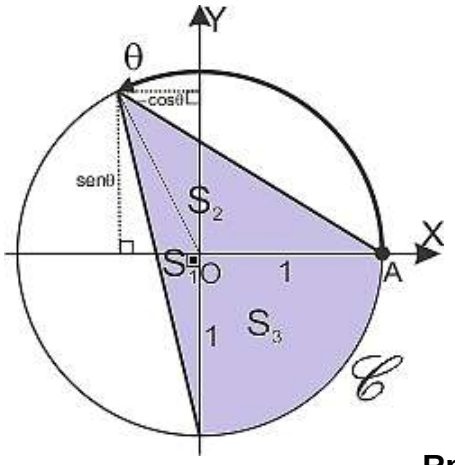
Solución:

$S_1 = \dfrac{-\cos\theta}{2}u^2,$

$S_2 = \dfrac{\text{sen}\theta}{2}u^2$ y

$S_3 = \dfrac{\pi}{4}u^2$

$S = S_1 + S_2 + S_3 = \dfrac{1}{4}\left(\pi + 2\text{sen}\theta - 2\cos\theta\right)$



Rpta.: A

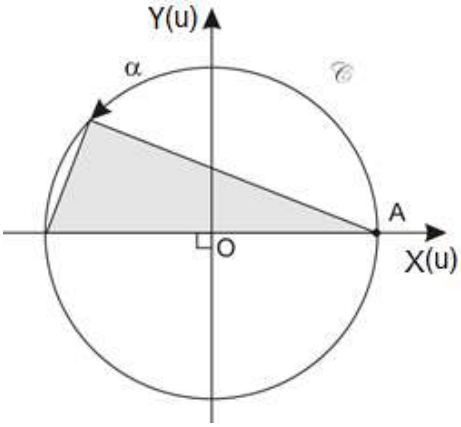
4. Un arquitecto desea hallar el valor de α de tal manera que el área de la región sombreada (en la figura) sea $\dfrac{\tan 60°}{2}u^2$ y $\mathscr{C}$ es una circunferencia trigonométrica, halle dicho ángulo.

A) 150°

B) 135°

C) 125°

D) 120°

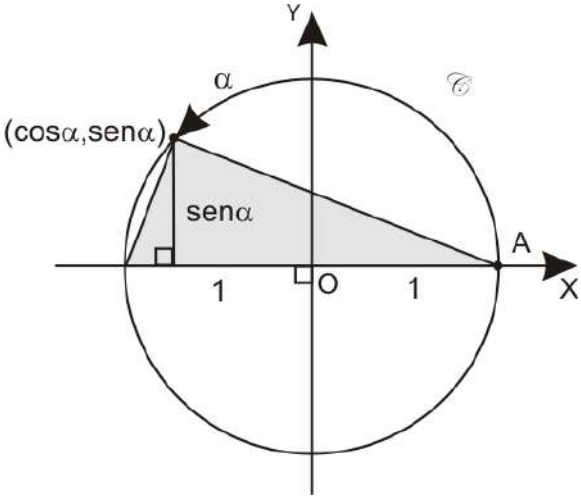


Solución:

Sea $A_{SOM} = \text{sen}\alpha$

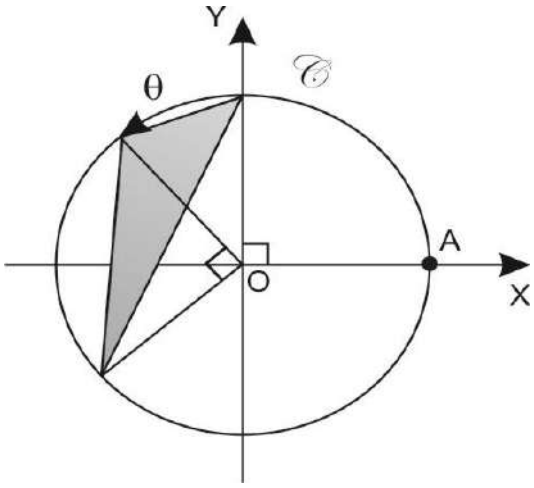
Entonces $\text{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Luego $\alpha = 120°$



Rpta.: D

5. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si el área de la región sombreada es M u^2, calcule 2M + senθ.



A) 1 + cosθ

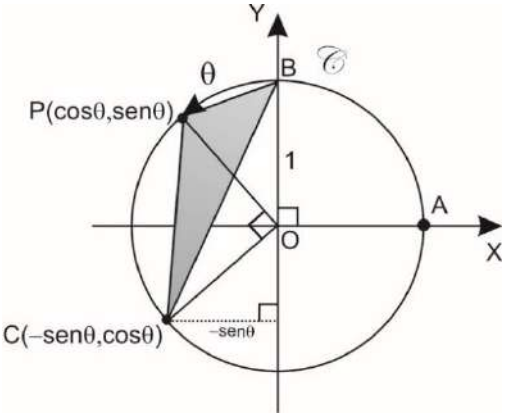
B) 1 – cosθ

C) (2senθ)

D) 2cosθ

Solución:

Sea $A_{SOMBREADA} = A_{CUADRILÁTERO\ PCOB} - A_{\triangle BCO}$



$$A_{SOMBREADA} = A_{\triangle POB} + A_{\triangle POC} - A_{\triangle BCO}$$

$$A_{SOMBREADA} = \frac{1(-\cos\theta)}{2} + \frac{1(1)}{2} - \frac{1|\text{sen}\theta|}{2}$$

$$= \frac{1-\cos\theta-\text{sen}\theta}{2} = M$$

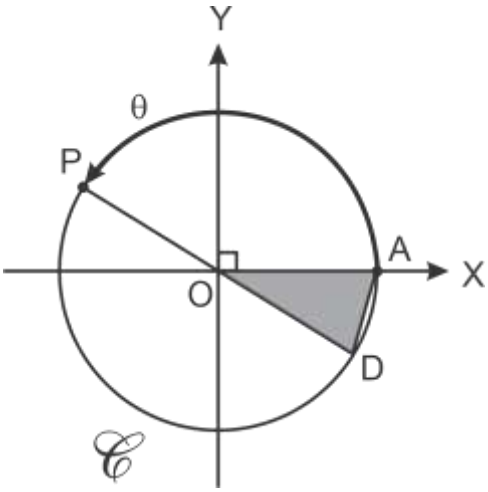
$$2M + \text{sen}\theta = 1 - \cos\theta$$

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, si el área de la región sombreada es $\frac{\sqrt{3}}{4}$ u^2, halle el valor del ángulo θ.



A) $\frac{11\pi}{12}$

B) $\frac{5\pi}{6}$

C) $\frac{3\pi}{4}$

D) $\frac{2\pi}{3}$

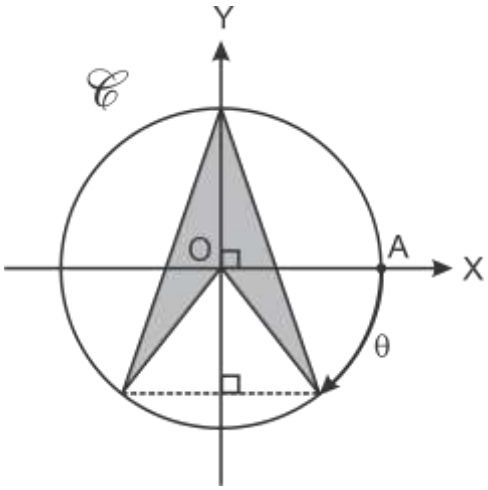
Solución:

$S_{AOD} = \frac{\text{sen}\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

Rpta.: D

2. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. El área de la región sombreada es Su^2, determine $\frac{1-S}{2}$.



A) $\text{sen}\theta$

B) $\cos\frac{\theta}{2}$

C) $\cos^2\frac{\theta}{2}$

D) $\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$

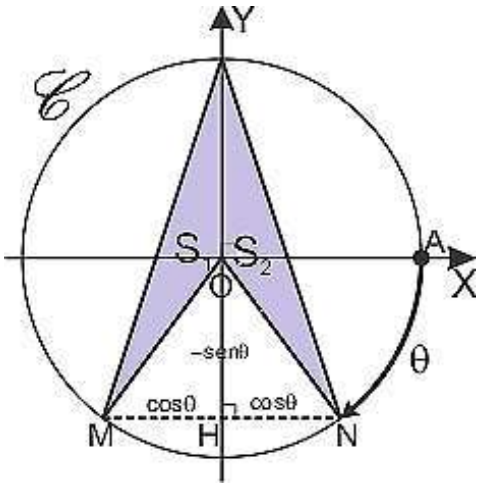
Solución:

Se tiene que $S_1 = S_2 = \dfrac{\cos\theta}{2}u^2$

Así el área de la región sombreada es:

$S = S_1 + S_2 = \cos\theta u^2$

$\dfrac{1-S}{2} = \text{sen}^2\dfrac{\theta}{2}$.



Rpta.: D

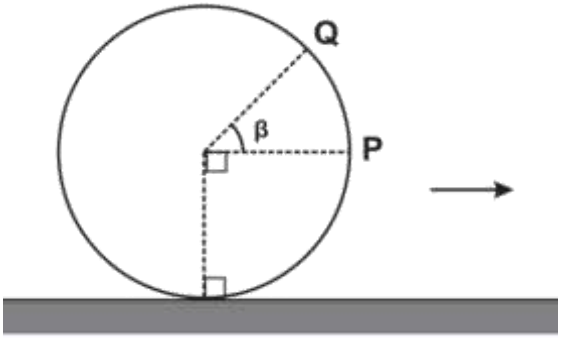
3. En la figura, se muestra un aro de radio 1 m, si el aro se desplaza una distancia de R m, determine la diferencia de alturas a la que se encuentran los puntos P y Q respectivamente.

A) $\left[\text{sen}(R) - \text{sen}(R+\beta)\right]$m

B) $\left[\text{sen}(R) + \text{sen}(R+\beta)\right]$m

C) $\left[\text{sen}(R) - \text{sen}(R-\beta)\right]$m

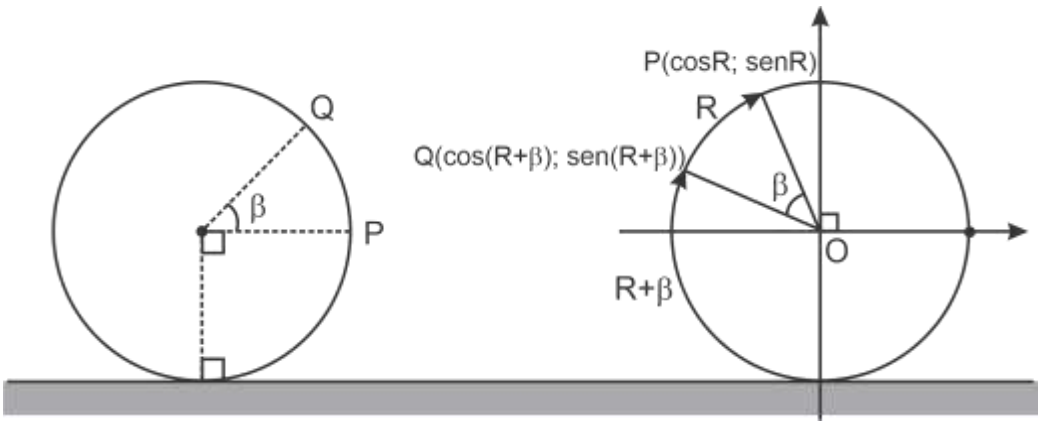
D) $\left[\text{sen}(R) + \text{sen}(R-\beta)\right]$m



Solución:

Del enunciado:

$R = \theta_{recorrido} \times 1 \quad \rightarrow \quad \theta_{recorrido} = R$

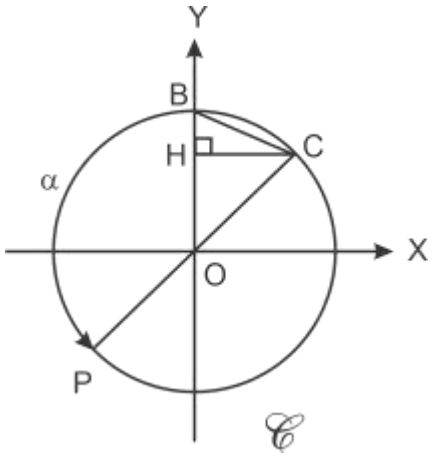


Las alturas de P y Q, sin importar el cuadrante son $[1+\text{sen}R]$ m y $[1+\text{sen}(R+\beta)]$ m respectivamente.

$\therefore$ La diferencia de alturas es $[\text{sen}(R)-\text{sen}(R+\beta)]$m

Rpta.: A

4. En la figura, En la circunferencia trigonométrica $\mathscr{C}$ mostrada, si P es el perímetro del triángulo BHC, hallar P – senα + cosα – 1.



A) $\sqrt{2}\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

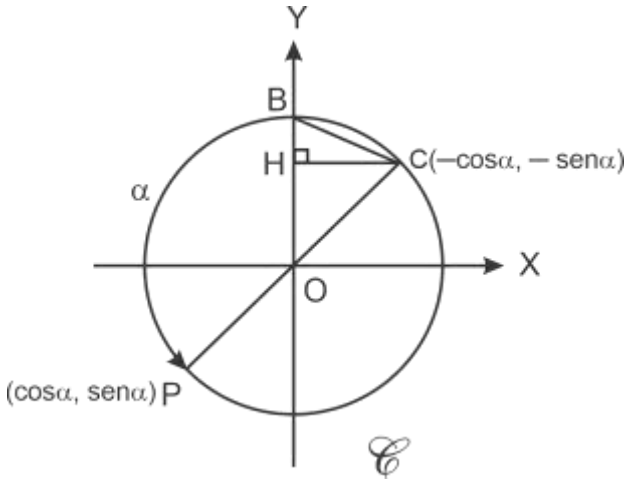
B) $2\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

C) $\sqrt{2}\,\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

D) $\sqrt{2}\,\text{sen}\alpha\cos\alpha$

<u>Solución</u>:

En el ΔBCH



HC = – cosα

BH = 1 + senα

$$BC=\sqrt{(1+\text{sen}\alpha)^2+\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{1+\text{sen}\alpha}$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{2}\left|\text{sen}\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right|,$$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{2}\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\ ;\ \cos\frac{\alpha}{2}<\text{sen}\frac{\alpha}{2}$$

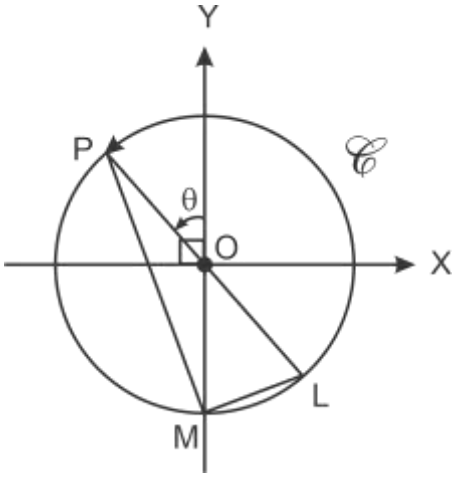
Perímetro

$$P=-\cos\alpha+1+\text{sen}\alpha+\sqrt{2}\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P-\text{sen}\alpha+\cos\alpha-1=\sqrt{2}\left(\text{sen}\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

Rpta.: A

5. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si el área de la región triangular MPL es $0{,}5u^2$, halle 6θ



A) π

B) 5π

C) 2π

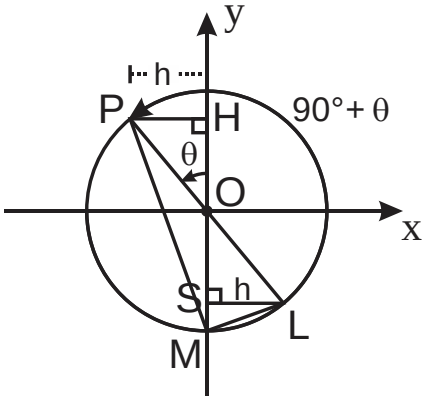
D) 3π

Solución:

Como $\Delta OPH \approx \Delta OSL$

$\Rightarrow$

$$PH = SL = |\cos(90° + \theta)|$$
$$= |\text{sen}\theta|$$
$$= \text{sen}\theta$$
$$= h$$



Áreas:

Como $A_{MPL} = A_{OPM} + A_{OML}$

$$\Rightarrow A_{MPL} = \frac{1}{2}OM \times h + \frac{1}{2}OM \times h$$
$$= \frac{1}{2}(1)\text{sen}\theta + \frac{1}{2}(1)\text{sen}\theta$$
$$= \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 6\theta = \pi$$

Rpta.: A

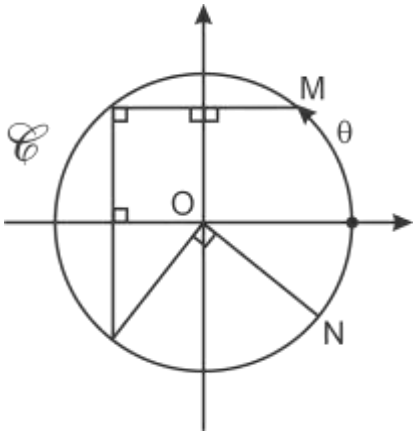
6. En la En un laboratorio biológico se analizó durante una semana el comportamiento de un caracol moro dentro de una incubadora circular de radio 1m. Si dicho caracol partió desde M y recorrió el borde en sentido anti horario llegando hasta N (tal como muestra la figura). Halle la suma de las coordenadas del punto N.

A) $\text{sen}\theta - \cos\theta$

B) $\cos\theta - \text{sen}\theta$

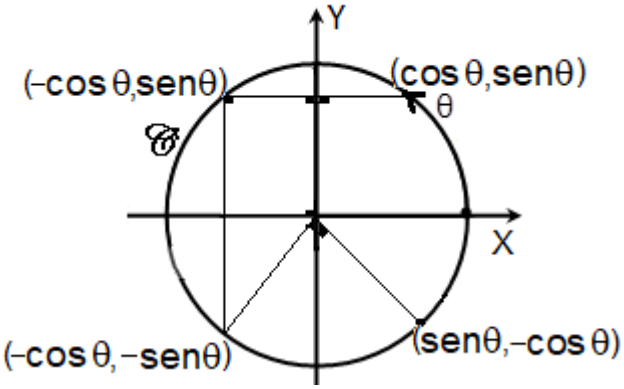
C) $\text{sen}2\theta$

D) $2\text{sen}^2\theta$



<u>Solución</u>:

Del gráfico:



1ro Parametrizamos en M

2do Reflexión respecto Y

3ro Reflexión respecto a X

4to Rotación

$N = (\text{sen}\theta, -\cos\theta)$

$\therefore$ Suma de coordenadas: $\text{sen}\theta - \cos\theta$.

Rpta.: A

7. Una partícula P se desplaza sobre esa circunferencia de radio 1u y cuyo centro tiene coordenadas O (0.0), en sentido horario y con velocidad constante, da 4 vueltas por segundo. Si en el instante t = 0 la partícula se encuentra en el punto A (1,0), en un instante t cualquiera, halle la distancia de la partícula con respecto al punto A.

A) $\sqrt{2(1-\cos(8\pi t)}$

B) $\sqrt{(1-\cos(4\pi t)}$

C) $\sqrt{2(1-\cos(4\pi t)}$

D) $\sqrt{2(1+\cos(4\pi t)}$

Solución:

Es claro que es una circunferencia trigonométrica, así para la partícula P en un instante "t" genera un ángulo en sentido horario θ tiene las siguientes coordenadas:

$$Q(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \ \ldots (1)$$

Veamos la siguiente relación:

Como es el primer día de observación, entonces

$$t \text{ seg.} \rightarrow \theta$$

$$1 \text{ seg.} \rightarrow -8\pi'$$

Así

$\theta = -8\pi t$ De (1) tenemos

Así, $Q\big(\cos(-8\pi t), \operatorname{sen}(-8\pi t)\big) \Rightarrow Q\big(\cos(8\pi t), -\operatorname{sen}(8\pi t)\big)$

Luego $d = \operatorname{dist}(A,Q) \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\big(\cos(8\pi t)-1\big)^2 + \big(\operatorname{sen}(8\pi t)-0\big)^2}$

Por tanto, la distancia de P en el instante "t" es $\sqrt{2(1-\cos(8\pi t)}$.

Rpta.: A

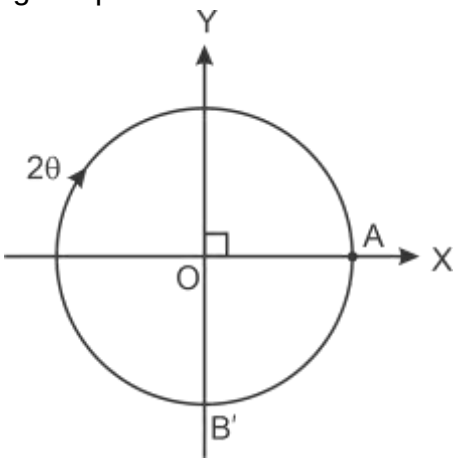
8. Dos atletas que participaron en los Juegos Panamericanos Lima 2019 están sobre una pista circular cuyo radio mide 1hm. Si ambos atletas parten del punto A en sentido horario y después de un tiempo el atleta más rápido ha recorrido un arco 2θ llegando al punto Q, mientras que el más lento llegó al punto B'. Halle la distancia final entre ambos atletas.

A) $\sqrt{2(1+\cos 2\theta)}$ hm

B) $\sqrt{2(1-\operatorname{sen}2\theta)}$ hm

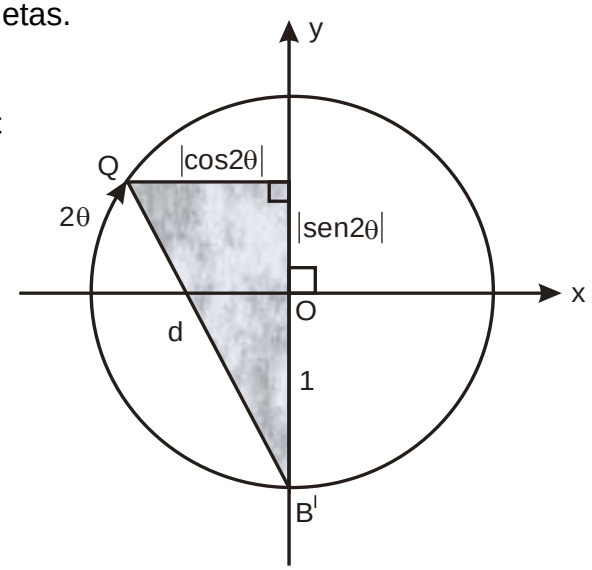
C) $\sqrt{2(1-\cos 2\theta)}$ hm

D) $\sqrt{2(1+\operatorname{sen}2\theta)}$ hm



Solución:

Sea d la distancia final entre ambos atletas.



Teorema de Pitágoras • $2\theta \in$ IIC

$$d^2 = \left(1+|\text{sen}2\theta|\right)^2 + \left(|\cos 2\theta|\right)^2$$

$$d^2 = \left(1+\text{sen}2\theta\right)^2 + \left(-\cos 2\theta\right)^2$$

$$d^2 = 1 + 2\text{sen}2\theta + \text{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta$$

$$d^2 = 2\left(1+\text{sen}2\theta\right)$$

$$d = \sqrt{2\left(1+\text{sen}2\theta\right)} \text{ hm.}$$

Rpta.: D

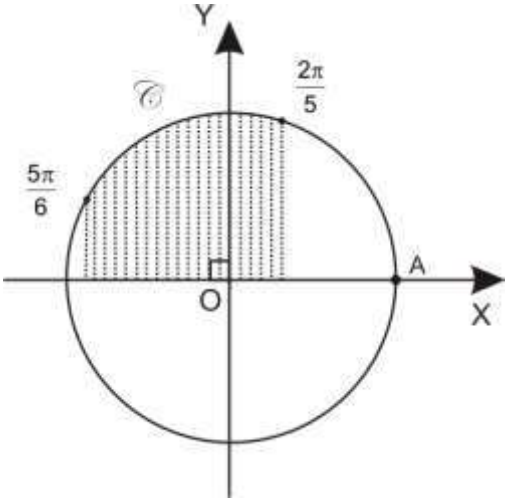
9. Halle el mayor valor de la expresión $4\left(\text{sen}x + \cos x\right)^2 - 4;\ \frac{\pi}{5} < x \le \frac{5\pi}{12}$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1

Solución:

Sea $A = 4\left(1+\text{sen}2x\right) - 4 = 4\text{sen}2x$

Como $\frac{\pi}{5} < x \le \frac{5\pi}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{5} < 2x \le \frac{5\pi}{6}$



Observando la CT podemos escribir

$$\frac{1}{2} \le \text{sen}2x \le 1$$

Entonces $2 \le A \le 4$

Luego el valor máximo de A es 4.

Rpta.: C

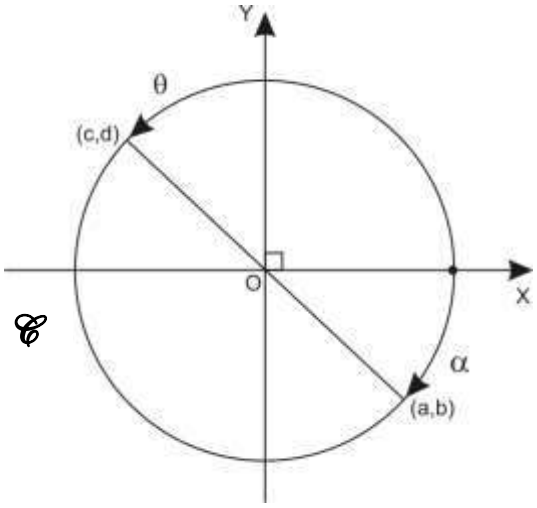
10. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si $\left(\frac{d-b}{a-c}\right)=1$, halle el valor de α.

A) $-\frac{\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{4}$

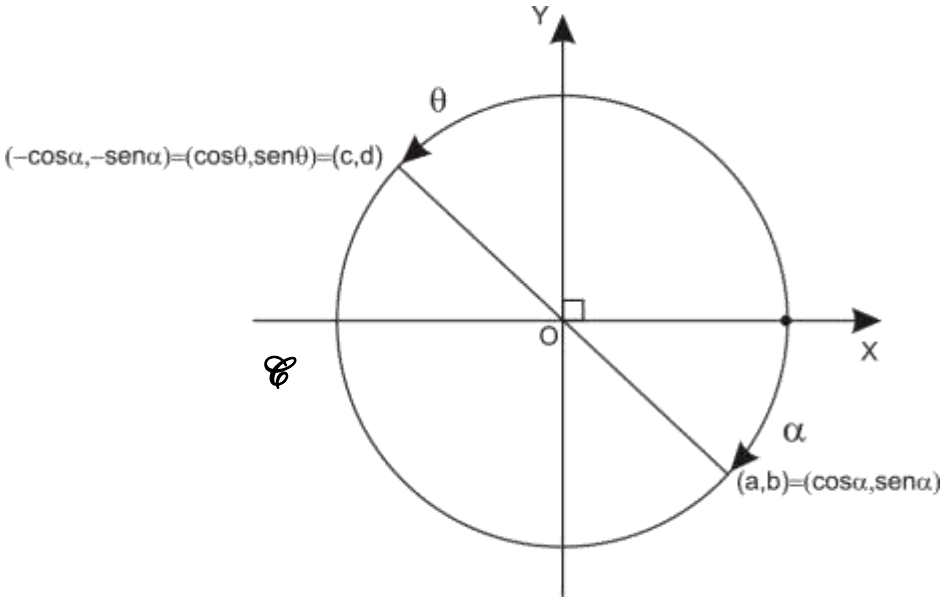
C) $-\frac{\pi}{6}$

D) $-\frac{\pi}{3}$



<u>Solución</u>:

Del gráfico



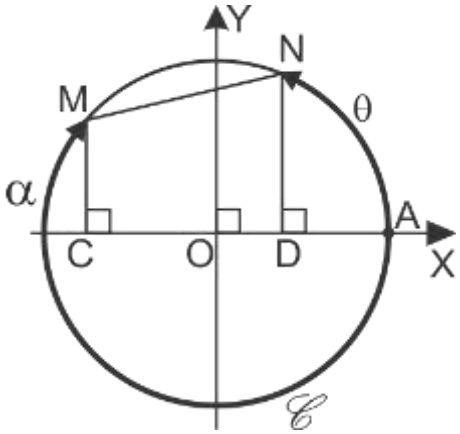
$$\left(\frac{d-b}{a-c}\right)=-\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{2\cos\alpha}=1$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-1\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{4}$$

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si $\theta-\alpha=\frac{3\pi}{2}$, determine el valor de $\frac{MC+ND}{CD}$.



A) $\frac{1}{2}$

B) 2

C) 1

D) $\frac{1}{4}$

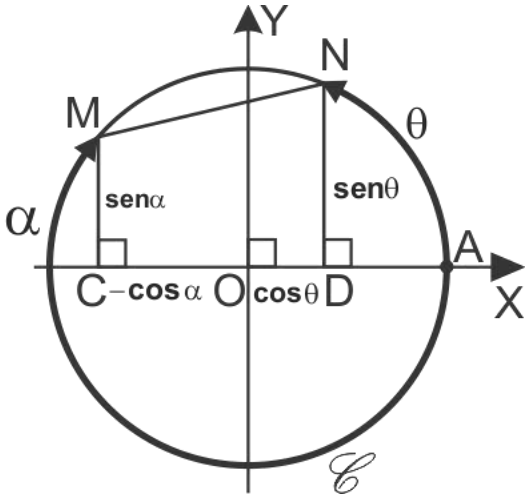
Solución:

$$\frac{ND+MC}{CD}=\frac{\text{sen}\theta+\text{sen}\alpha}{\cos\theta-\cos\alpha}$$

$$\frac{ND+MC}{CD}=\frac{2\text{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}{-2\text{sen}\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)}$$

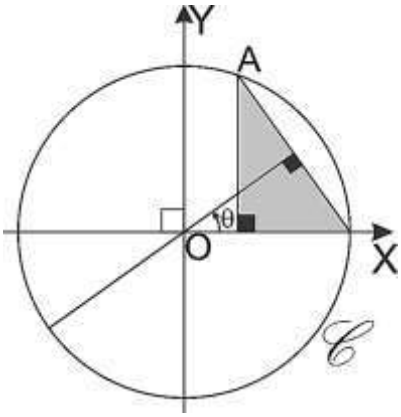
$$\frac{ND+MC}{CD}=-\text{ctg}\left(\frac{\overbrace{(\theta-\alpha)}^{270°}}{2}\right)=1$$

$$=-\text{ctg}(135°)=1$$



Rpta.: C

2. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, determine el perímetro de la región sombreada.



A) $2\text{sen}\theta(1+\text{sen}\theta+\cos\theta)\text{u}$

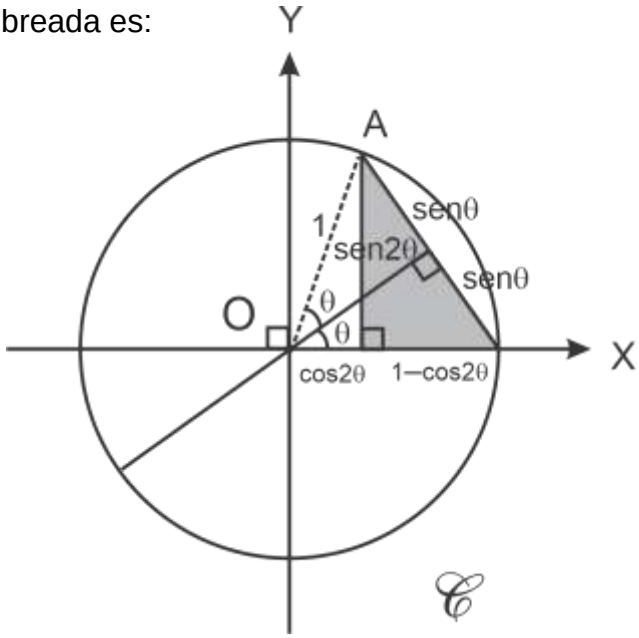
B) $2(1+\text{sen}\theta+\cos\theta)\text{u}$

C) $\dfrac{\text{sen}2\theta}{2}\text{u}$

D) $\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\text{u}$

<u>Solución</u>:

Así el perímetro de la región sombreada es:



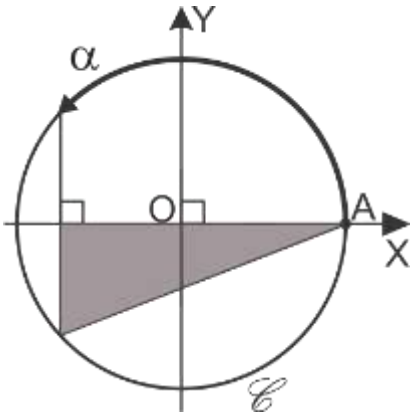
$2\text{sen}\theta+\text{sen}2\theta+1-\cos 2\theta$

$=2\text{sen}\theta+2\text{sen}\theta(\text{sen}\theta+\cos\theta)$

$=2\text{sen}\theta(1+\text{sen}\theta+\cos\theta)$

Rpta.: A

3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si el área de la región sombreada es Su^2 y $2S.\csc^2\frac{\alpha}{2}=\text{sen}\frac{\pi}{2}$, halle el valor de α.



A) $\frac{2\pi}{3}$

B) $\frac{5\pi}{6}$

C) $\frac{11\pi}{12}$

D) $\frac{3\pi}{4}$

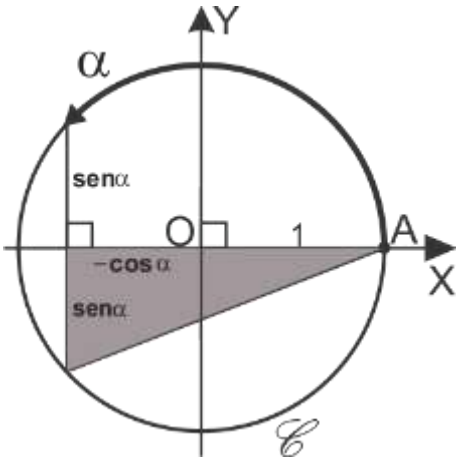
<u>Solución</u>:

$$S=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\text{sen}\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}\left(2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\alpha$$

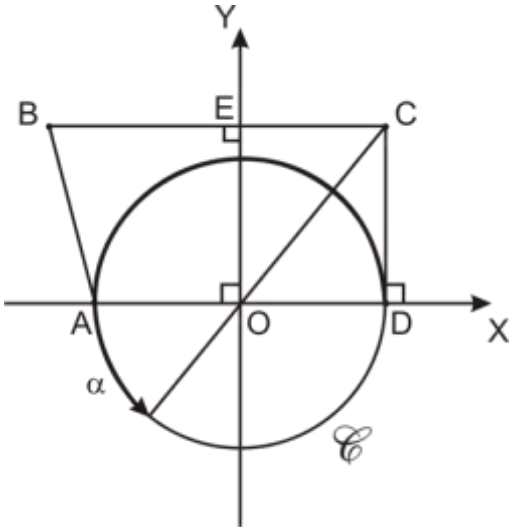
$$S.\csc^2\frac{\alpha}{2}=\text{sen}\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\alpha=\frac{5\pi}{6}$$



Rpta.: B

4. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si $3BE = 4CD$, calcule el área del trapecio ABCO, donde $2tg\alpha = a$.



A) $(a+3)\dfrac{a}{6}\,u^2$

B) $(a+1)\dfrac{a}{2}\,u^2$

C) $(2a+1)\dfrac{a}{4}\,u^2$

D) $(a+1)\,a\,u^2$

Solución:

$$DC = tg\alpha \Rightarrow BE = \frac{4}{3}tg\alpha = \frac{2a}{3} \text{ y } CD=\frac{a}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3} + 1 + 1\right)\frac{a}{2} = (a+3)\,\frac{a}{6}\,u^2$$

Rpta.: A

5. Si $\theta \in \left\langle \dfrac{3\pi}{4}, \pi \right\rangle$, hallar el menor valor entero de $3(sen\theta - cos\theta)$.

A) 4 B) 2 C) 3 D) 5

Solución:

$$A = 3(sen\theta - cos\theta)$$
$$= 3\sqrt{2}sen\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Como $\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{4}$

Entonces

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3 < \sqrt{2}\text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 3\sqrt{2}$$

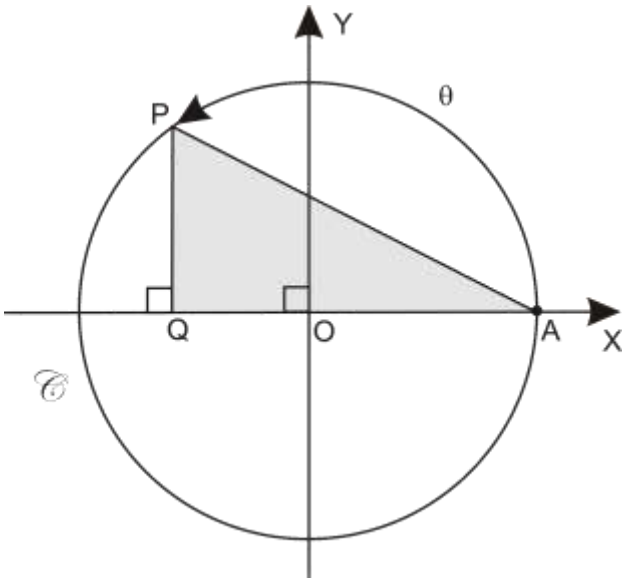
Menor valor entero es 4

Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Halle el área de la región triangular APQ.



A) $\frac{1}{2}\left(\text{sen}\theta-\frac{1}{2}\text{sen}2\theta\right)u^2$

B) $(\text{sen}\theta-\text{sen}2\theta)u^2$

C) $\frac{1}{2}\text{sen}2\theta\ u^2$

D) $2\text{sen}2\theta\ u^2$

E) $\text{sen}2\theta\ u^2$

Solución:

$PQ=\text{sen}\theta,\ OQ=-\cos\theta,\ QA=1-\cos\theta$

$\text{Área}(RS)=\frac{1}{2}AQ.QP$

$=\frac{1}{2}(1-\cos\theta).\text{sen}\theta=\frac{1}{2}(\text{sen}\theta-\text{sen}\theta.\cos\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(\text{sen}\theta-\frac{2}{2}\text{sen}\theta.\cos\theta\right)=\frac{1}{2}\left(\text{sen}\theta-\frac{1}{2}\text{sen}2\theta\right)u^2$

Rpta.: A

2. En la figura $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Halle el área de la región sombreada.

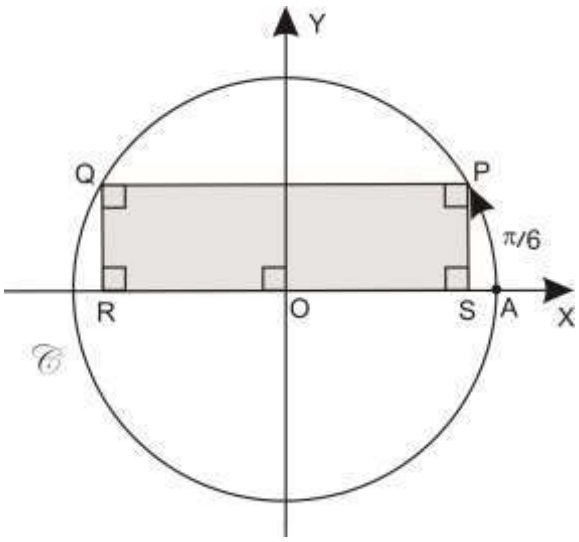
A) $\frac{\sqrt{3}}{3}u^2$

B) $\frac{\sqrt{2}}{2}u^2$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$

D) $\sqrt{3}\ u^2$

E) $\frac{\sqrt{3}}{4}u^2$



<u>Solución</u>:

Las coordenadas del punto P son $\left(\cos\frac{\pi}{6}, \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; luego, $RS = 2(OS) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

Como el cuadrilátero RSPQ es un rectángulo, el área de la región sombreada es

$\sqrt{3}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u^2$

Rpta.: C

3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, halle el área de la región BDOC.

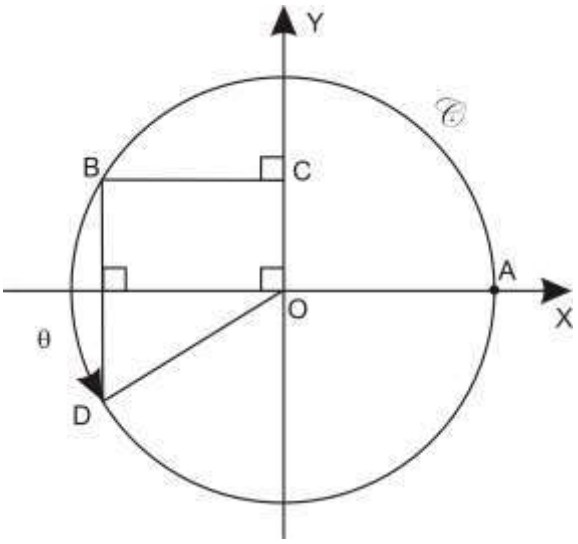
A) $-\frac{3}{2}\text{sen}\theta\ u^2$

B) $3\text{sen}2\theta\ u^2$

C) $\frac{3}{2}\text{sen}2\theta\ u^2$

D) $\frac{3}{4}\text{sen}2\theta\ u^2$

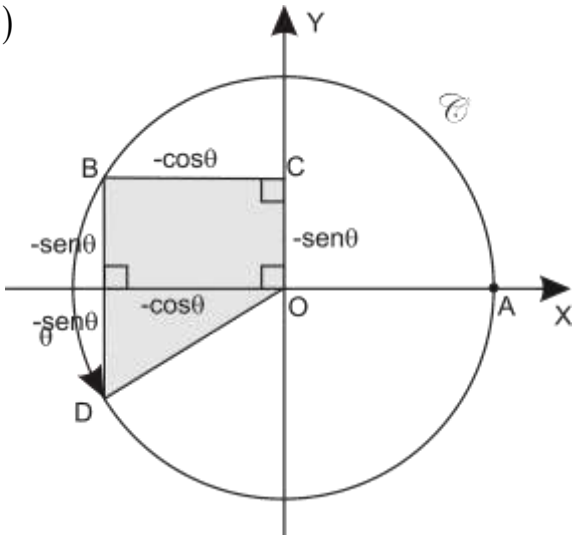
E) $-\frac{3}{4}\text{sen}\theta\ u^2$



<u>Solución</u>:

$$A = \frac{1}{2}(-\text{sen}\theta - 2\text{sen}\theta)(-\cos\theta)$$

$$A = \frac{3}{4}\text{sen}2\theta$$



Rpta.: D

4. En una plaza de forma circular de radio 1 dam, se realiza un evento cada año. Para ello, se ubica un espacio para el público (ver figura). Determine el área de la tribuna.

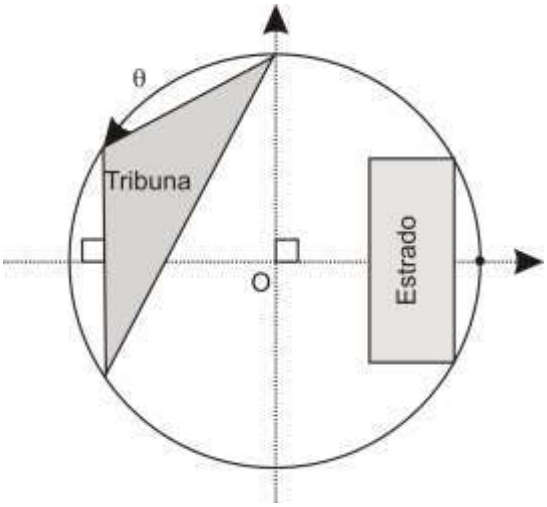
A) $-\text{sen}\theta\cos\theta$ dam^2

B) $-\frac{1}{2}\text{sen}\theta\cos\theta$ dam^2

C) $-\text{sen}2\theta$ dam^2

D) $-2\text{sen}2\theta$ dam^2

E) $-\frac{1}{2}\text{sen}\theta\sec\theta$ dam^2



Solución:

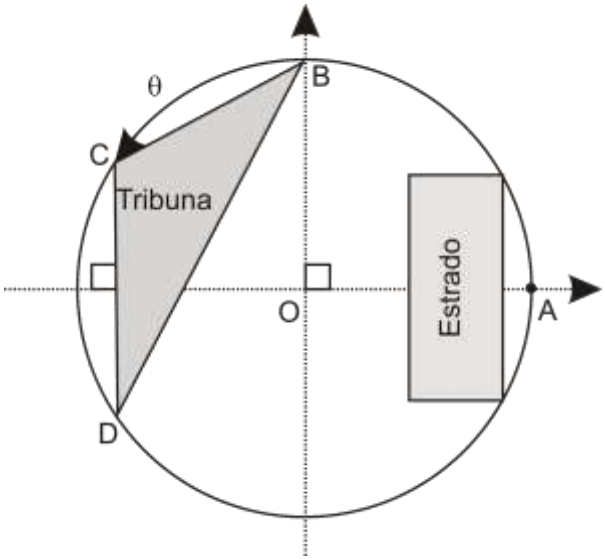
Los puntos son

$B(0,1)$, $C(\cos\theta,\text{sen}\theta)$ y $D(\cos\theta,-\text{sen}\theta)$

Entonces

$$A_{BCD}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos\theta & \text{sen}\theta \\ \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{BCD}=\frac{1}{2}\left(-2\text{sen}\theta\cos\theta\right)=-\text{sen}\theta\cos\theta$$



Rpta.: A

5. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Halle el área de la región sombreada.

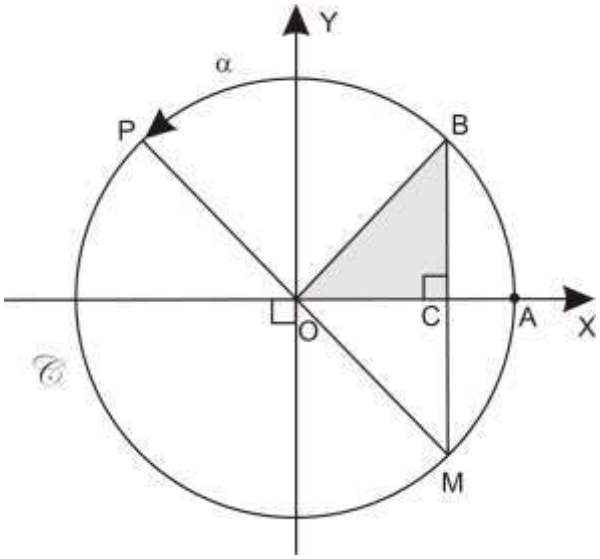
A) $\left(\frac{1}{7}\text{sen}2\alpha\right)$ u^2

B) $(-\text{sen}2\alpha)$ u^2

C) $\left(\frac{1}{4}\text{sen}3\alpha\right)$ u^2

D) $\left(-\frac{1}{4}\text{sen}2\alpha\right)$ u^2

E) $\left(\frac{1}{3}\text{sen}2\alpha\right)$ u^2



<u>Solución</u>:

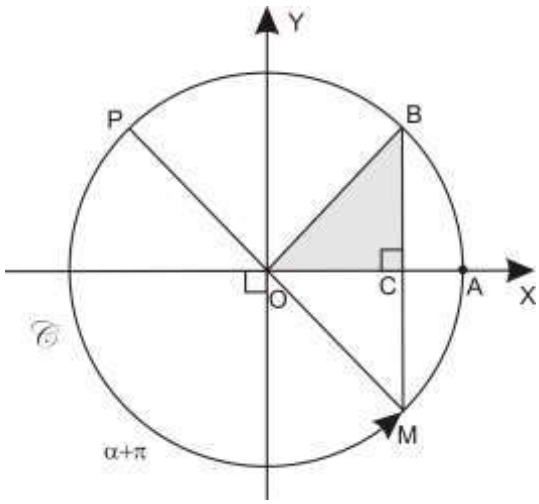
El arco AM corresponde al número real $(\pi+\alpha)$, luego

$$OC = \cos(\pi+\alpha)$$

$$CM = -\text{sen}(\pi+\alpha)$$

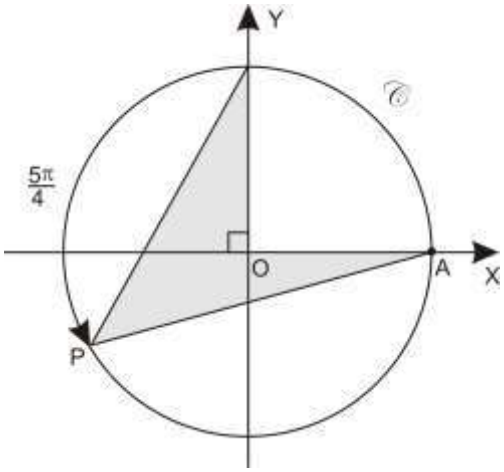
$$\begin{aligned}\text{Área}(RS) &= \frac{1}{2}\cos(\pi+\alpha)\left[-\text{sen}(\pi+\alpha)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(-\cos\alpha)(\text{sen}\alpha)\right]\\ &= -\frac{1}{2}\text{sen}\alpha\cos\alpha\\ &= -\frac{1}{4}2\text{sen}\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\text{Área} = \left(-\frac{1}{4}\text{sen}2\alpha\right)u^2$$



Rpta.: D

6. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Halle el área de la región sombreada.



A) $\left(2\sqrt{2}\right)/3$ u^2

B) $\left(\sqrt{3}\right)/2$ u^2

C) $\left(\sqrt{2}\right)/9$ u^2

D) $\left(\sqrt{2}\right)/2$ u^2

E) $\left(\sqrt{2}\right)/3$ u^2

<u>Solución</u>:

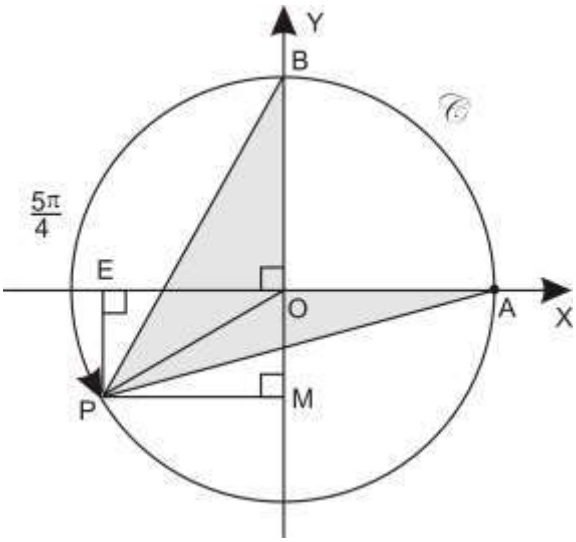
Área(RS)=Área(AOP)+Área(POB)…(I)

$$\text{PM} = -\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{OM} = -\text{sen}\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{PE}$$

$$\therefore \text{Área}(\text{AOP}) = \frac{1}{2}(1).\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdots(\text{II})$$

$$\text{Área}(\text{POB}) = \frac{1}{2}(1).\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdots(\text{III})$$

Llevando (II) y (III) en (I): $\text{Área}(\text{RS}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u^2



Rpta.: D

7. Si el área de la región sombreada es $S\,u^2$, halle el valor de $S.\csc\alpha$ ($\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica).

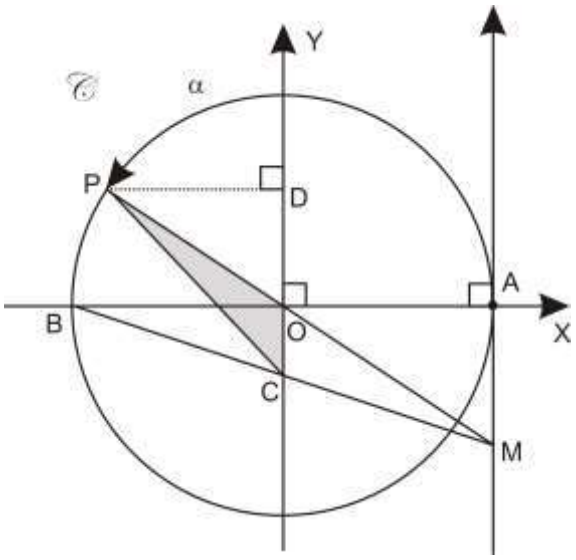
A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{6}$



Solución:

$AM = -tg\alpha,\ PD = -\cos\alpha$

$\Delta ABM \approx \Delta OBC$, luego $\frac{AB}{AM} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{2}{-tg\alpha} = \frac{1}{OC} \Rightarrow OC = -\frac{1}{2}tg\alpha$

$\therefore$ Área de la $RS = \frac{1}{2}.OC.PD = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}tg\alpha\right)(-\cos\alpha) = \underbrace{\left(\frac{1}{4}tg\alpha.\cos\alpha\right)}_{S}u^2$

Por consiguiente, $S = \frac{1}{4}tg\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{4}\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}.\cos\alpha = \frac{1}{4}sen\alpha$.

Finalmente $S.\csc\alpha = \frac{1}{4}sen\alpha.\csc\alpha = \frac{1}{4}$.

Rpta.: C

8. La municipalidad pretende colocar en un parque una zona para flores ornamentales, la cual está representada por la parte sombreada de la figura. Si el parque circular tiene radio 1 decámetro, calcule el área de la zona destinada para las flores ornamentales.

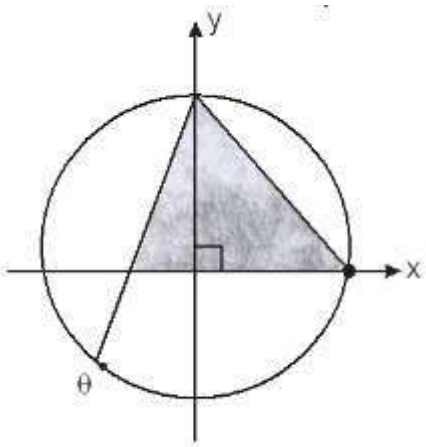
A) $\left(\dfrac{1+\sec\theta+\text{tg}\theta}{2}\right)\text{dm}^2$

B) $\left(\dfrac{1+\cos\theta+\text{sen}\theta}{2}\right)\text{dm}^2$

C) $\left(\dfrac{1-\sec\theta-\text{tg}\theta}{2}\right)\text{dm}^2$

D) $\left(\dfrac{1+\text{c tg}\theta+\text{sen}\theta}{2}\right)\text{dm}^2$

E) $\left(\dfrac{1-\text{tg}\theta+\text{ctg}\theta}{2}\right)\text{dm}^2$



Solución:

$$\frac{d}{1}=\frac{|\cos\theta|}{1+|\text{sen}\theta|}$$

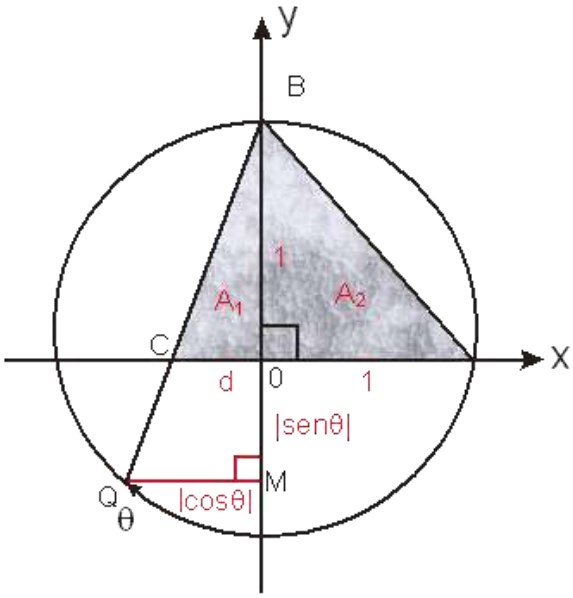
$$d=\frac{-\cos\theta}{1-\text{sen}\theta}$$

$$d=-\sec\theta-\text{tg}\theta \ \ldots\ (1)$$

Pide $A_1+A_2=\dfrac{d.1}{2}+\dfrac{1.1}{2}$

Reemplazando de (1)

$$\therefore\ A_1+A_2=\left(\frac{1-\sec\theta-\text{tg}\theta}{2}\right)\text{dm}^2.$$



Rpta.: C

9. En la circunferencia trigonométrica, determine el área del cuadrilátero ABPQ, si A es punto de tangencia.

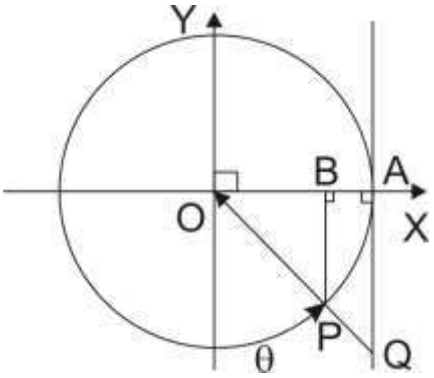
A) $-\frac{1}{2}\text{sen}^3\theta\sec\theta\ u^2$

B) $-\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\sec\theta\ u^2$

C) $-\frac{1}{2}\text{sen}^3\theta\sec^2\theta\ u^2$

D) $-\frac{1}{2}\text{sen}^3\theta\sec^3\theta\ u^2$

E) $-\frac{1}{2}\text{sen}^3\theta\csc\theta\ u^2$

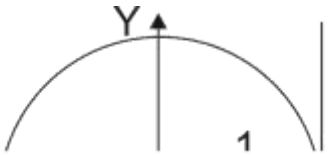


<u>Solución</u>:

$AB = 1-\cos\theta$

$\Delta ABP:\ S_1 = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)(-\text{sen}\theta)$

$\Delta APQ:\ S_2 = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)(-\text{tg}\theta)$



$S = S_1 + S_2$

$S = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)(-\text{sen}\theta) + \frac{1}{2}(1-\cos\theta)(-\text{tg}\theta)$

$S = -\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\{\text{sen}\theta + \text{tg}\theta\}$

$S = -\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\text{sen}\theta\left\{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}\right\}$

$S = -\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\text{sen}\theta\left\{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}\right\}$

$S = -\frac{1}{2}\text{sen}^3\theta\sec\theta$

Rpta.: A

10. En la figura, se muestra una pista circular de radio 1hm donde hay dos ciclistas A y B que parten simultáneamente en la misma dirección. En un determinado momento A y B se encuentran a $N\theta O$ y $S45°O$ del punto de partida, respectivamente. Si AD=BD, calcule el área de la región triangular OAC.

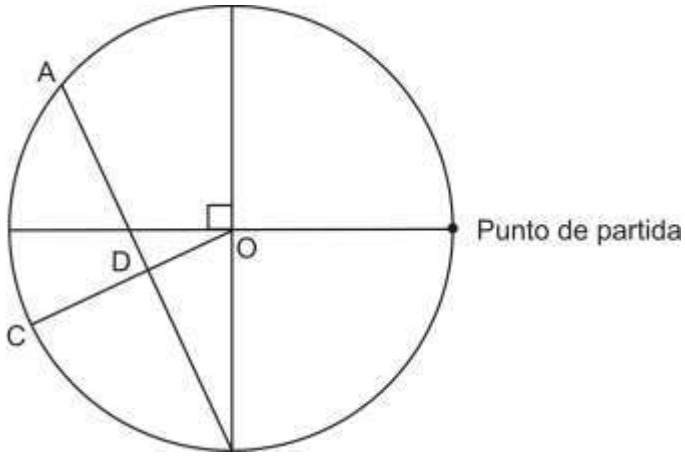
A) $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1+\text{sen}(2\theta)}\,\text{hm}^2$

B) $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1-\text{sen}(2\theta)}\,\text{hm}^2$

C) $\sqrt{1+\cos(2\theta)}\,\text{hm}^2$

D) $\frac{1}{2}\sqrt{1-\cos(2\theta)}\,\text{hm}^2$

E) $\frac{1}{2}\sqrt{\text{sen}(2\theta)+\cos(2\theta)}\,\text{hm}^2$



<u>Solución</u>:

Del enunciado:

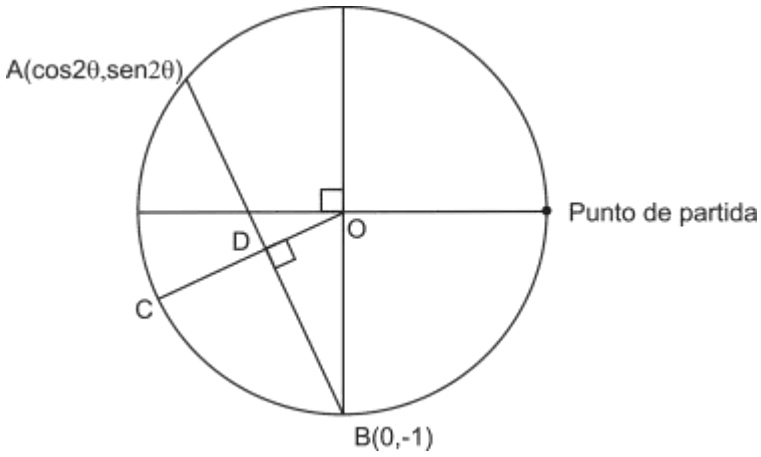
$$d(A;D)=\frac{1}{2}d(A;B)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2(2\theta)+(1+\text{sen}(2\theta))^2}$$

$$d(A;D)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\text{sen}(2\theta)}\,\text{hm}$$

Luego:

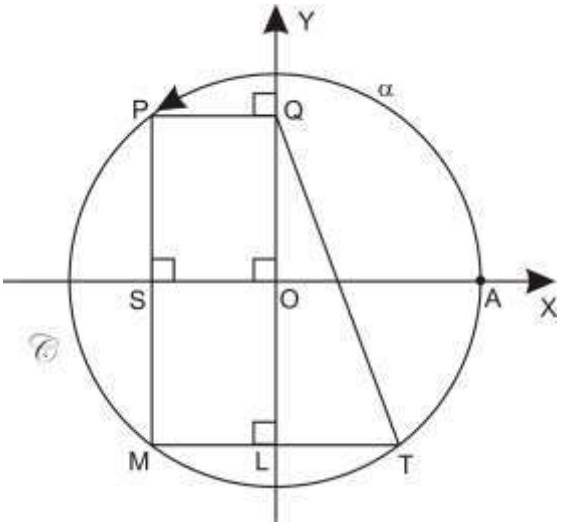
$$\text{Area}_{\Delta AOC}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1+\text{sen}(2\theta)}\,\text{hm}^2$$



Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Halle el área de la región limitada por el cuadrilátero PMTQ.



A) $(-\text{sen}2\alpha)u^2$

B) $\left(-\frac{1}{2}\text{sen}2\alpha\right)u^2$

C) $(-\cos 2\alpha)u^2$

D) $\left(-\frac{3}{2}\text{sen}\alpha\right)u^2$

E) $\left(-\frac{3}{2}\text{sen}2\alpha\right)u^2$

Solución:

$SO = -\cos\alpha,\ SP = \text{sen}\alpha,\ ML = LT = -\cos\alpha \Rightarrow MT = -2\cos\alpha$
$PS = SM \Rightarrow PM = 2\text{sen}\alpha$
El cuadrilátero PMTQ es un trapecio, por lo tanto,

$$\text{Área}(PMTQ) = \left[\frac{(-\cos\alpha)+(-2\cos\alpha)}{2}\right](2\text{sen}\alpha) = (-3\cos\alpha)\text{sen}\alpha$$

$$= -\frac{3}{2}(2\text{sen}\alpha.\cos\alpha) = \left(-\frac{3}{2}\text{sen}2\alpha\right)u^2$$

Rpta.: E

2. Si $E = 6\cos^2 2x - 6\left[\text{sen}^2(25\pi - 2x)\right]$, $\frac{\pi}{12} \le x \le \frac{\pi}{6}$, halle la diferencia entre el valor máximo de E y su valor mínimo.

A) 4 B) 0 C) 6 D) 8 E) 2

Solución:

$E = 6\cos^2 2x - 6\text{sen}^2 2x$

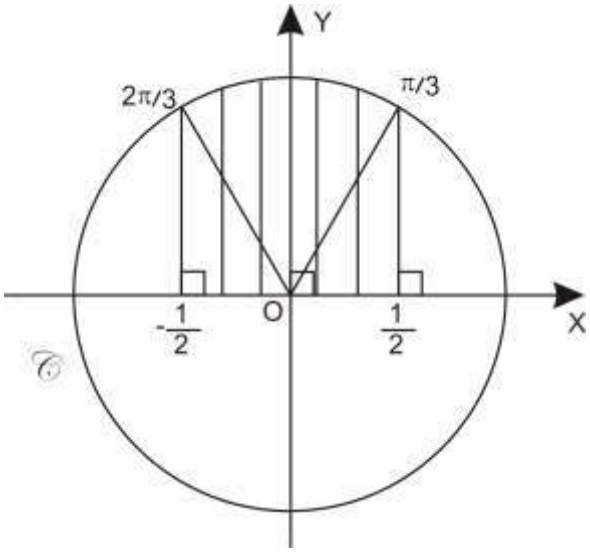
$E = 6\left(\cos^2 2x - \text{sen}^2 2x\right)$

$E = 6.\cos 4x,\ \frac{\pi}{3} \le 4x \le \frac{2\pi}{3}$

Observando la circunferencia trigonométrica $\mathscr{C}$, podemos afirmar que si $\frac{\pi}{3} \le 4x \le \frac{2\pi}{3}$ entonces

$-\frac{1}{2} \le \cos 4x \le \frac{1}{2} \Rightarrow -3 \le 6\cos 4x \le 3$

$\Rightarrow \text{máx}(E) - \text{mín}(E) = 3 - (-3) = 6$



Rpta.: C

3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, halle el área de la región sombreada.

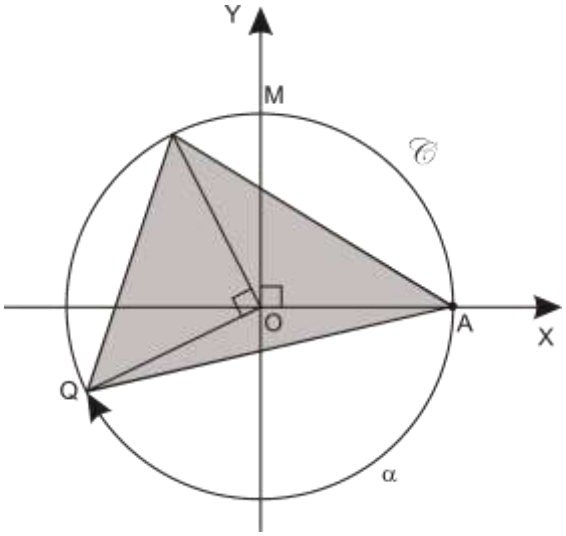
A) $\frac{1}{2}(1+\text{sen}\alpha - \cos\alpha)\ u^2$

B) $\frac{1}{2}(1-\text{sen}\alpha - \cos\alpha)\ u^2$

C) $\frac{1}{2}(1+\text{sen}\alpha + \cos\alpha)\ u^2$

D) $\frac{1}{2}(\text{sen}\alpha + \cos\alpha - 1)\ u^2$

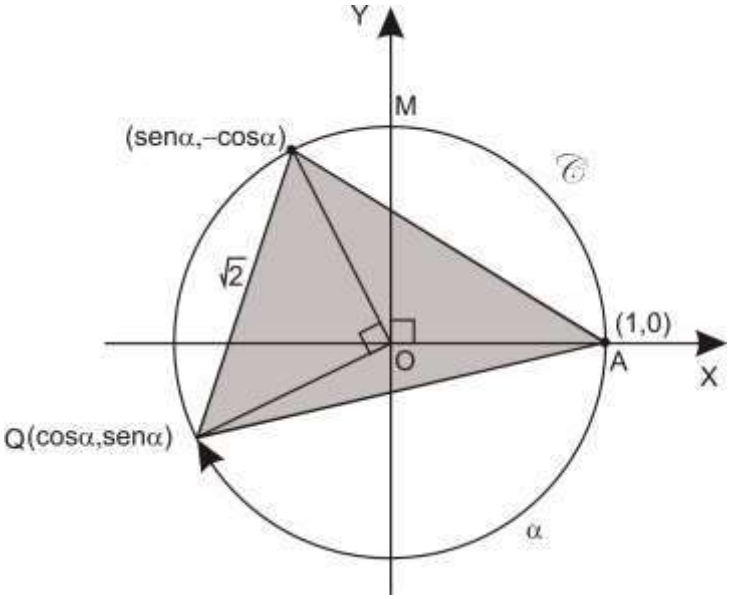
E) $(1-\text{sen}\alpha - \cos\alpha)\ u^2$



Solución:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A=\frac{1}{2}\left(1-\text{sen}\alpha-\cos\alpha\right)$$



Rpta.: B

4. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, calcule el área de la región sombreada.

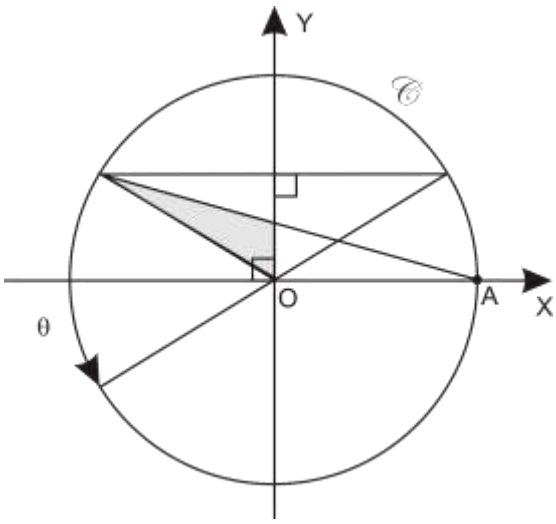
A) $\frac{1}{2}\left(\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}^2\theta}\right)$ u^2

B) $\frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen}2\theta}{\text{sen}^2\theta/2}\right)$ u^2

C) $\frac{1}{8}\left(\frac{\text{sen}2\theta}{\text{sen}^2\theta/2}\right)$ u^2

D) $\frac{1}{2}\left(\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}^2\theta/2}\right)$ u^2

E) $\frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen}2\theta}{\text{sen}^2\theta}\right)$ u^2

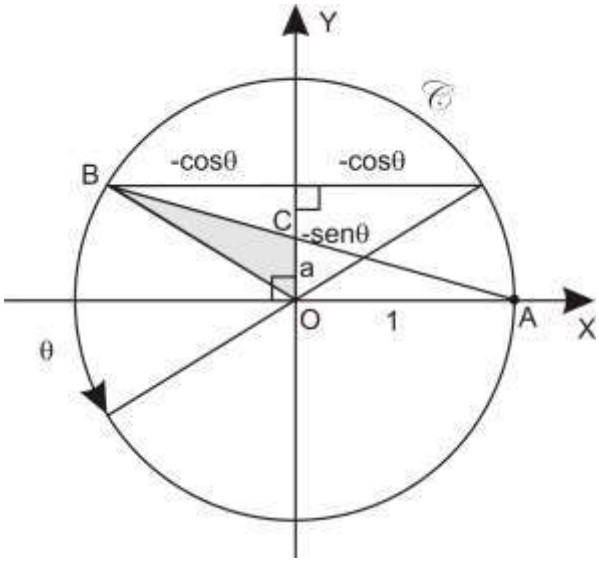


Solución:

$$\frac{a}{1}=\frac{-\text{sen}\theta}{1-\cos\theta}$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{-\text{sen}\theta}{1-\cos\theta}\right)(-\cos\theta)$$

$$A=\frac{1}{8}\left(\frac{\text{sen}2\theta}{\text{sen}^2\,\theta/2}\right)$$



Rpta.: C

5. En la figura, se muestra una vía principal circular, de 1km de radio y centro O, y vías alternas de una ciudad. Si en el punto P se encuentra una estación de servicios, calcule la distancia de la estación con la vía alterna OA.

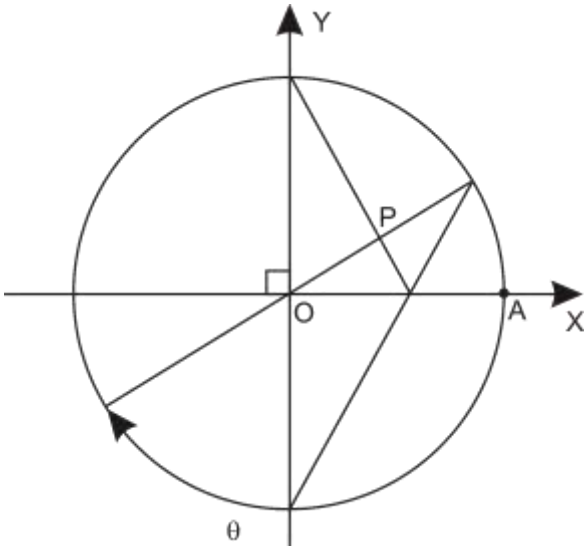
A) $\left(\frac{\text{tg}\theta}{1-\text{sen}\theta}\right)$km

B) $\left(\frac{2}{1-\sec\theta}\right)$km

C) $(\text{tg}2\theta)$km

D) $\left(\frac{1}{1+\text{ctg}\theta}\right)$km

E) $\left(\frac{1}{2-\csc\theta}\right)$km



Solución:

$PD = x$

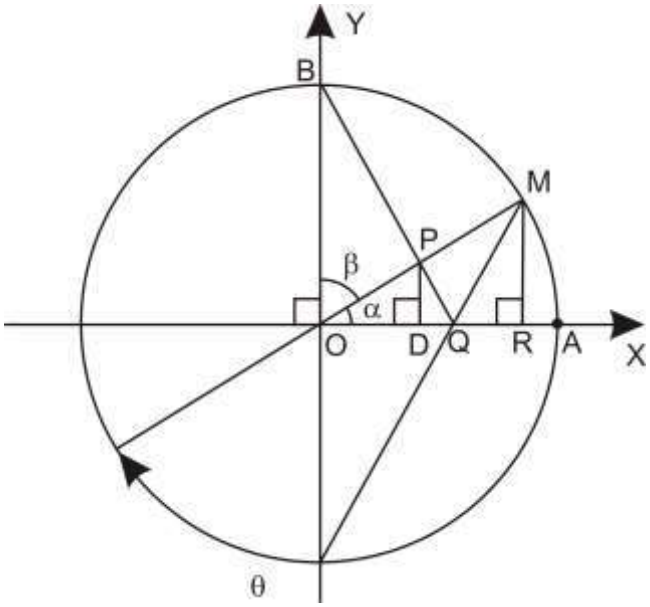
La solución del problema es x Km.

En la figura $\alpha + \beta = 90^{o} \wedge \alpha = \pi + \theta$

En el triángulo OMR: $MR = sen\alpha \quad OR$

En el $\Delta ODP : OD = xctg\alpha$

En el $\Delta MQR : QMR = \frac{\beta}{2}$, luego,



$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{QR}{sen\alpha} \Rightarrow QR = sen\alpha.tg\frac{\beta}{2}$$

$OD + DQ + QR = OR$, entonces

$$xctg\alpha + DQ + sen\alpha.tg\frac{\beta}{2} = \cos\alpha \Rightarrow$$

$$DQ = \cos\alpha - sen\alpha.tg\frac{\beta}{2} - xctg\alpha$$

$$OQ = OR - QR = \cos\alpha - sen\alpha.tg\frac{\beta}{2}$$

$$\Delta BOQ \approx \Delta PDQ \Rightarrow \frac{OB}{OQ} = \frac{x}{DQ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\alpha - sen\alpha.tg\frac{\beta}{2}} = \frac{x}{\cos\alpha - sen\alpha.tg\frac{\beta}{2} - xctg\alpha} \Rightarrow$$

$$x\left(\cos\alpha - sen\alpha.tg\frac{\beta}{2}\right) = \cos\alpha - sen\alpha.tg\frac{\beta}{2} - xctg\alpha$$

$$x\left(\cos\alpha - sen\alpha.tg\frac{\beta}{2}\right) = \cos\alpha - sen\alpha.tg\frac{\beta}{2} - xctg\alpha$$

$$x\left(\cos\alpha - sen\alpha.\frac{sen\beta}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}\right) = \cos\alpha - sen\alpha.\frac{sem\beta}{2\cos^2\frac{\beta}{2}} - xctg\alpha$$

$$x\left(\cos\alpha - sen\alpha.\frac{sen\beta}{1+\cos\beta}\right) = \cos\alpha - sen\alpha.\frac{sem\beta}{1+\cos\beta} - xctg\alpha$$

$$x\left(\frac{\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta}{1+\cos\beta}\right) = \frac{\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sem\beta}{1+\cos\beta} - xctg\alpha$$

$$x\left(\frac{\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)}{1+\cos\beta}\right)=\frac{\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)-\text{sen}\alpha\text{sem}\beta}{1+\cos\beta}-x\text{ctg}\alpha$$

$$x\left(\frac{\cos\alpha}{1+\cos\beta}\right)=\frac{\cos\alpha}{1+\cos\beta}-x\text{ctg}\alpha$$

$$x\left(\frac{\cos\alpha}{1+\cos\beta}+\text{ctg}\alpha\right)=\frac{\cos\alpha}{1+\cos\beta}\Rightarrow x\left(\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\cos\beta\right)=\cos\alpha\Rightarrow$$

$$x\left(1+\frac{1}{\text{sen}\alpha}+\text{ctg}\alpha\right)=1$$

$$x=\frac{\text{sen}\alpha}{1+\text{sen}\alpha+\cos\beta}$$

$$x=\frac{\text{sen}\alpha}{1+2\text{sen}\alpha}=\frac{-\text{sen}\theta}{1-2\text{sen}\theta}=\frac{1}{2-\frac{1}{\text{sen}\theta}}=\frac{1}{2-\csc\theta}$$

Rpta.: E

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Con la información dada en la figura, donde $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, halle el valor de la expresión $4\text{sen}\left(\frac{25\pi}{2}+\beta\right)-3\text{sen}(175\pi+\alpha)$.

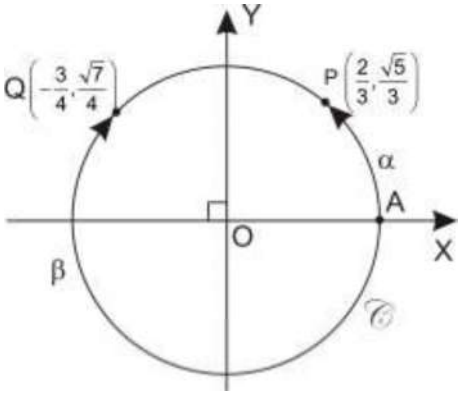
A) $\sqrt{5}+2$

B) $\sqrt{3}-3$

C) $\sqrt{2}-2$

D) $\sqrt{5}-3$

E) $\sqrt{5}+3$



Solución:

Sea E el número buscado, luego,

$$E=4\text{sen}\left(\frac{25\pi}{2}+\beta\right)-3\text{sen}(175\pi+\alpha)$$

$$E=4\left(-\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-3+\sqrt{5}$$

Rpta.: D

2. Si el área de la región limitada por el triángulo ABT es $S\ u^2$, halle el valor de $(1+\cos\alpha).S$., donde $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica.

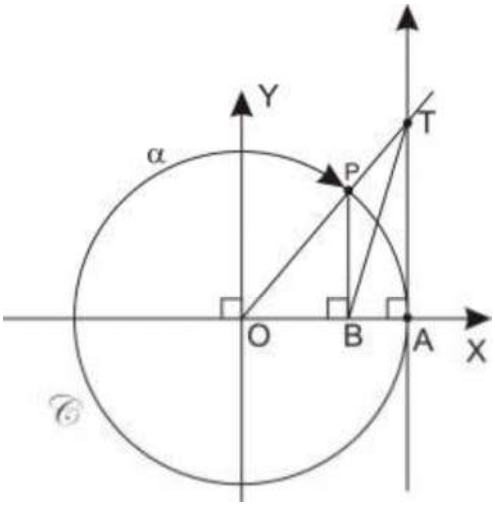
A) $\frac{1}{2}\text{sen}^3\alpha.\sec\alpha$

B) $\frac{1}{3}\text{sen}^3\alpha.\sec\alpha$

C) $\frac{1}{2}\text{sen}^3\alpha.\cos\alpha$

D) $\frac{1}{2}\text{sen}^2\alpha.\sec\alpha$

E) $\frac{1}{3}\text{sen}^2\alpha.\sec\alpha$



Solución:

Área de la región triangular ABT: $\left(\frac{1}{2}.AB.AT\right)u^2 \cdots (I)$

$AT = tg\alpha, \quad BA = 1-\cos\alpha \cdots (II)$

Llevando (II) en (I):

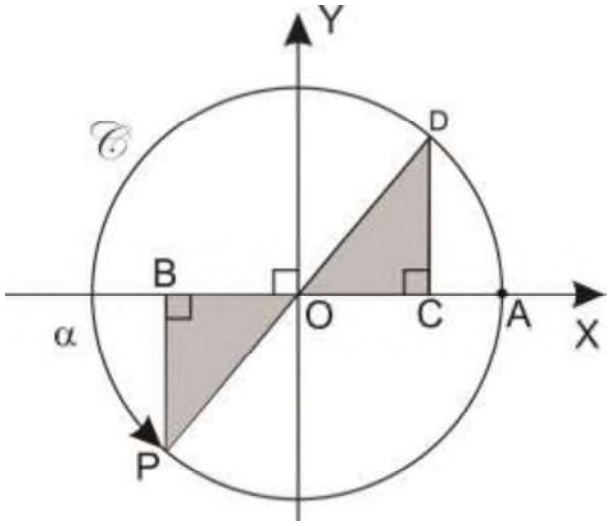
$$\text{Área}(ABT) = \left(\underbrace{\frac{1}{2}.tg\alpha.(1-\cos\alpha)}_{S}\right)u^2$$

$$S = \left(\frac{1}{2}.tg\alpha.(1-\cos\alpha)\right) \Rightarrow (1+\cos\alpha)S = \frac{1}{2}.tg\alpha.(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}tg\alpha.sen^2\alpha = \frac{1}{2}sen^3\alpha\sec\alpha$$

Rpta.: A

3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si S u^2 es el área de la región sombreada, halle $8S^2$.



A) $1-\cos 4\alpha$

B) $1+\cos 4\alpha$

C) $1-\cos 2\alpha$

D) $1+\cos 2\alpha$

E) $-\cos 4\alpha$

Solución:

$OBP \cong OCD$

$OB = -\cos\alpha, \quad BP = -sen\alpha$

$$\text{Área}(OBP) = \frac{1}{2}(-\cos\alpha)(-sen\alpha)u^2$$

$$\text{Área}(2S) = (sen\alpha\cos\alpha)u^2$$

$$S = \frac{1}{2}(2sen\alpha\cos\alpha) = \frac{1}{2}sen2\alpha$$

$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}sen^2 2\alpha \Rightarrow S^2 = \frac{1}{8}2sen^2 2\alpha = \frac{1}{8}(1-\cos 4\alpha)$$

Finalmente, $8S^2 = 1-\cos 4\alpha$

Rpta.: A

4. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica y M es el punto medio de $\overline{DT}$. Halle la suma de las coordenadas de M, si $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

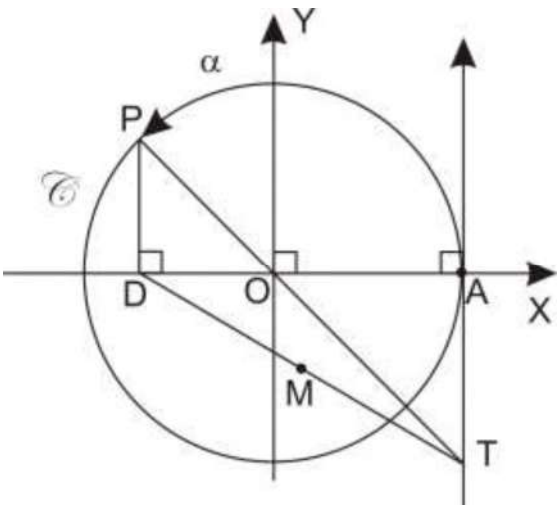
A) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



Solución:

$OD = \cos\alpha$
$AT = tg\alpha$; luego,
$D(\cos\alpha, 0)$, $T(1, tg\alpha)$. Por consiguiente,
$M\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}, \frac{0+tg\alpha}{2}\right)$; luego,
$\sum : \frac{1+\cos\alpha+tg\alpha}{2}$, siendo $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, entonces la suma buscada es:

$$\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}+(-1)}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Rpta.: A

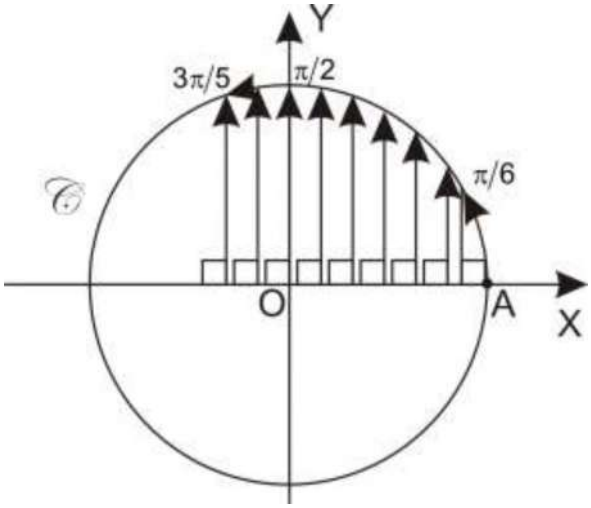
5. Si $E = 5 + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$, $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{3\pi}{5}$; halle el valor de x para el cual E asuma su valor mínimo.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{3\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{5}$

Solución:

$$E = 5 + 4\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right),\ \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{3\pi}{5}$$

Observando la circunferencia trigonométrica, podemos afirmar que $\frac{1}{2} \le \text{sen}x \le 1$, $-2 \ge -4\text{sen}x \ge -4 \Rightarrow 3 \ge 5 - 4\text{sen}x \ge 1 \Rightarrow 1 \le E \le 3$, luego, el valor mínimo de E es 1 ¿Dónde lo toma? $E = 5 - 4\text{sen}a = 1 \Rightarrow 4 = 4\text{sen}a \Rightarrow \text{sen}a = 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$



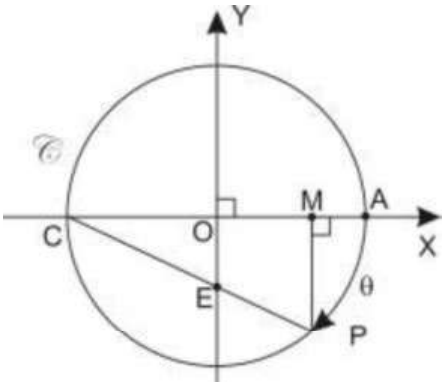
Rpta.: A

6. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, halle OE.

A) $-\text{tg}\frac{\theta}{2}$ B) $-\text{ctg}\frac{\theta}{2}$

C) $-\frac{1}{2}\text{tg}\frac{\theta}{2}$ D) $-\frac{1}{4}\text{tg}\theta$

E) $-\text{tg}\theta$



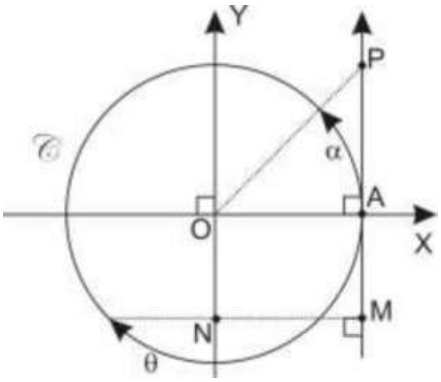
Solución:

$CMP \approx COE$
$OM = \cos\theta,\ MP = -\text{sen}\theta$

$$v\ \frac{MP}{CM} = \frac{OE}{CO} \Rightarrow \frac{-\text{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{OE}{1} \Rightarrow \frac{-2\text{sen}\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\text{tg}\frac{\theta}{2}$$

Rpta.: A

7. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si S u^2 es el área de la región, limitada por el cuadrilátero PMNO, halle el valor de $2S.\text{ctg}\alpha.\csc\theta$.



A) $\csc\theta - 2\text{ctg}\alpha$

B) $\csc\theta + 2\text{ctg}\alpha$

C) $\sec\theta - 2\text{ctg}\alpha$

D) $\sec\theta - 2\text{tg}\alpha$

E) $\sec\theta - \text{tg}\alpha$

Solución:

$ON = -\text{sen}\theta = AM$

$AP = \text{tg}\alpha,\ NM = 1$

El cuadrilátero PMNO es un trapecio rectangular cuyas bases son $\overline{ON}$ (menor), $\overline{PM}$ (mayor) y su altura mide una unidad. Luego,

$$\text{Área}(PMNO) = \frac{(\text{tg}\alpha + (-\text{sen}\theta)) + (-\text{sen}\theta)}{2}.1$$

$$\text{Área} = \underbrace{\frac{(\text{tg}\alpha + (-\text{sen}\theta)) + (-\text{sen}\theta)}{2}}_{S} u^2$$

Por consiguiente,

$$S = \frac{\text{tg}\alpha - 2\text{sen}\theta}{2}$$

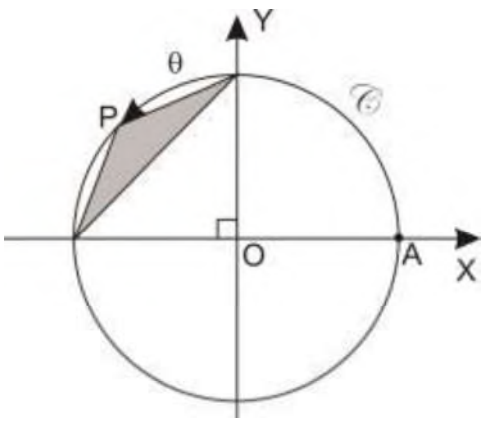
$$\Rightarrow 2S = \text{tg}\alpha - 2\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow 2S.\text{ctg}\alpha.\csc\theta = (\text{tg}\alpha - 2\text{sen}\theta)\text{ctg}\alpha.\csc\theta$$

$$= \csc\theta - 2\text{ctg}\alpha$$

Rpta.: A

8. En la circunferencia trigonométrica $\mathscr{C}$ mostrada, halle el área de la región sombreada.



A) $\cos\frac{\theta}{2}\left(\text{sen}\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)u^2$

B) $\cos\frac{\theta}{2}\left(\text{sen}\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)u^2$

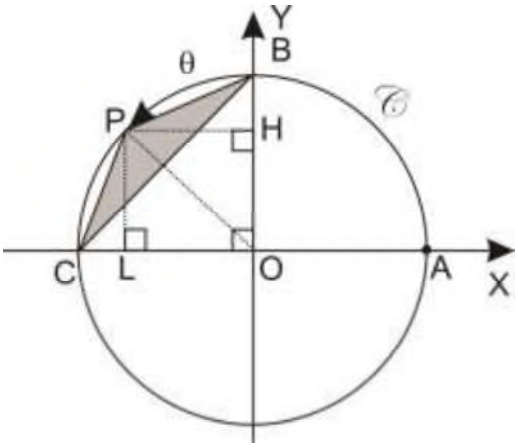
C) $\text{tg}\frac{\theta}{2}\left(\text{sen}\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)u^2$

D) $\text{ctg}\frac{\theta}{2}\left(\text{sen}\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)u^2$

E) $2\cos\frac{\theta}{2}\left(\text{sen}\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right)u^2$

Solución:

$$OL = -\cos\theta$$
$$OH = \operatorname{sen}\theta$$
$$\text{Área}(RS) = \text{Área}(POC) + \text{Área}(POB) - \text{Área}(BOC)$$
$$= \frac{1}{2}(1)\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}(1)(-\cos\theta) - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\theta - (1+\cos\theta)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$
$$= \cos\frac{\theta}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right]$$



Rpta.: A

9. Dos atletas y su entrenador están sobre una pista circular cuyo radio mide 1 hm. El entrenador se ubica en el punto B como lo muestra la figura. Si ambos atletas parten del punto A, en sentido antihorario, y después de un tiempo el atleta más rápido ha recorrido un arco θ. Halle la distancia del atleta más lento con respecto al entrenador (los atletas se han ubicado al final en los puntos P y Q).

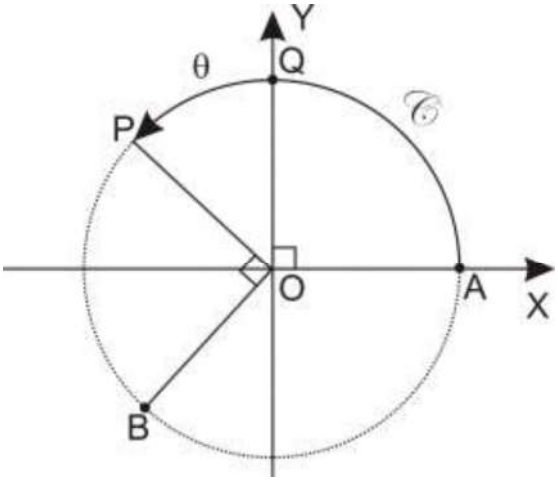
A) $2\cos\frac{\theta}{2}$ hm

B) $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ hm

C) $\cos\theta$ hm

D) $2\cos\theta$ hm

E) $2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ hm



Solución:

$$Q(0,1),\ B\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$$
$$B(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$
$$d(B,Q) = \sqrt{(-\operatorname{sen}\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2}$$
$$d(B,Q) = \sqrt{(\operatorname{sen}\theta)^2 + 1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta}$$

$d(B,Q)=\sqrt{2(1-\cos\theta)}=$

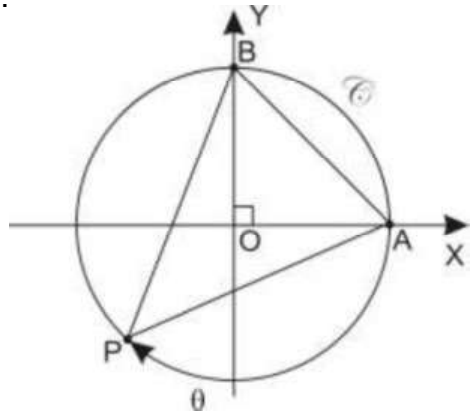
$\sqrt{2.2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}=2\left|\text{sen}\frac{\theta}{2}\right|$

Como $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$, luego, siendo $\frac{\theta}{2}$ agudo, tendremos, finalmente, que

$d(B,Q)=2\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ hm

Rpta.: E

10. Sobre una plaza de forma circular de radio 1 dam, se desea ubicar un espacio de forma triangular, para el patio de comidas (ver figura). Si el área de dicho espacio es $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\text{dam}^2$., halle el valor de θ.



A) $-\frac{3\pi}{4}$

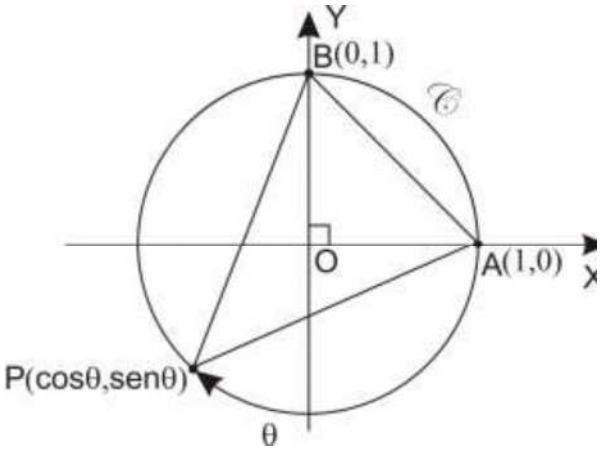
B) $-\frac{2\pi}{3}$

C) $-\frac{3\pi}{5}$

D) $-\frac{5\pi}{9}$

E) $\frac{\pi}{9}$

Solución:



$Q(0,1),\ B\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)$

$S=\frac{1}{2}(1+0+0-\cos\theta-\text{sen}\theta+0)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}(1+0+0-\cos\theta-\text{sen}\theta+0)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos\theta+\text{sen}\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$

$\cos\theta+\text{sen}\theta=-\sqrt{2}$

$\sqrt{2}\text{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\Rightarrow\text{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow\theta+\frac{\pi}{4}=-90^\circ\Rightarrow\theta=-135^\circ$

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle la suma de las coordenadas del punto M el cual pertenece al segmento de recta PQ para el cual es cierto que $\frac{PM}{MQ}=\frac{1}{2}$ ($\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica).

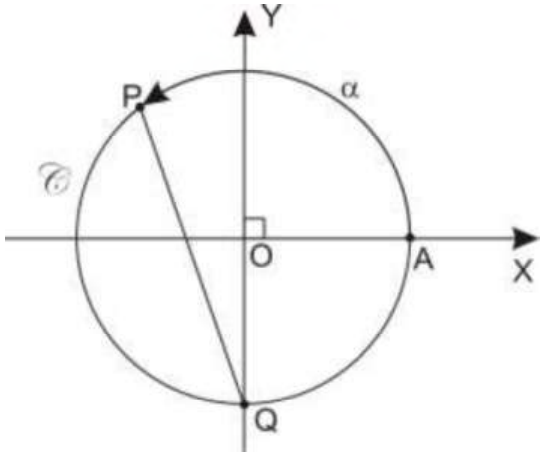
A) $2(\cos\alpha+\text{sen}\alpha)-1$

B) $2(\text{sen}\alpha-\cos\alpha)$

C) $2\cos\alpha-\text{sen}\alpha+1$

D) $\frac{\cos\alpha+\text{sen}\alpha}{2}$

E) $\frac{2(\cos\alpha+\text{sen}\alpha)-1}{3}$



Solución:

$P(\cos\alpha,\text{sen}\alpha)$, $Q(0,-1)$

Sea $M(x,y)\in\overline{PQ}$

$\frac{PM}{MQ}=\frac{1}{2}=r$

(razón de división del segmento PQ)

$$x=\frac{\cos\alpha+\frac{1}{2}(0)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\cos\alpha}{3};\ y=\frac{\text{sen}\alpha+\frac{1}{2}(-1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2\text{sen}\alpha-1}{3}$$

$$\therefore M=\left(\frac{2\cos\alpha}{3},\frac{2\text{sen}\alpha-1}{3}\right)$$

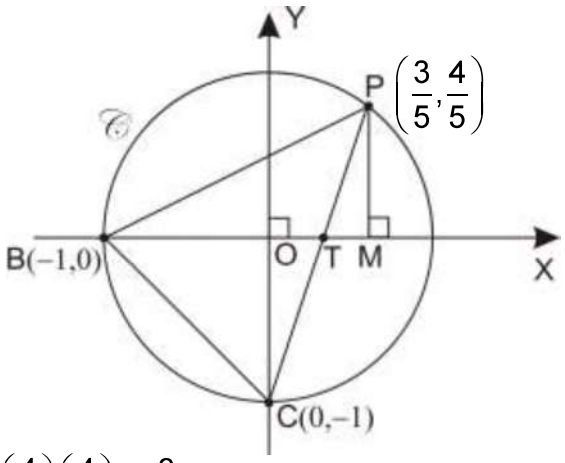
$$\sum\frac{2\cos\alpha}{3}+\frac{2\text{sen}\alpha-1}{3}=\frac{2(\cos\alpha+\text{sen}\alpha)-1}{3}$$

Rpta.: E

2. En un sistema rectangular de coordenadas cartesianas, tres de los siguientes puntos pertenecen a la circunferencia trigonométrica: $B(-1,0)$, $C(0,-1)$, $P\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ y $Q\left(\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right)$. Halle el área de la región triangular cuyos vértices pertenecen a la circunferencia trigonométrica.

A) $\frac{6}{5}u^2$ B) $1{,}3\ u^2$ C) $\frac{7}{6}\ u^2$ D) $\frac{8}{7}\ u^2$ E) $\frac{9}{8}\ u^2$

Solución:



$\text{Área}(BCP) = \text{Área}(BTC) + \text{Área}(BTP)$

$OTC \approx TMP$, luego,

$\frac{PM}{1} = \frac{TM}{OT} \Rightarrow \frac{TM}{OT} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \frac{TM + OT}{OT} = \frac{4+5}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5}}{OT} = \frac{9}{5} \Rightarrow OT = \frac{1}{3}$

$\text{Área}(BTC) = \frac{1}{2}(1)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}$; $\text{Área}(BTP) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$

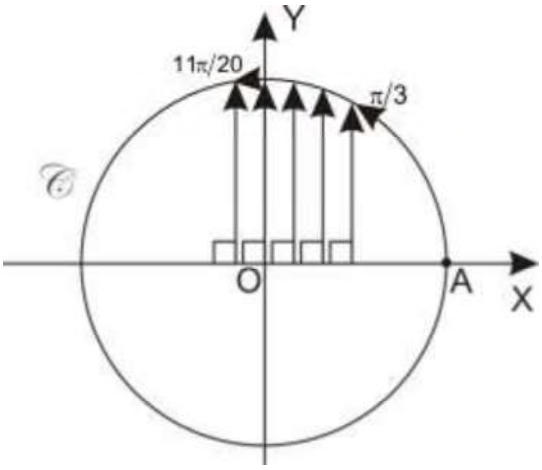
Finalmente, $\text{Área}(BCP) = \frac{2}{3} + \frac{8}{15} = \frac{6}{5}$.

Rpta.: A

3. Si $E = \text{sen}\alpha + \cos\alpha$, $\frac{\pi}{12} \le \alpha \le \frac{3\pi}{10}$, halle el producto del valor máximo de E con su valor mínimo.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

Solución:



$E = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right)$

$E = \sqrt{2}\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{\pi}{12} \le \alpha \le \frac{3\pi}{10}$; luego,

$15^o + 45^o \le \alpha + \frac{\pi}{4} \le 54^o + 45^o \Rightarrow 60^o \le \alpha + \frac{\pi}{4} \le 99^o$

Si $\frac{\pi}{3} \le \alpha + \frac{\pi}{4} \le \frac{11\pi}{20}$ y teniendo en cuenta la circunferencia trigonométrica, podemos afirmar que $\frac{\sqrt{3}}{2} \le \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} \le \sqrt{2}\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} \le E \le \sqrt{2}$

$\text{Max}(E) = \sqrt{2}$, $\text{Min}(E) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{3}$

Rpta.: D

4. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Con la información que se da en la $\mathscr{C}$, halle MN, si $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

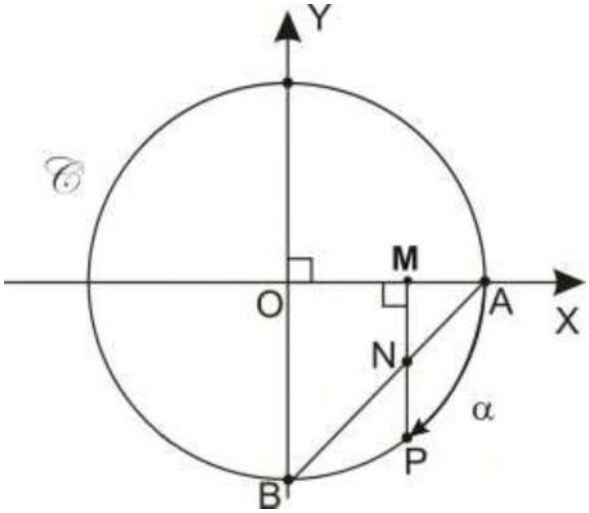
A) $\frac{1}{2}$ u

B) $\frac{2}{3}$ u

C) $\frac{1}{3}$ u

D) $\frac{1}{4}$ u

E) $\frac{3}{5}$ u



Solución:

$OM = \cos\alpha$; $OAB = 45º$, luego MA=MN

MA= $1-\cos\alpha \Rightarrow MN = 1-\cos\alpha$

$MN = 1-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Rpta.: A

5. En un parque de forma circular (su radio mide un hectómetro), se coloca gras sintético sobre toda la región triangular QRN para recreación de los niños tal como se muestra en la figura. Halle el área de la región QRN.

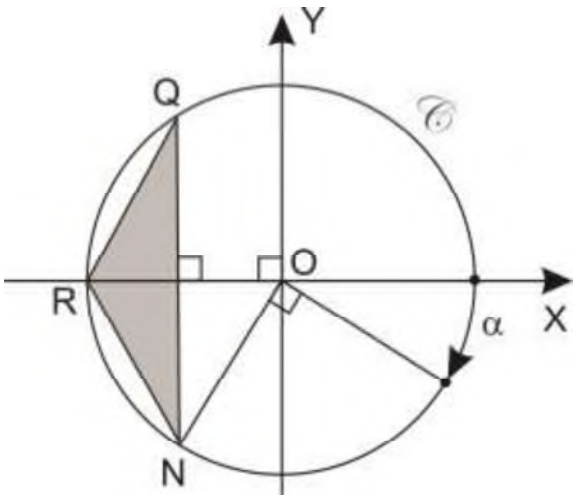
A) $\text{sen}\alpha\left(1+\cos^2\alpha\right)$ hm^2

B) $\cos\alpha\left(1-\text{sen}\alpha\right)$ hm^2

C) $\text{sen}^2\alpha\left(1-\cos\alpha\right)$ hm^2

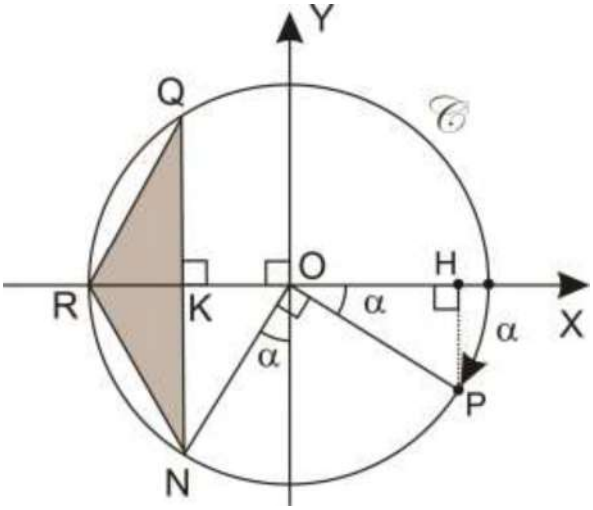
D) $\cos\alpha\left(1+\text{sen}\alpha\right)$ hm^2

E) $\text{sen}\alpha\left(1+\cos\alpha\right)$ hm^2



Solución:

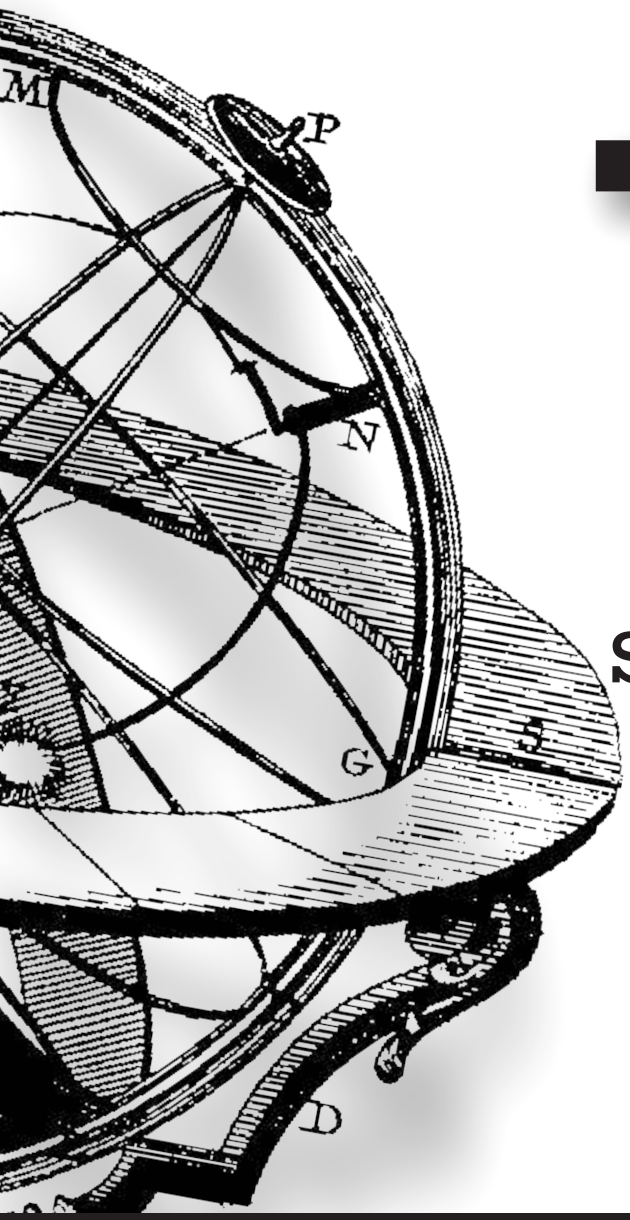
$OH = \cos\alpha$
$HP = -\text{sen}\alpha$
$OHP \cong NKO$
$\Rightarrow OH = KN = KQ = \cos\alpha$
$\wedge OK = -\text{sen}\alpha \quad QN = 2\cos\alpha$
$\Rightarrow RK = 1-(-\text{sen}\alpha) = 1+\text{sen}\alpha$
Por lo tanto, área del triángulo
$$QRN = \frac{2\cos\alpha(1+\text{sen}\alpha)}{2}$$
$$QRN = \cos\alpha(1+\text{sen}\alpha)\,hm^2$$



Rpta.: D

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



14

semana

pre

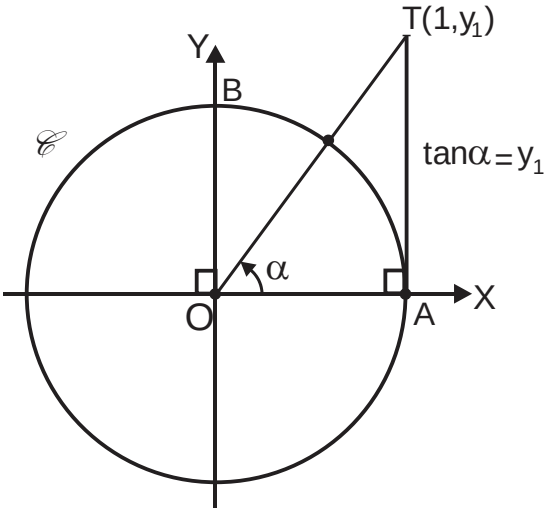
Manhattan Editores

Trigonometría

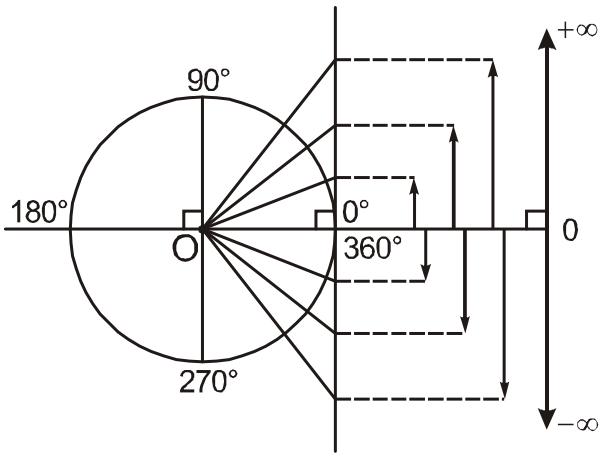
CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA II

III. Línea tangente

Es la ordenada del punto de intersección entre la tangente trazada por el origen de arcos A y la prolongación del radio que pasa por el punto extremo del arco AP.



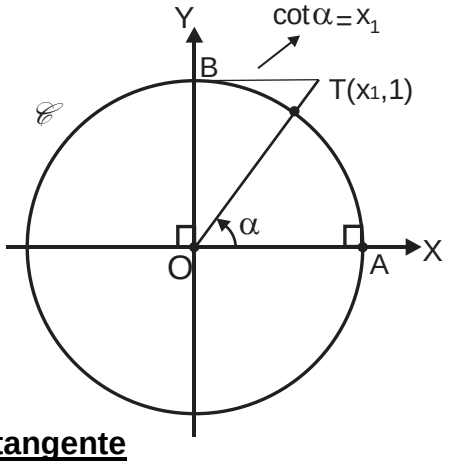
Análisis de la línea tangente



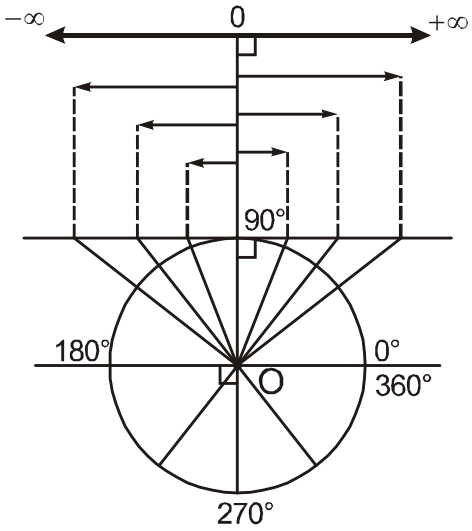
$-\infty < \tan\alpha < +\infty$

IV. Línea cotangente

Es la abscisa del punto de intersección entre la tangente trazada por el origen de complementos B y la prolongación del radio que pasa por el punto extremo del arco AP.



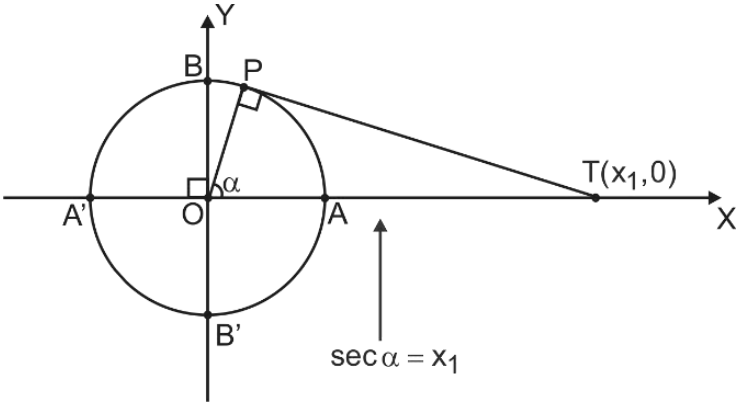
Análisis de la línea cotangente



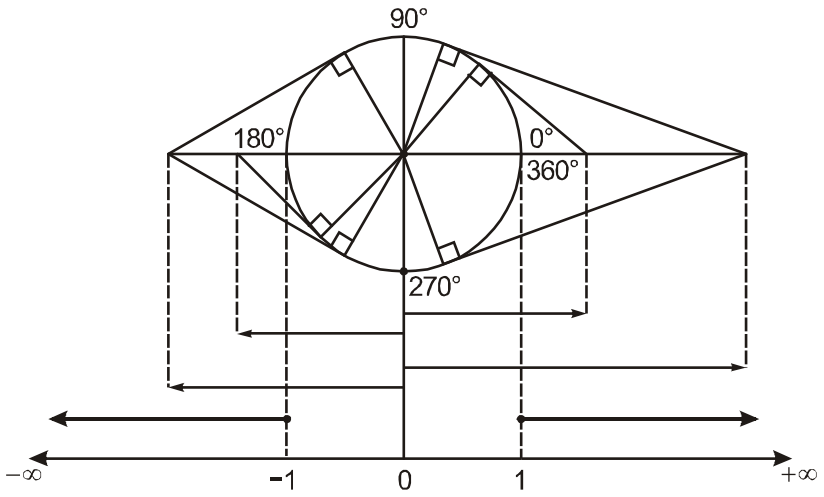
$$-\infty < \cot\alpha < +\infty$$

V. Línea secante

Es la abscisa del punto de intersección entre la tangente trazada por el extremo del arco AP y eje de abscisas.



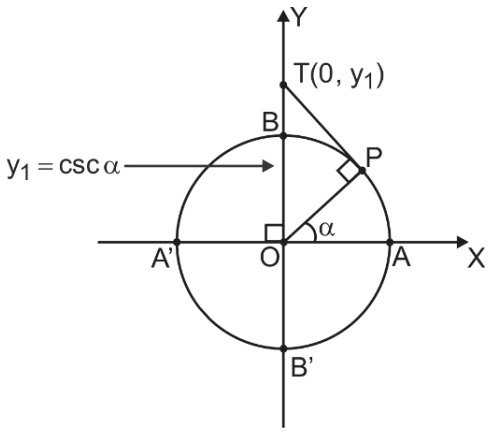
Análisis de la línea secante



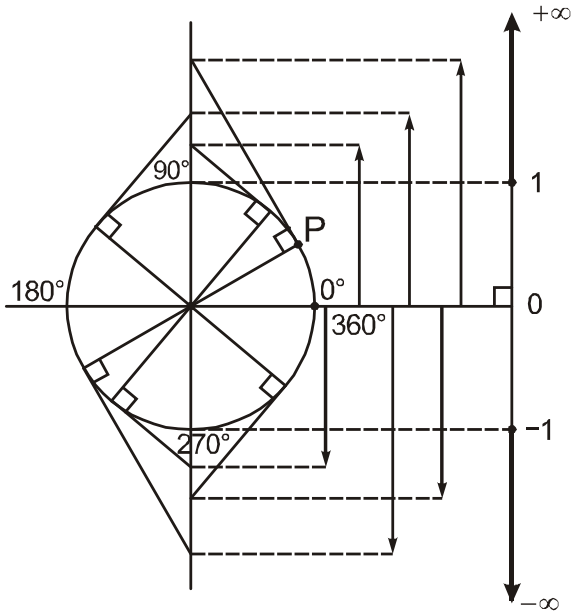
$\sec\alpha \leq -1 \quad \vee \quad \sec\alpha \geq 1$

VI. Línea cosecante

Es la ordenada del punto de intersección entre la tangente trazada por el extremo del arco AP y el eje de ordenadas.



Análisis de la línea cosecante



$\csc\alpha \leq -1 \quad \vee \quad \csc\alpha \geq 1$

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si θ es un arco del cuarto cuadrante, determine el conjunto formado por todos los valores de a para los cuales $\cot\theta = \dfrac{6a-4}{3}$ no existe.

A) $\left\langle \dfrac{3}{2}; +\infty \right\rangle$ B) $\left\langle \dfrac{2}{3}; +\infty \right\rangle$ C) $\left\langle \dfrac{1}{3}; +\infty \right\rangle$ D) $\left[\dfrac{2}{3}; +\infty \right\rangle$

Solución:

Se tiene $\dfrac{3\pi}{2} \le \theta < 2\pi$, entonces $\cot\theta \le 0 \Rightarrow \dfrac{6a-4}{3} \le 0 \Rightarrow a \le \dfrac{2}{3}$

Entonces $a \in \left\langle -\infty; \dfrac{2}{3} \right]$, luego $a \notin \left\langle \dfrac{2}{3}; +\infty \right\rangle$

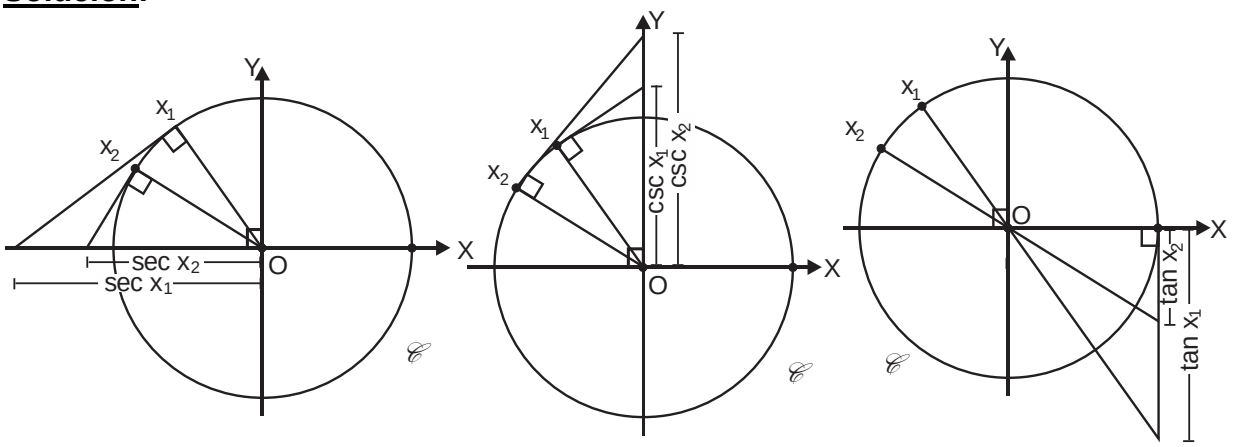
Rpta.: B

2. En la circunferencia trigonométrica, si $\dfrac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\sec x_1 > \sec x_2$.
II. $\csc x_1 < \csc x_2$.
III. $\tan x_1 > \tan x_2$.

A) FVF B) VFF C) VVF D) FFV

Solución:



$\sec x_1 < \sec x_2$ $\csc x_1 < \csc x_2$ $\tan x_1 < \tan x_2$

Rpta.: A

3. Halle el sueldo de un médico que está determinado por el valor mínimo de la expresión $\dfrac{3\cos^2\theta+2\cos\theta+1}{\cos^2\theta}$ en miles de soles, si $\dfrac{5\pi}{3}\le\theta\le 2\pi$.

A) S/ 8000 B) S/ 5000 C) S/ 6000 D) S/ 9000

Solución:

$$\frac{3\cos^2\theta+2\cos\theta+1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta+2\sec\theta+3=(\sec\theta+1)^2+2$$

Pero $\dfrac{5\pi}{3}\le\theta\le 2\pi\Rightarrow 1\le\sec\theta\le 2\Rightarrow 2\le\sec\theta+1\le 3$

$$\Rightarrow 4\le(\sec\theta+1)^2\le 9\Rightarrow 6\le(\sec\theta+1)^2+2\le 11$$

Luego, el sueldo del médico es S/ 6000.

Rpta.: C

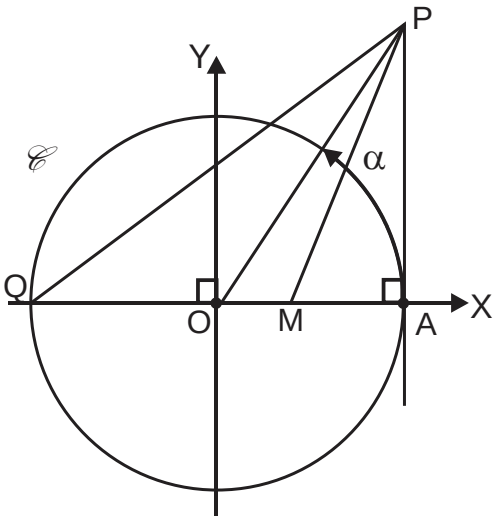
4. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si M es el punto de trisección de $\overline{OA}$ más cercano al origen, halle el área de la región triangular MPQ.

A) $\dfrac{4}{3}\tan\alpha\ u^2$

B) $\dfrac{3}{2}\tan\alpha\ u^2$

C) $3\tan\alpha\ u^2$

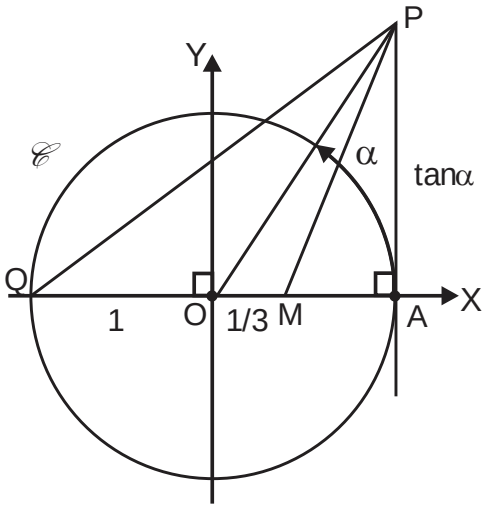
D) $\dfrac{2}{3}\tan\alpha\ u^2$



Solución:

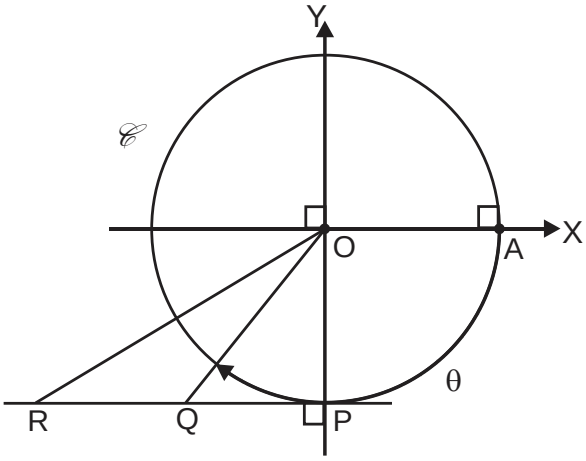
El área de la región triangular MPQ:

$$S_{MPQ} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)\tan\alpha\ u^2 = \frac{2}{3}\tan\alpha\ u^2$$



Rpta.: D

5. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si $PQ = QR$, halle la suma de coordenadas del punto R.



A)

B)

C)

D) $2\cot\theta - 2$

Solución:

De la figura $PQ = QR$, además las coordenadas de $Q(-\cot\theta, -1)$,

Entonces $R(-2\cot\theta, -1)$. Luego la suma de las coordenadas del punto R es

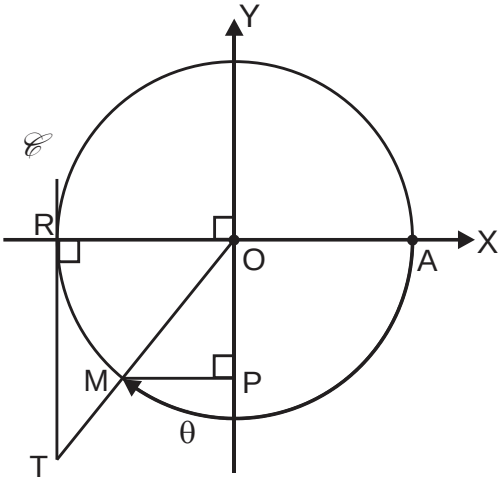
$$-2\cot\theta - 1 .$$

$-2\cot\theta - 1$

Rpta.: B

$\cot\theta - 1$

6. La figura muestra un patio circular (circunferencia trigonométrica) de 1 dam de radio y el cuadrilátero OPTR está destinado a un área de seguridad. Calcule el área de la zona de seguridad.



A) $\frac{1}{2}\tan\theta\cdot\text{sen}\frac{\theta}{2}$ dam^2

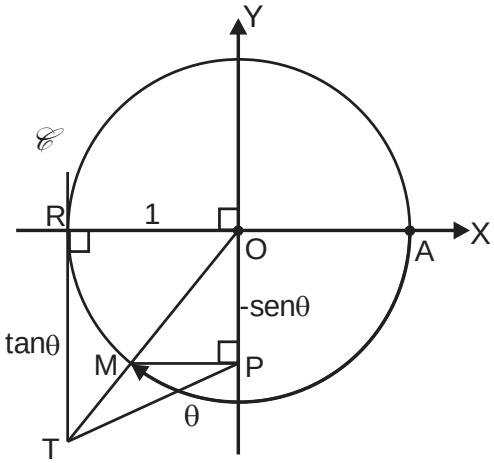
B) $\tan\theta.\text{sen}\theta$ dam^2

C) $\tan\theta.\text{sen}^2\frac{\theta}{2}$ dam^2

D) $\frac{1}{2}\tan\theta.\text{sen}^2\theta$ dam^2

Solución:

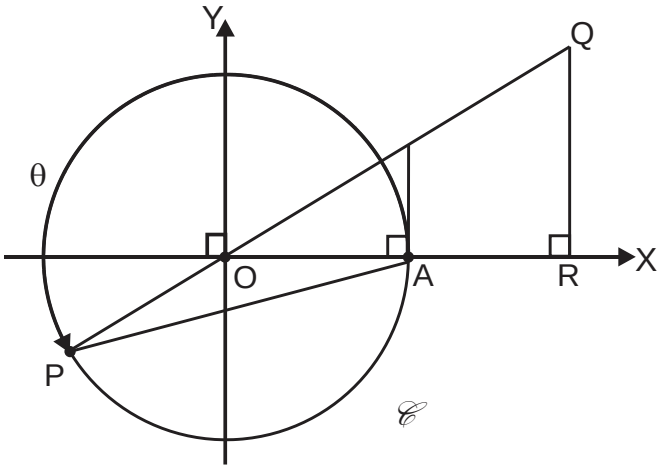
De la figura, el área de la región del cuadrilátero OPTR es:



$$S_{OPTR}=\frac{1}{2}(\tan\theta-\text{sen}\theta).1=\frac{1}{2}\tan\theta(1-\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\tan\theta.2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}=\tan\theta.\text{sen}^2\frac{\theta}{2}\text{ dam}^2$$

Rpta.: C

7. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si $OA=AR$, halle el área de la región limitada por el cuadrilátero PQRA.



A) $\frac{1}{2}\tan\theta.(4-\cos\theta)$ u^2

B) $\frac{1}{2}\tan\theta.(2-\cos\theta)$ u^2

C) $\frac{1}{2}\tan\theta.(4-\text{sen}\theta)$ u^2

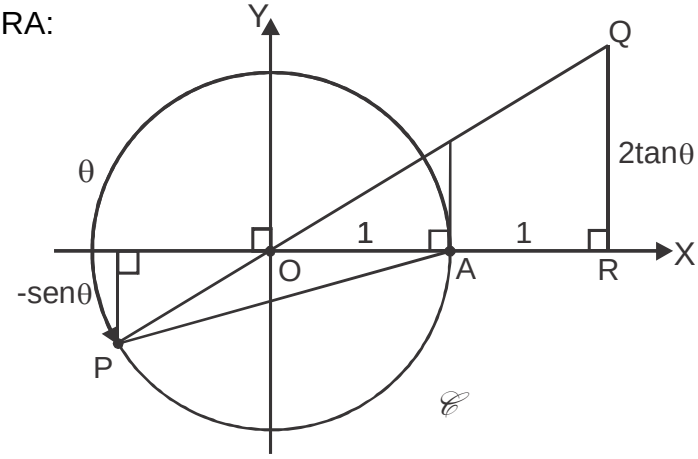
D) $\tan\theta.(4-\cos\theta)$ u^2

Solución:

Área de la región del cuadrilátero PQRA:

$$S_{PQRA} = \frac{1}{2}(2).2\tan\theta + \frac{1}{2}(1)(-\text{sen}\theta)$$

$$= \frac{1}{2}\tan\theta(4-\cos\theta)\,u^2$$



Rpta.: A

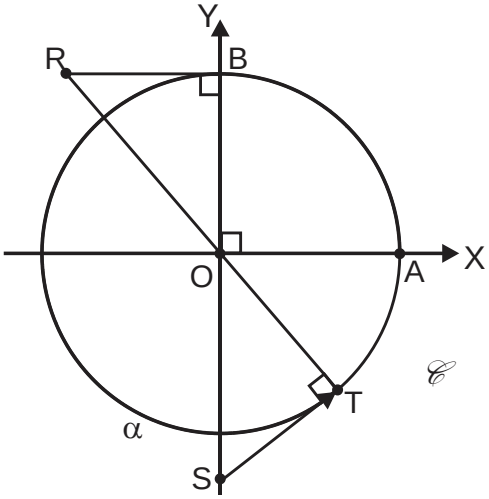
8. En la figura adjunta se muestra el recorrido de Pedro, donde $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Pedro inicia su recorrido en el punto B, pasando por los puntos R y T para finalizar en el punto S, siendo T un punto de tangencia. Si la distancia recorrida por Pedro es d u, halle $1-\cot\alpha-d$.

A) $\cot\alpha$

B) $\tan\frac{\alpha}{2}$

C) $2\cot\frac{\alpha}{2}$

D) $\cot\frac{\alpha}{2}$



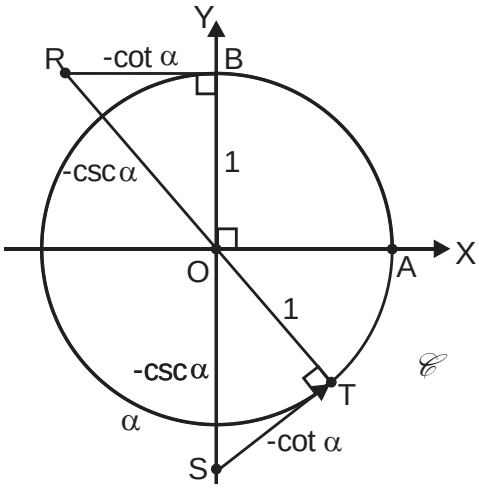
Solución:

La distancia recorrida por Pedro es:

$$d = 1-2\cot\alpha-\csc\alpha \Rightarrow \csc\alpha+\cot\alpha = 1-\cot\alpha-d$$

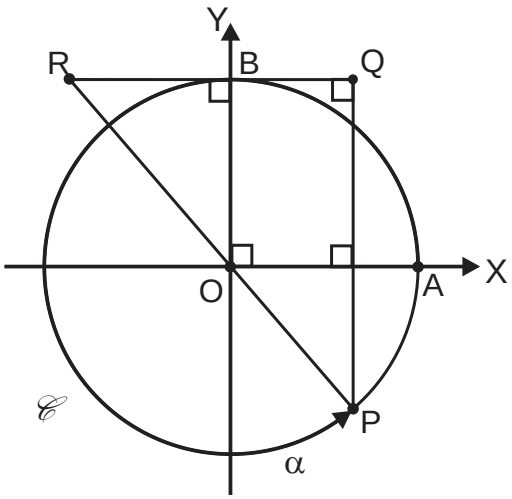
Luego:

$$\therefore 1-\cot\alpha-d = \cot\frac{\alpha}{2}$$



Rpta.: D

9. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si S u^2 es el área de la región triangular PQR, halle $-2S.\tan\alpha$.



A) $(1-\cos\alpha)^2$

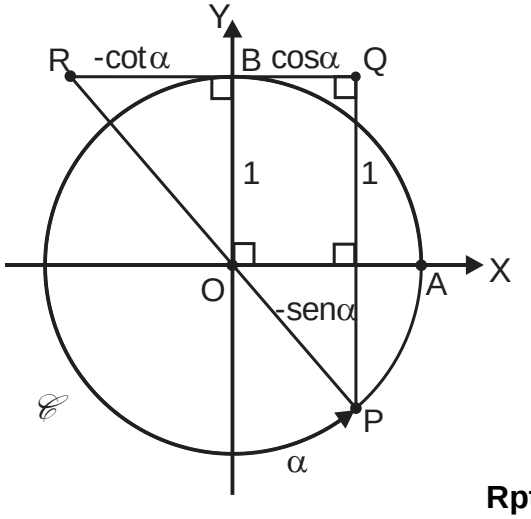
B) $(1-\text{sen}\alpha)^2$

C) $(1-\tan\alpha)^2$

D) $(1+\text{sen}\alpha)^2$

<u>Solución</u>:

Área de la región triangular PQR:



$$S_{PQR}=\frac{1}{2}(1-\text{sen}\alpha)(\cos\alpha-\cot\alpha)$$

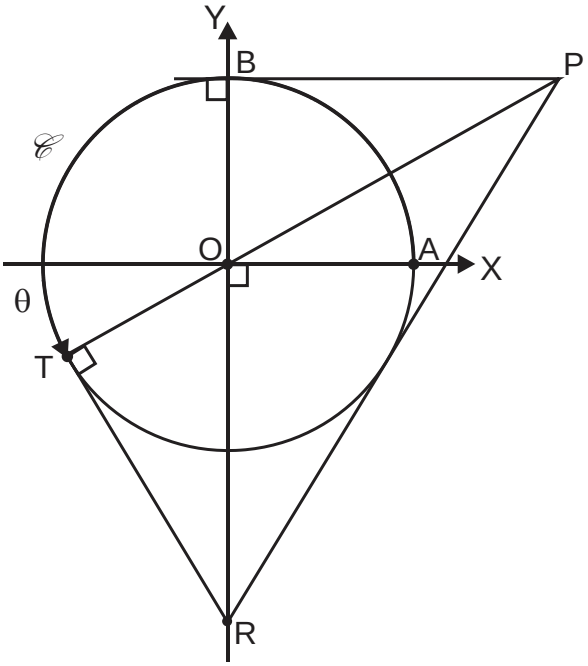
$$S=\frac{1}{2}(1-\text{sen}\alpha)\left(1-\frac{1}{\text{sen}\alpha}\right)\cos\alpha$$

$$2S=-(1-\text{sen}\alpha)^2\cot\alpha$$

$$-2S\tan\alpha=(1-\text{sen}\alpha)^2$$

Rpta.: B

10. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si T es punto de tangencia, halle el área de la región triangular PTR.



A) $\frac{1}{2}(1+\csc\theta)\cot\theta\ u^2$

B) $\frac{1}{2}(1+\csc\theta)\tan\theta\ u^2$

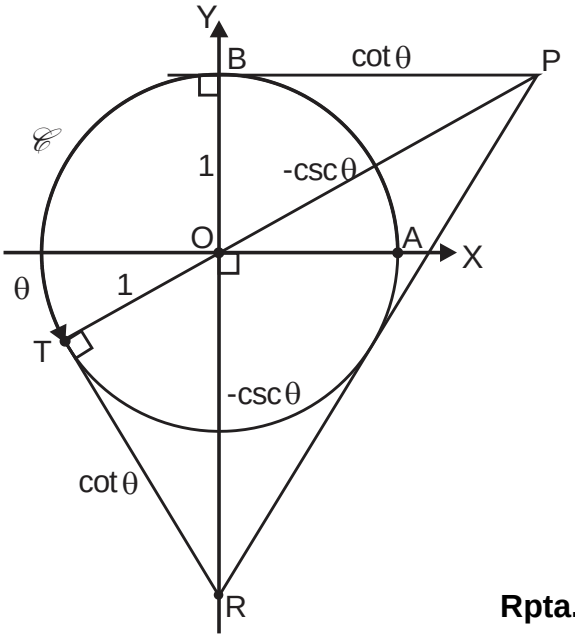
C) $\frac{1}{2}(1-\csc\theta)\cot\theta\ u^2$

D) $\frac{1}{2}(1-\sec\theta)\tan\theta\ u^2$

Solución:

Área de la región triangular PTR:

$$\therefore S_{PRT} = \frac{1}{2}(1-\csc\theta)\cot\theta \ u^2$$



Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

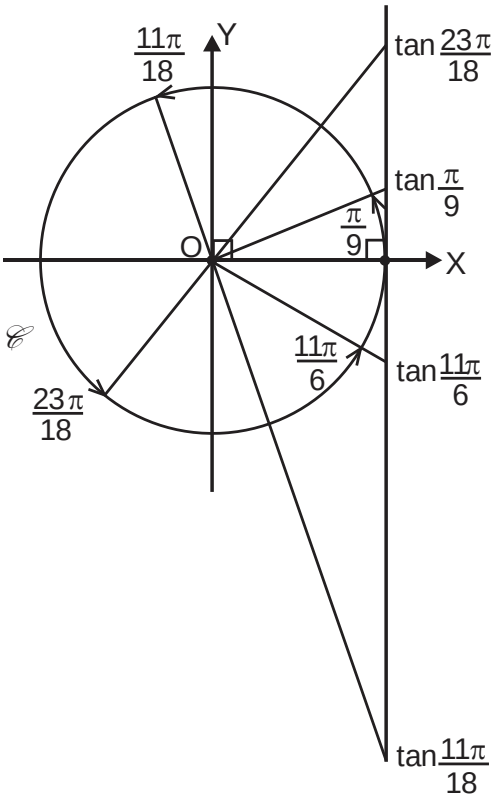
1. Dado los siguientes números : $\tan\frac{\pi}{9}$, $\tan\frac{11\pi}{18}$, $\tan\frac{23\pi}{18}$ y $\tan\frac{11\pi}{6}$, indique el menor de los números.

A) $\tan\frac{11\pi}{18}$ B) $\tan\frac{\pi}{9}$ C) $\tan\frac{23\pi}{18}$ D) $\tan\frac{11\pi}{6}$

Solución:

De la figura se tiene:

$$\tan\frac{11\pi}{18} < \tan\frac{11\pi}{6} < \tan\frac{\pi}{9} < \tan\frac{23\pi}{18}$$



Rpta.: A

2. En la circunferencia trigonométrica, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

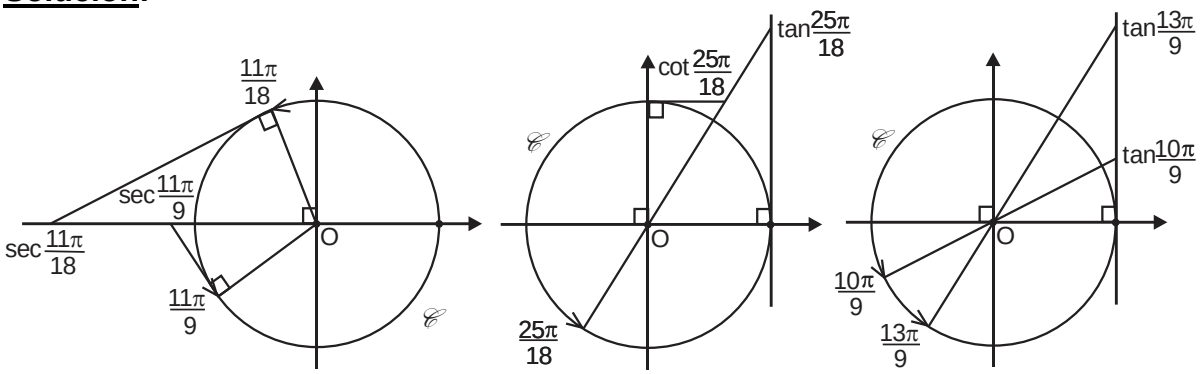
I. $\sec\frac{11\pi}{18} < \sec\frac{11\pi}{9}$

II. $\tan\frac{25\pi}{18} > \cot\frac{25\pi}{18}$

III. $\tan\frac{10\pi}{9} > \tan\frac{13\pi}{9}$

A) VVF B) VFV C) FVV D) FVF

Solución:



$\sec\frac{11\pi}{18} < \sec\frac{11\pi}{9}$ $\cot\frac{25\pi}{18} < \tan\frac{25\pi}{18}$ $\tan\frac{10\pi}{9} < \tan\frac{10\pi}{9}$

Rpta.: A

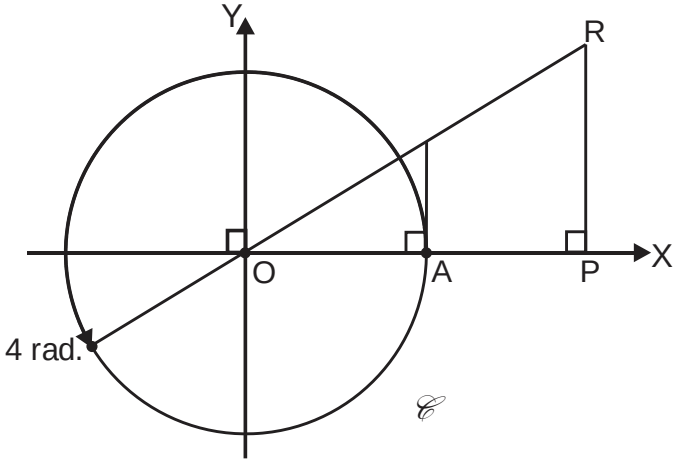
3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica de radio 1 dam. Si OA = AP, halle el área de la región triangular OPR.

A) $2\tan 4\ \text{dam}^2$

B) $\tan 4\ \text{dam}^2$

C) $\frac{1}{2}\tan 4\ \text{dam}^2$

D) $4\tan 4\ \text{dam}^2$



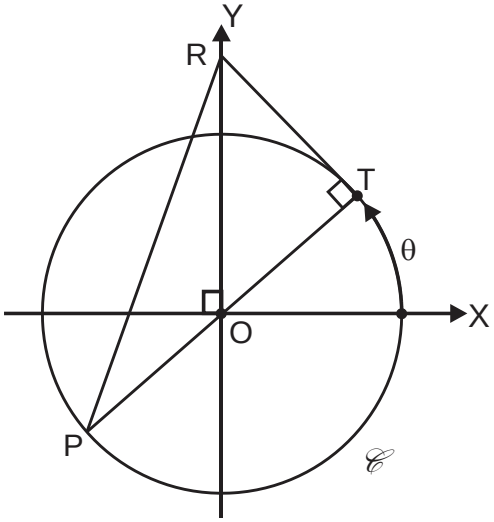
Solución:

En la figura OP = 2 dam. PR = 2tan(4)dam , entonces el área de la región triangular OPR:

$$S = \frac{1}{2}\times 2\times 2\tan(4) = 2\tan 4\ \text{dam}^2$$

Rpta.: A

4. En la figura se muestra un pequeño jardín circular de radio 1 dam, en la región triangular PRT se sembrarán girasoles. Determine el área destinada a la siembra de girasoles.



A) $\sec\theta$ dam^2

B) $\tan\theta$ dam^2

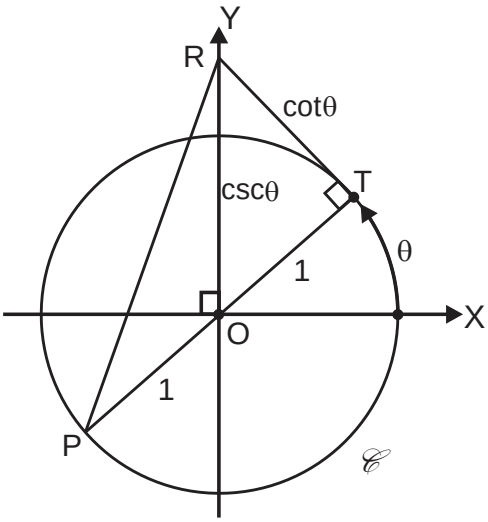
C) $\csc\theta$ dam^2

D) $\cot\theta$ dam^2

Solución:

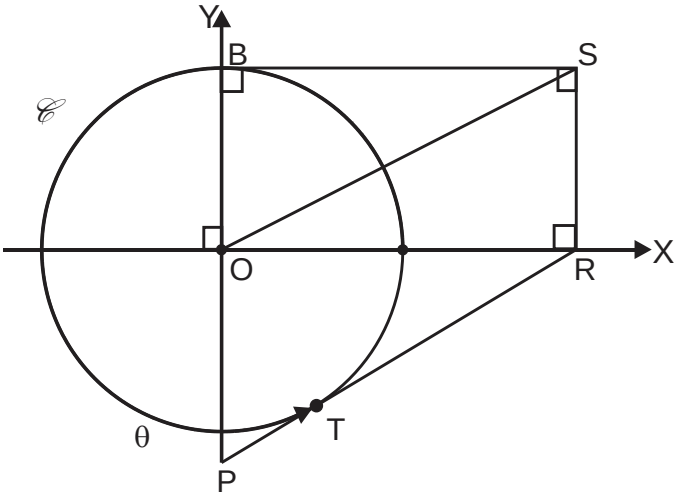
Área de la región triangular PRT:

$S = \frac{1}{2}\times(2).\cot\theta = \cot\theta$ dam^2



Rpta.: D

5. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si T es punto de tangencia, halle el área de la región del cuadrilátero OPRS.



A) $(1-\text{sen}\theta)\csc 2\theta$ u^2

B) $(1-\text{sen}\theta)\sec 2\theta$ u^2

C) $(\text{sen}\theta-1)\csc 2\theta$ u^2

D) $(1+\text{sen}2\theta)\csc 2\theta$ u^2

Solución:

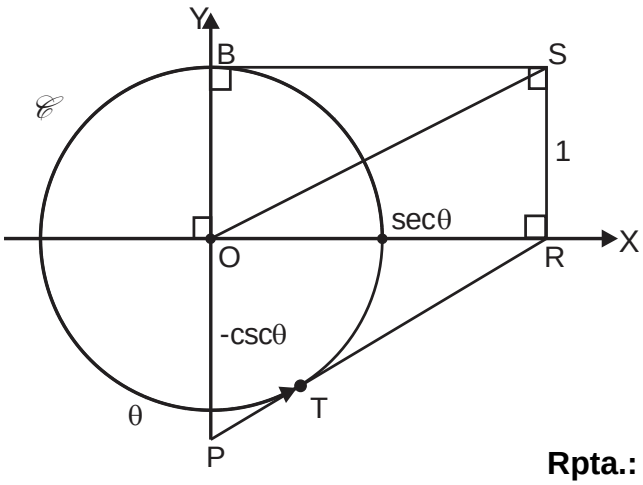
Área del cuadrilátero OPRS

$$S = \frac{1}{2}(1).\sec\theta - \frac{1}{2}\sec\theta.\csc\theta$$

$$S = \frac{1}{2}\sec\theta\left(1-\csc\theta\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\sec\theta.\csc\theta.\left(\text{sen}\theta - 1\right)$$

$$S = \left(\text{sen}\theta - 1\right)\csc 2\theta \ \ u^2$$

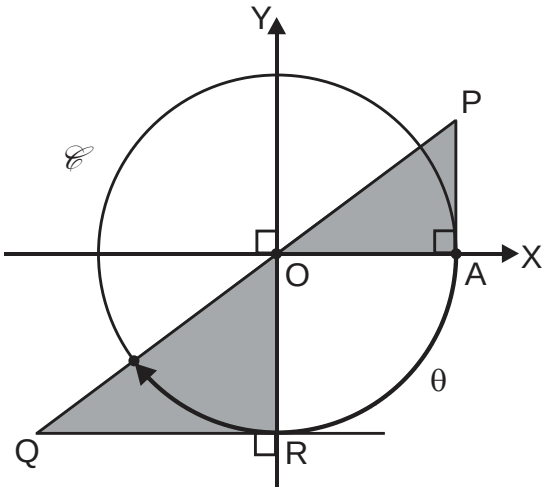


Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Halle el área de la región sombreada.



A) $\csc\theta\ u^2$

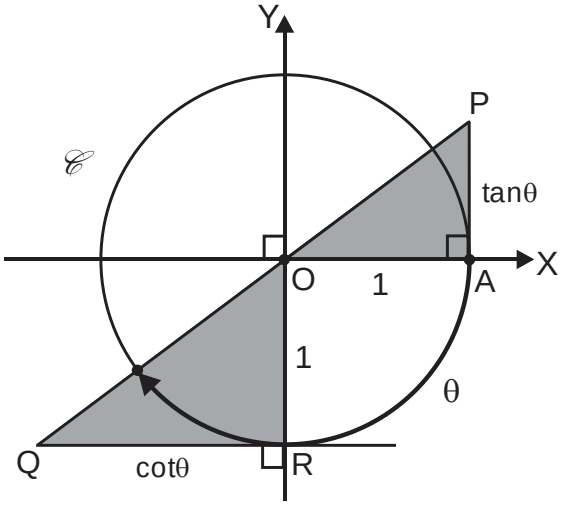
B) $\sec\theta\ u^2$

C) $\operatorname{sen}2\theta\ u^2$

D) $\csc 2\theta\ u^2$

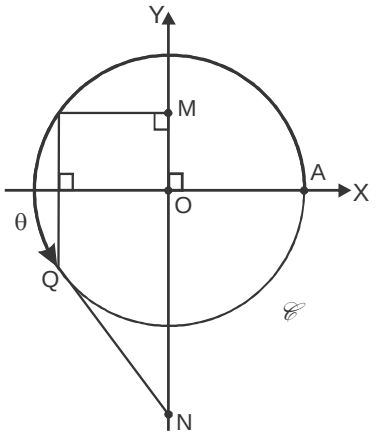
Solución:

$$S = \text{Área}\,\Delta\,OAP + \text{Área}\,\Delta\,ORQ$$
$$= \frac{1}{2}(1)\tan\theta + \frac{1}{2}(1)\cot\theta$$
$$= \frac{1}{2}(\tan\theta + \cot\theta)$$
$$= \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta}$$
$$= \csc 2\theta.$$



Rpta.: D

2. Ricardo parte del punto A recorriendo un arco θ en sentido antihorario sobre una pista circular de radio 1dam llegando hasta el punto Q (punto de tangencia) y luego se desplaza en línea recta hacia el punto N, tal como se muestra en la figura. Si en el punto M está su hermano Carlos, calcule la distancia entre Carlos y Ricardo que está en el punto N.



A) $-\left(1+\cos^2\theta\right)\cos\theta$ dam

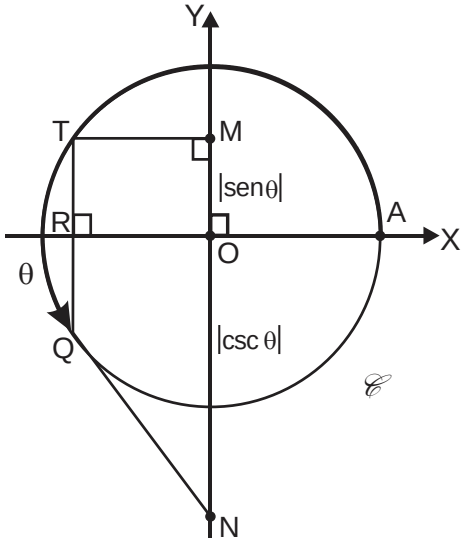
B) $-\left(1-\tan^2\theta\right)\operatorname{sen}\theta$ dam

C) $-\left(1+\operatorname{sen}^2\theta\right)\csc\theta$ dam

D) $-\left(1-\csc^2\theta\right)\operatorname{ctg}\theta$ dam

<u>Solución</u>:

Del gráfico $\quad TR = RQ = |\operatorname{sen}\theta|$



Sea L la distancia entre Carlos y Ricardo.

$\theta \in$ IIIC

$L = |\operatorname{sen}\theta| + |\csc\theta|$

$L = (-\operatorname{sen}\theta) + (-\csc\theta)$

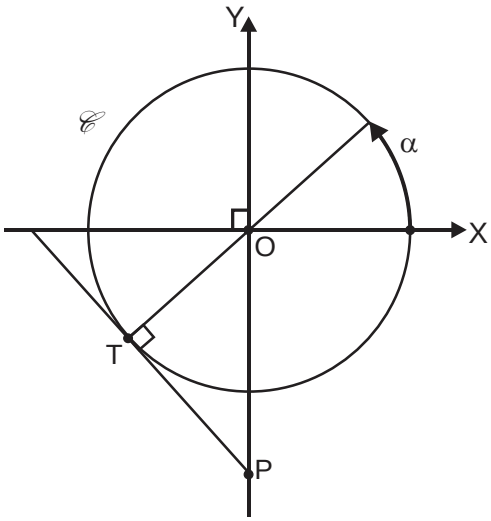
$L = -\left(\operatorname{sen}\theta + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)$

$L = -\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$

$\therefore \quad L = -\left(1+\operatorname{sen}^2\theta\right)\csc\theta$ dam.

Rpta.: C

3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si Mu es el perímetro del triángulo OPT, halle M – 1.



A) $\cot\dfrac{\alpha}{2}$

B) $1+\cot\dfrac{\alpha}{2}$

C) $1+\tan\dfrac{\alpha}{2}$

D) $1+\cot\alpha$

Solución:

Del gráfico

$OP = |\csc(180° + \alpha)| = |-\csc\alpha| = |\csc\alpha| = \csc\alpha$

Luego,

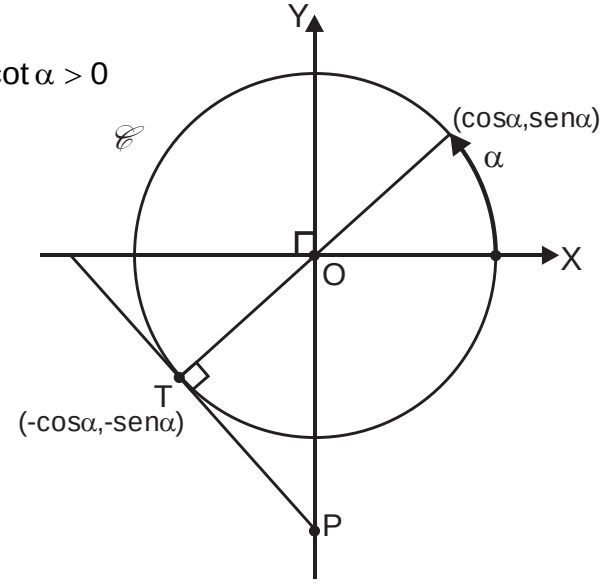
$PT = \sqrt{\csc^2\alpha - 1} = \sqrt{\cot^2\alpha} = |\cot\alpha|,\ \cot\alpha > 0$

$= \cot\alpha$

Perímetro

$M = 1 + \csc\alpha + \cot\alpha = 1 + \cot\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow M - 1 = \cot\frac{\alpha}{2}$



Rpta.: A

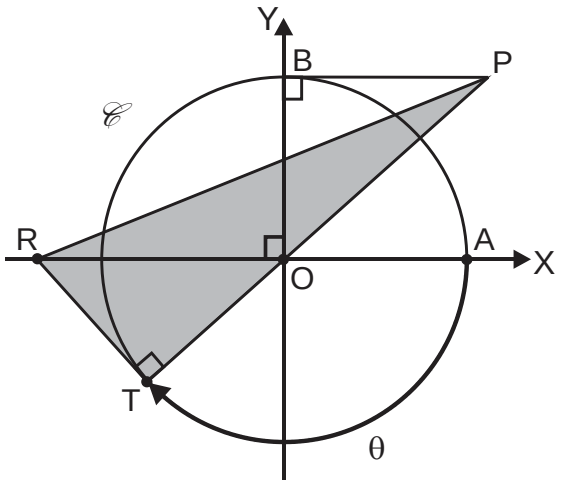
4. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si T es punto de tangencia, halle el área de la región sombreada.

A) $(\tan\theta - \sec\theta)\ u^2$

B) $\frac{1}{2}(\tan\theta + \sec\theta)\ u^2$

C) $\frac{1}{2}(\tan\theta + \csc\theta)\ u^2$

D) $\frac{1}{2}(\tan\theta - \sec\theta)\ u^2$

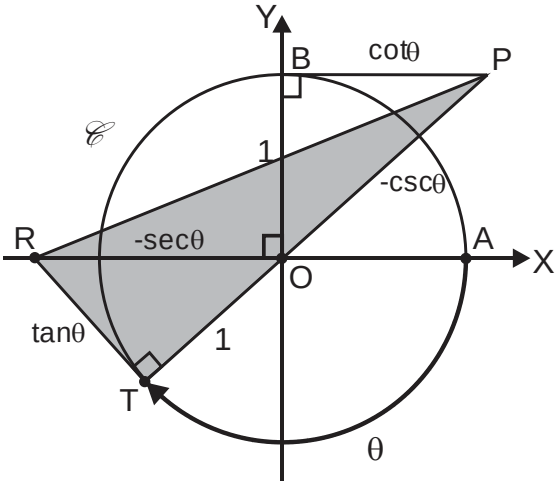


Solución:

Área de la región sombreada:

$$S=\frac{1}{2}\tan\theta(1-\csc\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(\tan\theta-\sec\theta)u^2.$$



Rpta.: D

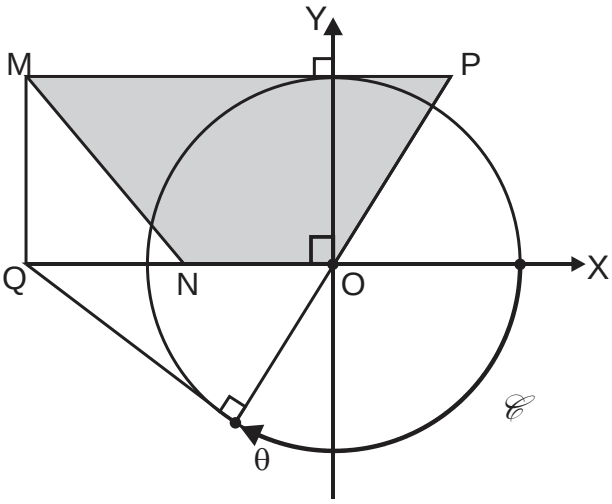
5. En la figura adjunta se muestra una plazuela circular de radio 1 dam. En la región sombreada MNOP se instalará una carpa del MINSA para desarrollar la campaña "Tu caserito anti anemia". Si $QN=NO$ ¿Cuánto es el área que ocupará dicha carpa?

A) $\frac{1}{4}(2\cot\theta-3\sec\theta)\,dam^2$

B) $\frac{1}{2}(2\cot\theta+3\sec\theta)\,dam^2$

C) $\frac{1}{4}(3\cot\theta-2\sec\theta)\,dam^2$

D) $\frac{1}{2}(2\cot\theta-3\sec\theta)\,dam^2$



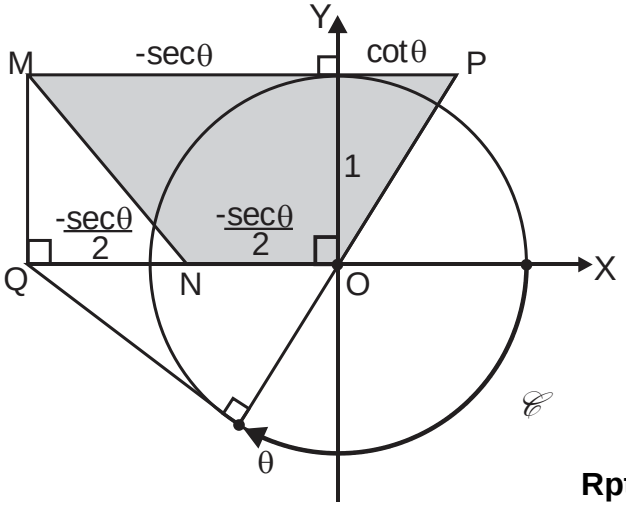
Solución:

Del gráfico:

$$\text{Área}=\frac{1}{2}(\cot\theta-\sec\theta-\frac{\sec\theta}{2})(1)$$

$$\text{Área}=\frac{1}{2}(\cot\theta-\frac{3\sec\theta}{2})$$

$$\text{Área}=\frac{1}{4}(2\cot\theta-3\sec\theta)\,dam^2.$$



Rpta.: A

6. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\sec 4 + \tan 4 < 0$.
II. $\tan 4 - \cot 4 < 0$
III. $\tan 1 - \tan 4 > 0$

A) VFV B) VVV C) FVV D) FFF

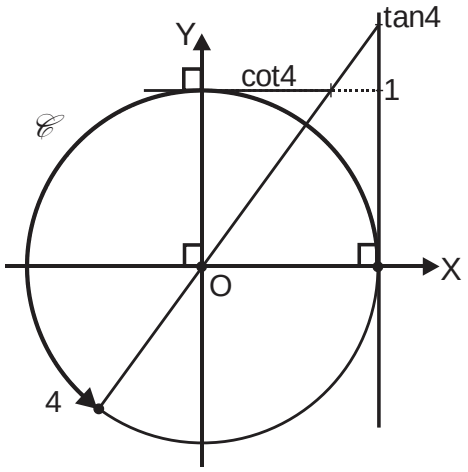
Solución:

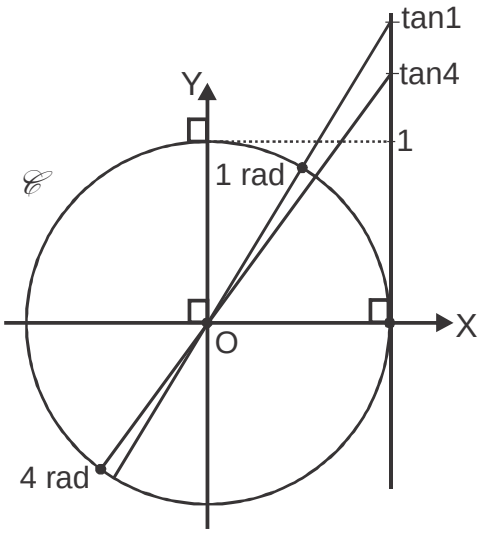
Del enunciado:

I. $\sec 4 + \tan 4 = \dfrac{1+\text{sen}4}{\cos 4} < 0$; $1+\text{sen}4 > 0 \quad \wedge \quad \cos 4 < 0$

II. $\tan 4 - \cot 4 > 0$

III. $\tan 1 - \tan 4 > 0$





Rpta.: A

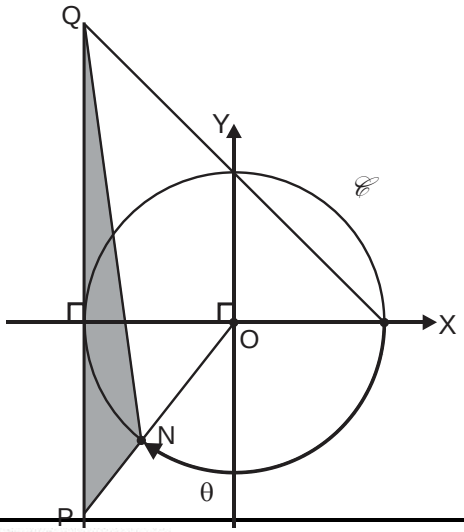
7. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Determine el área de la región sombreada QNP.

A) $\dfrac{(1+\tan\theta)\ (\cos\theta)}{2}u^2$

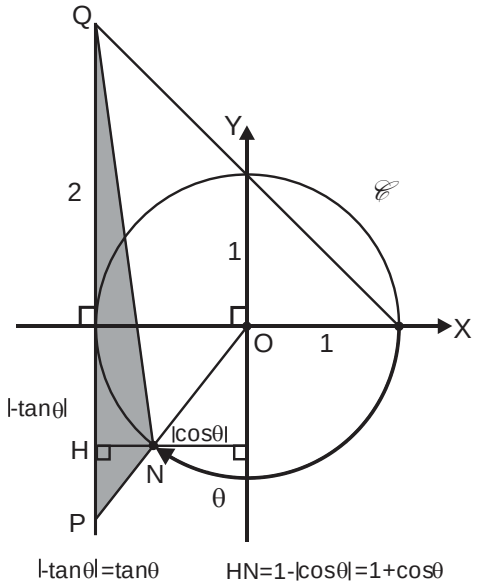
B) $\dfrac{(1+\tan\theta)\ (1-\cos\theta)}{2}u^2$

C) $\dfrac{(2+\tan\theta)\ (1+\cos\theta)}{2}u^2$

D) $\dfrac{(\tan\theta)(1+\cos\theta)}{3}u^2$



Solución:



$$\text{Area } \Delta\, QNP = \frac{\text{Base}\cdot\text{Altura}}{2}$$
$$= \frac{(QP)(HN)}{2}$$

Se nota que el área Δ QNP es:

$$\frac{(2+\tan\theta)\ (1+\cos\theta)}{2}u^2$$

Rpta.: C

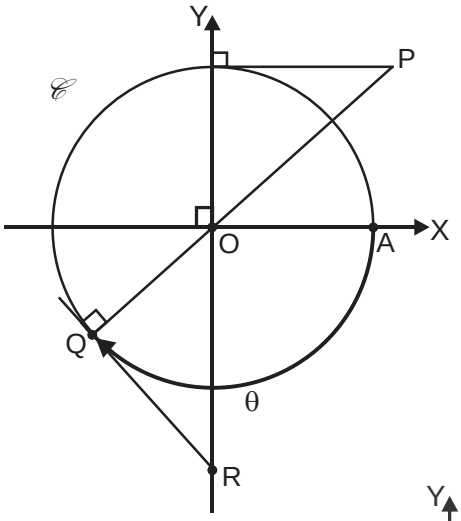
8. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si Q es punto de tangencia y Su^2 es el área de la región triangular PQR, halle $S(\csc\theta+1)$.

A) $\frac{1}{2}\cot^2\theta$

B) $-\frac{1}{2}\cot^3\theta$

C) $-\cot^3\theta$

D) $-\sec^3\theta$



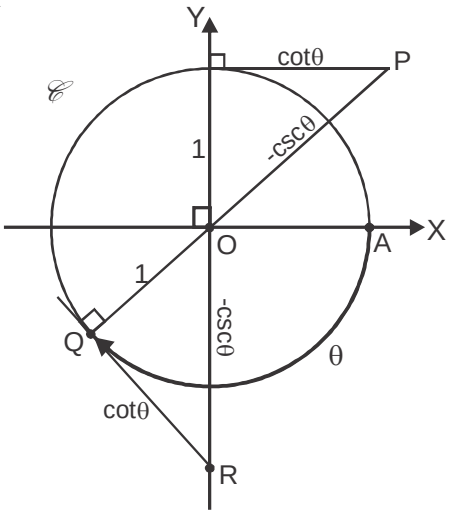
Solución:

Área de la región triangular PQR:

$$S=\frac{1}{2}(1-\csc\theta)\cot\theta$$

Luego,

$$S(1+\csc\theta)=\frac{1}{2}(1-\csc\theta)(1+\csc\theta)\cot\theta$$
$$=\frac{1}{2}(-\cot^2\theta)\cot\theta$$
$$=-\frac{1}{2}\cot^3\theta.$$



Rpta.: B

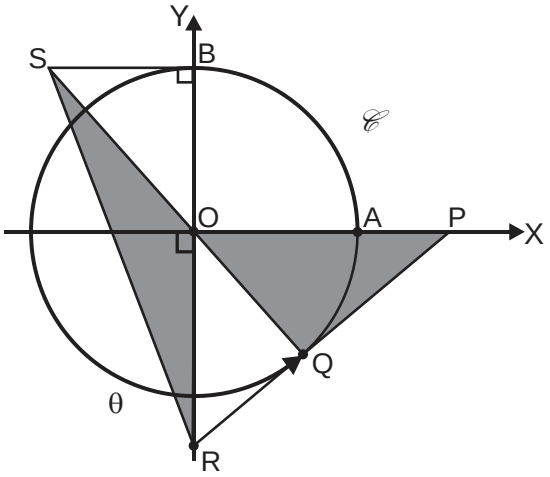
9. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si Q es punto de tangencia y Mu^2 es el área de la región sombreada, halle $2M+\tan\theta$.

A) $\tan\theta\cdot\csc\theta$

B) $\cot\theta\cdot\sec\theta$

C) $\tan\theta\cdot\sec\theta$

D) $\cot\theta\cdot\csc\theta$



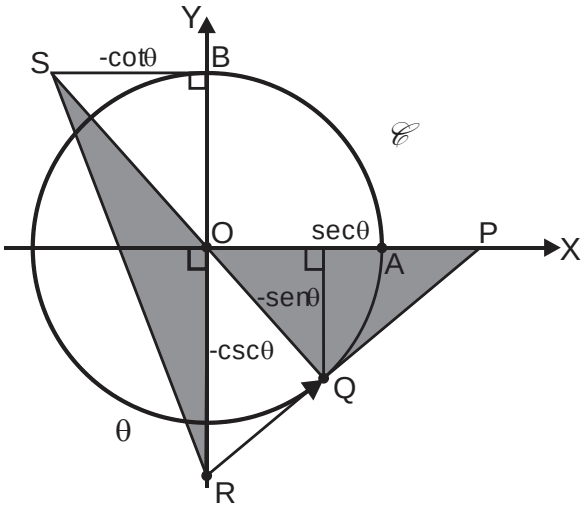
Solución:

Área de la región sombreada:

$$S=\frac{1}{2}(-\cot\theta)(-\csc\theta)+\frac{1}{2}(-\operatorname{sen}\theta)(\sec\theta)$$

$$\Rightarrow 2S=\cot\theta\cdot\csc\theta-\tan\theta$$

$$\therefore 2S+\tan\theta=\cot\theta\cdot\csc\theta$$



Rpta.: D

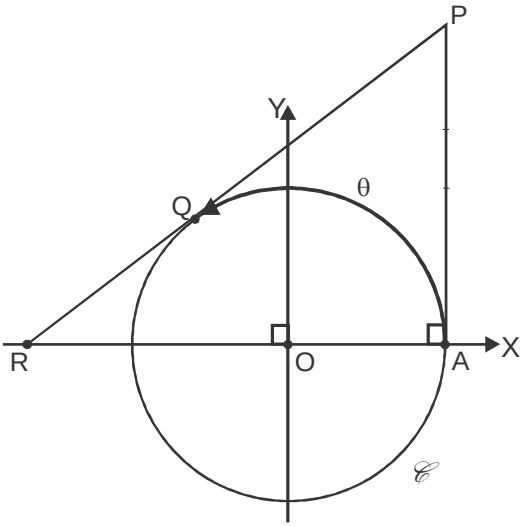
10. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si Q es punto de tangencia y Su^2 es el área de la región triangular APR, halle $S\cdot \operatorname{sen} 2\theta$.

A) $4\operatorname{sen}^4\dfrac{\theta}{2}$

B) $-\cos^4\dfrac{\theta}{2}$

C) $-4\operatorname{sen}^4\dfrac{\theta}{2}$

D) $4\cos^4\dfrac{\theta}{2}$



Solución:

Semejanza de triángulos:

$$\frac{AP}{1-\sec\theta}=\frac{\csc\theta}{-\sec\theta}\Rightarrow\frac{AP\cdot\cos\theta}{\cos\theta-1}=-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow AP=-\frac{\cos\theta-1}{\operatorname{sen}\theta}\Rightarrow AP=\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

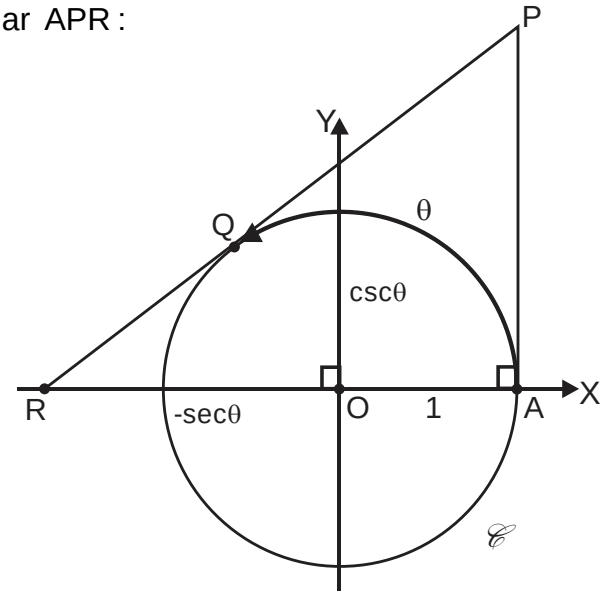
Luego, área de la región triangular APR:

$$S=\frac{1}{2}(1-\sec\theta)\left(\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$=-\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta}$$

$$=-\frac{\left(2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)^2}{\operatorname{sen}2\theta}$$

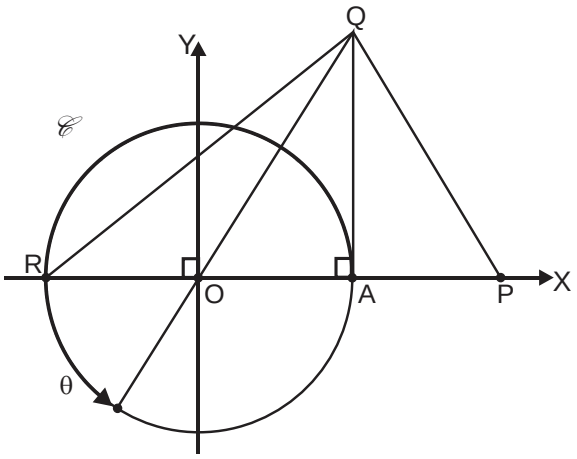
$$\therefore\ S\cdot\operatorname{sen}2\theta=-4\operatorname{sen}^4\frac{\theta}{2}.$$



Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

11. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Halle el área de la región triangular PQR, siendo $OA = AP$.



A) $\frac{3}{2}\tan\theta\ u^2$

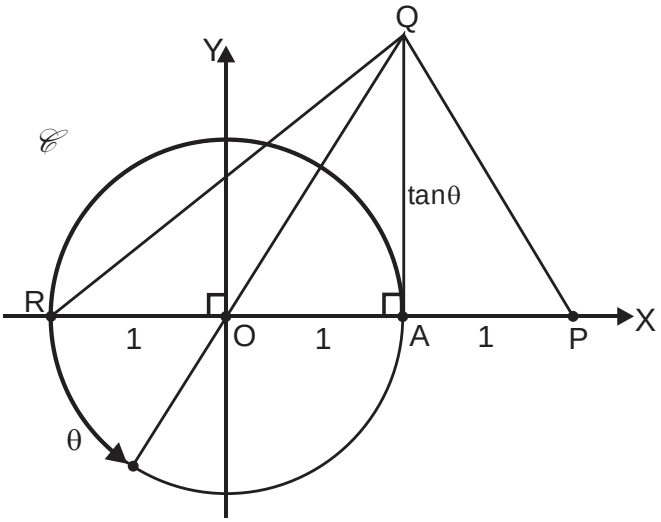
B) $3\tan\theta u^2$

C) $\frac{3}{4}\text{sen}\,2\theta u^2$

D) $\frac{3}{4}\tan\theta u^2$

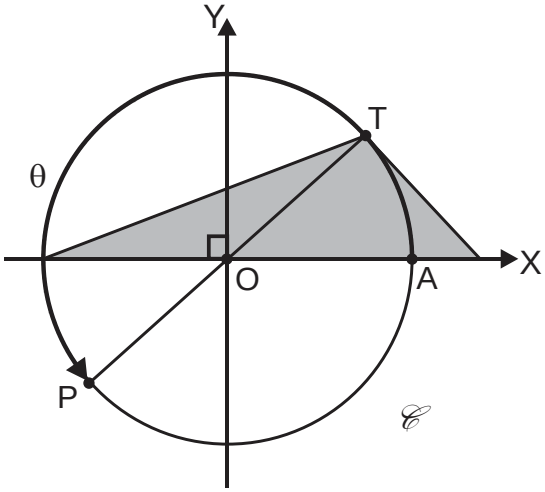
Solución:

$S = \frac{1}{2}(3)\tan\theta = \frac{3}{2}\tan\theta.$



Rpta.: A

12. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si T es el punto de tangencia, halle el área de la región sombreada.



A) $\frac{1}{2}(\tan\theta + \cos\theta)u^2$

B) $\frac{1}{2}(\cot\theta + \text{sen}\,\theta)u^2$

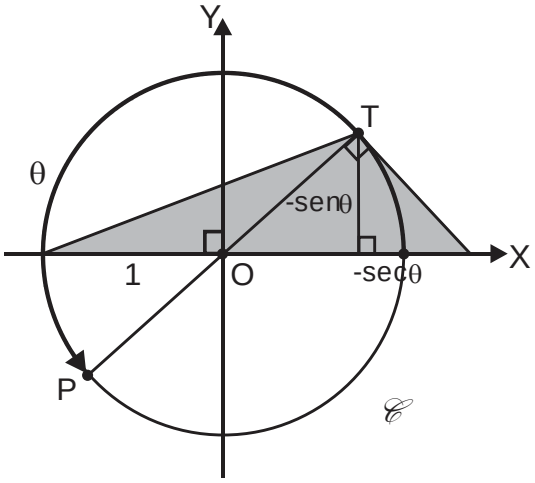
C) $\frac{1}{2}(\tan\theta - \text{sen}\,\theta)u^2$

D) $\frac{1}{2}(\tan\theta - \cos\theta)u^2$

Solución:

Área de la región sombreada:

$$S=\frac{1}{2}(1-\sec\theta)(-\operatorname{sen}\theta)$$
$$=\frac{1}{2}(\sec\theta-1)(\operatorname{sen}\theta)$$
$$=\frac{1}{2}(\tan\theta-\operatorname{sen}\theta)u^2.$$



Rpta.: C

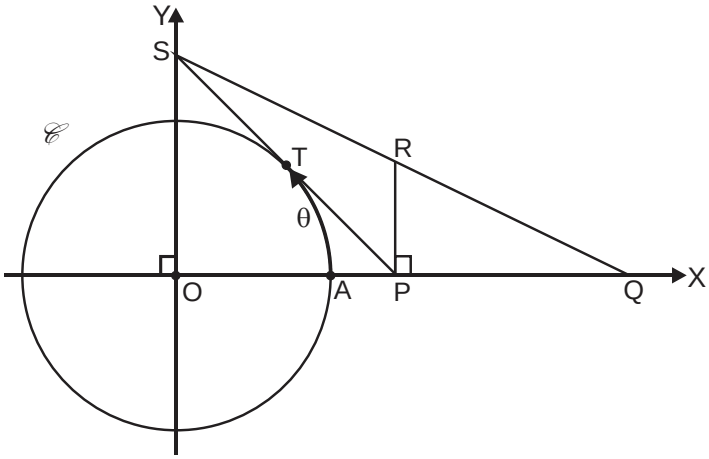
13. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si T es el punto de tangencia y $OP=PQ$, halle el área de la región limitada por el cuadrilátero OPRS.

A) $\frac{3}{2}\csc 2\theta\ u^2$

B) $3\csc 2\theta\ u^2$

C) $\frac{3}{2}\sec 2\theta\ u^2$

D) $3\sec 2\theta\ u^2$



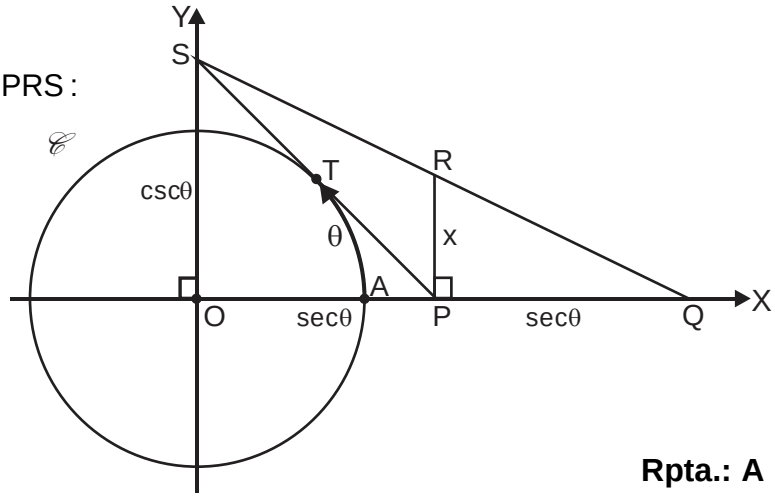
Solución:

Semejanza de triángulos:

$$\frac{\csc\theta}{2\sec\theta}=\frac{x}{\sec\theta}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\csc\theta$$

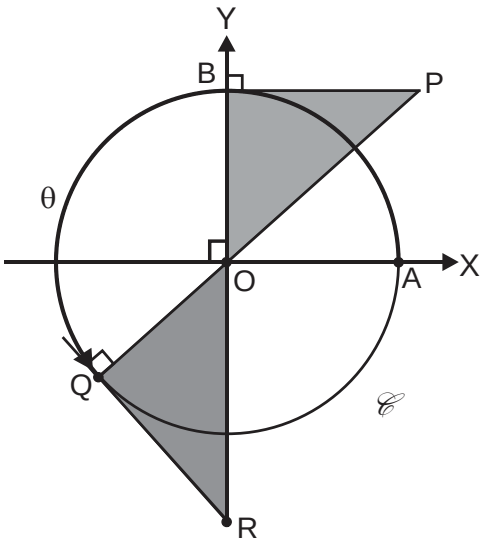
Luego, el área del cuadrilátero OPRS:

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{\csc\theta}{2}+\csc\theta\right)\sec\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3\csc\theta\cdot\sec\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(3\csc 2\theta)$$
$$=\frac{3}{2}\csc 2\theta u^2.$$



Rpta.: A

14. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si Q es el punto de tangencia, halle el área de la región sombreada.



A) $2\cot\theta u^2$

B) $\frac{1}{2}\cot\theta u^2$

C) $\cot\theta u^2$

D) $\tan\theta u^2$

Solución:

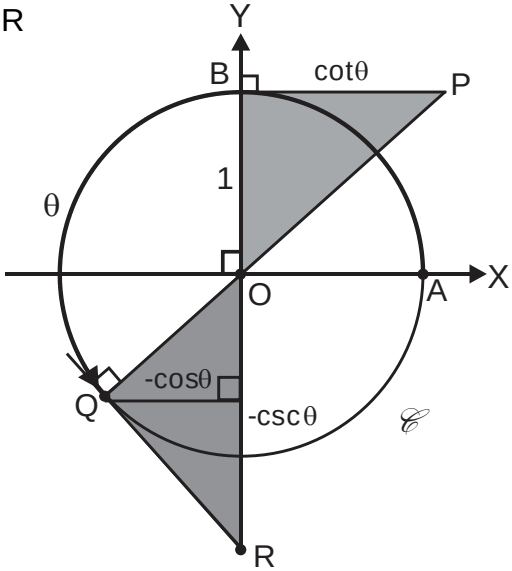
Área de la región sombreada:

$S = \text{Área de } \Delta OBP + \text{Área de } \Delta OQR$

$= \frac{1}{2}(1)\cot\theta + \frac{1}{2}(-\cos\theta)(-\csc\theta)$

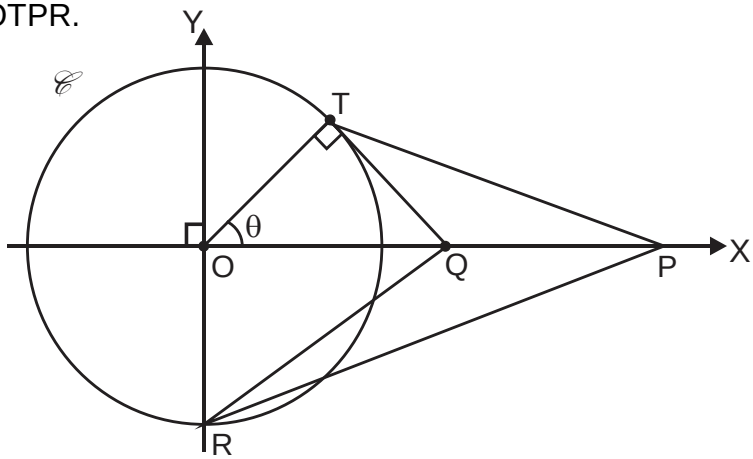
$= \frac{1}{2}(\cot\theta + \cot\theta)$

$= \cot\theta u^2.$



Rpta.: C

15. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si $OQ = PQ$, halle el área de la región limitada por el cuadrilátero OTPR.



A) $\frac{1}{2}(\cot\theta + \sec\theta)u^2$

B) $(\tan\theta + \sec\theta)u^2$

C) $\frac{1}{2}(\tan\theta + \csc\theta)u^2$

D) $\frac{1}{2}(\sec\theta + \csc\theta)u^2$

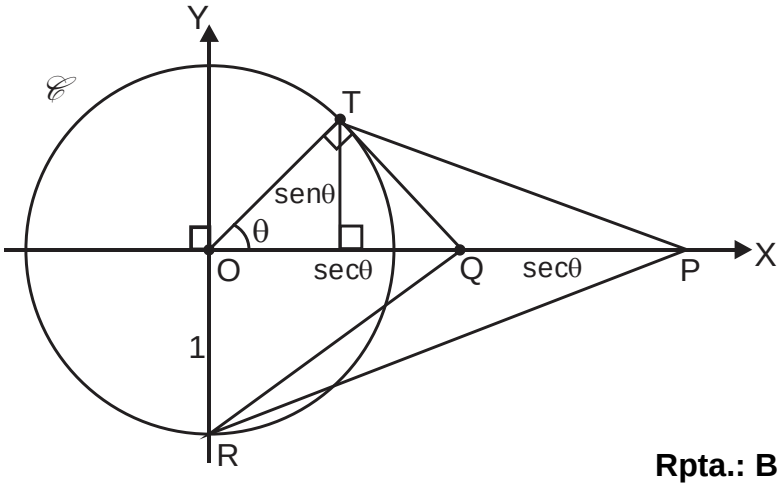
Solución:

$S = \text{Área } \Delta OTP + \text{Área } \Delta OPR$

$= \frac{1}{2}(2\sec\theta)(\text{sen}\,\theta) + \frac{1}{2}(1)(2\sec\theta)$

$= \sec\theta \cdot \text{sen}\,\theta + \sec\theta$

$= (\tan\theta + \sec\theta)\,u^2.$

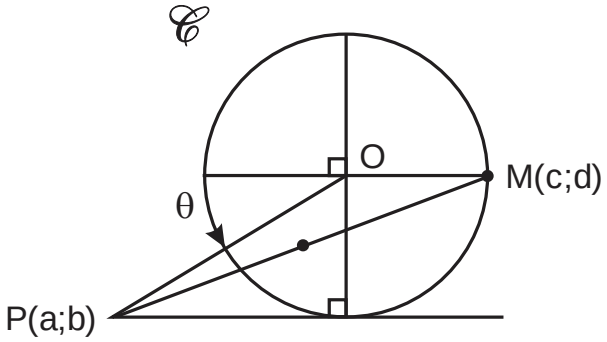


Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la figura, C es la circunferencia trigonométrica. Si Au^2 es el área de la región triangular POM, halle $\frac{a+b+2A}{c+d}$.



A) $\text{sen}\theta.\cos\theta$

B) $-c\,\text{tg}\theta$

C) $\text{ctg}\theta$

D) $-\text{tg}\theta$

E) $\sec\theta$

Solución:

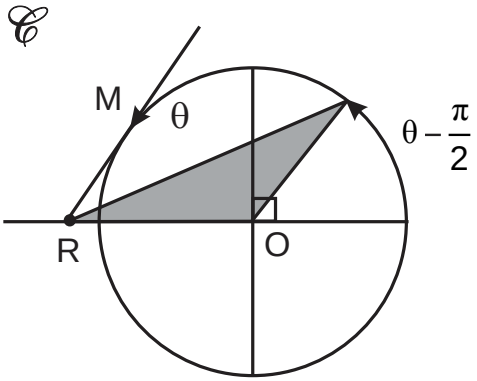
$b=-1$, $a=-c\,\text{tg}\theta$,$c=1$, $d=0$

$A=\frac{1}{2}\Rightarrow 2A=1$

Luego $\frac{a+b+2A}{c+d}=-\text{ctg}\theta$

Rpta.: B

2. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica y M es punto de tangencia. Halle el área de la región sombreada.



A) $\frac{1}{2}u^2$

B) $1u^2$

C) $\text{sen}\theta u^2$

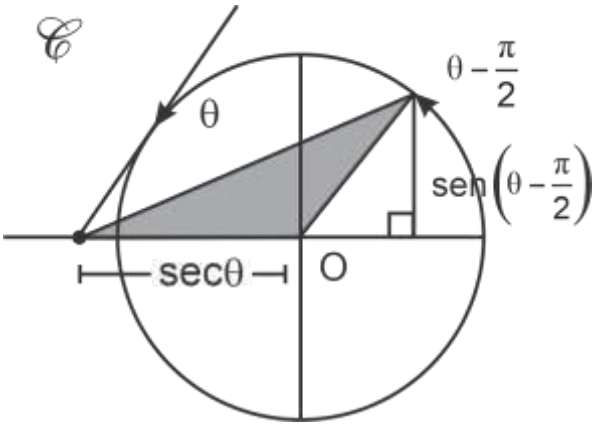
D) $-\cos\theta u^2$

E) $1.5u^2$

Solución:

En la figura

Sea S el área de la región sombreada

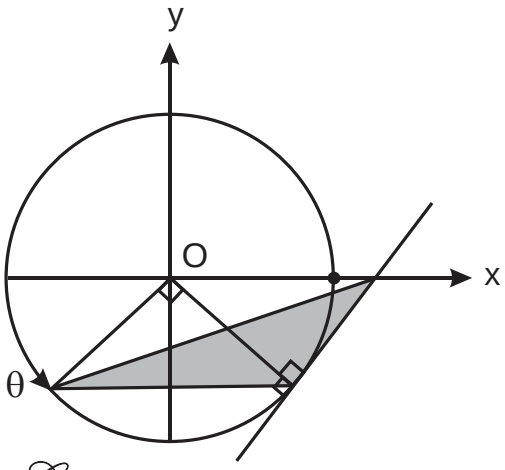


$$S=\frac{(-\sec\theta)\left(\text{sen}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}$$

Rpta.: A

3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, determine el área de la región sombreada



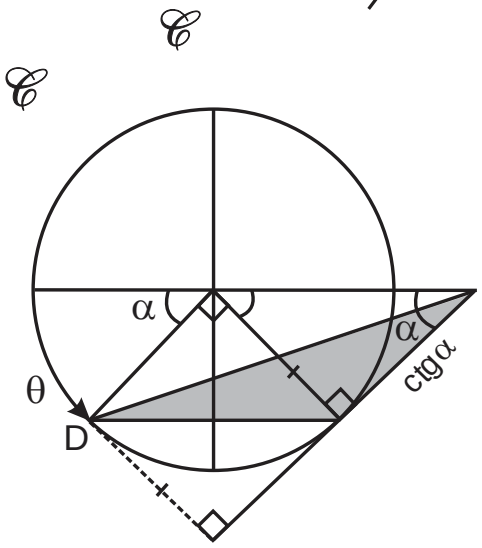
A) $\frac{\text{ctg}\theta}{2}$ B) $\frac{\text{tg}\theta}{2}$

C) $\frac{\text{ctg}\theta}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{1}{4}$

Solución:

En la figura



$\pi+\alpha=\theta$

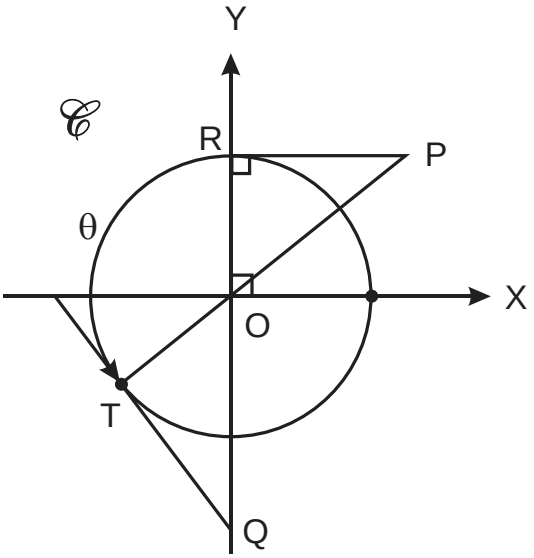
S area de la reg sombreada

$\Rightarrow \alpha=\theta-\pi$

$S=\frac{\text{ctg}\theta}{2}u^2$

Rpta.: A

4. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si PQ=d y T punto de tangencia, determine $\frac{d.\text{sen}\theta}{2}$.



A) $-\cos\left(\frac{3\pi-2\theta}{4}\right)$

B) $\cos\left(\frac{3\pi-2\theta}{4}\right)$

C) $-\text{sen}\left(\frac{3\pi-2\theta}{4}\right)$

D) $\text{sen}\left(\frac{3\pi-2\theta}{4}\right)$

E) $-\cos\left(\frac{3\pi-\theta}{4}\right)$

Solución:

$PQ = 2m \quad (\Delta OPQ \text{ Isósceles})$

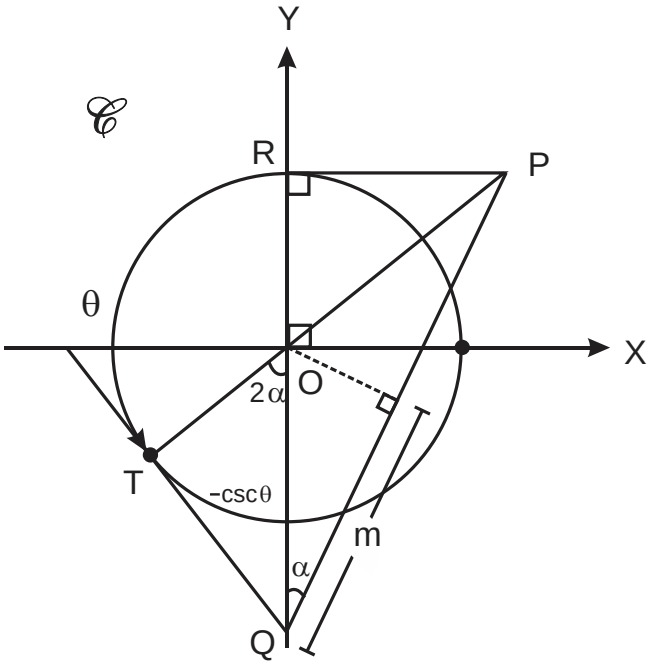
$m = -\cos\alpha.\csc\theta$

$\theta + 2\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi-2\theta}{4}$

El valor de d es:

$d = -2\cos\left(\frac{3\pi-2\theta}{4}\right)\csc\theta$

$\Rightarrow \frac{d\text{sen}\theta}{2} = -\cos\left(\frac{3\pi-2\theta}{4}\right)$



Rpta.: A

5. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, determine a qué es igual $M+\text{tg}\theta+\text{ctg}\theta$ siendo Mu el perímetro de la región triangular AOC y D punto de tangencia.

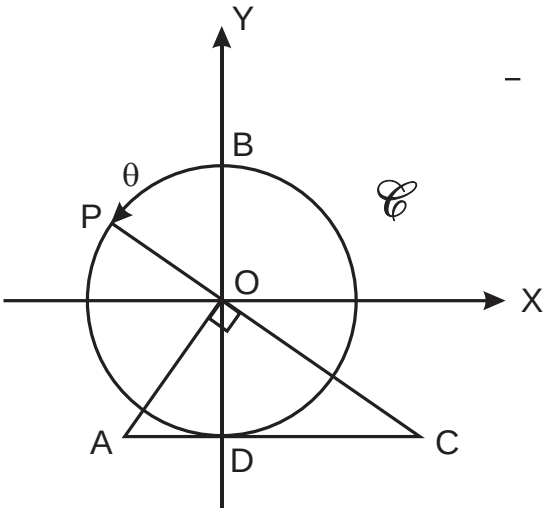
A) $\csc\theta-\sec\theta$

B) $2\csc\theta$

C) $\text{sen}\theta-\cos\theta$

D) $\sec\theta-\csc\theta$

E) $\csc\theta+\sec\theta$



Solución:

$AC=\text{tg}(180°-\theta)+\text{ctg}(180°-\theta)$

$AC=2\csc(360°-2\theta)$

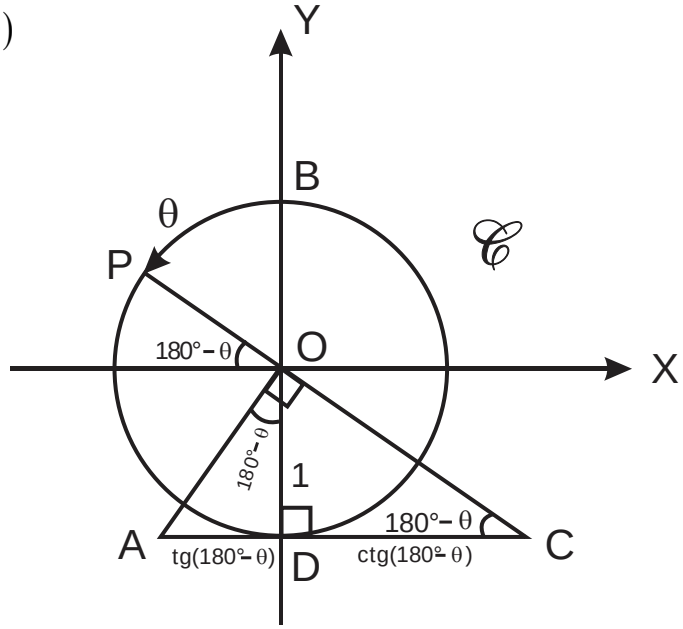
$AC=-2\csc 2\theta$

$AO=\sec(180°-\theta)=-\sec\theta$

$OC=\csc(180°-\theta)=\csc\theta$

$M=-2\csc 2\theta+\csc\theta-\sec\theta$

$M+2\csc 2\theta=\csc\theta-\sec\theta$



Rpta.: A

6. Una persona parte del punto A y recorre un arco θ en sentido horario sobre sobre una pista circular de radio 1dm llegando hasta el punto P y luego se desplaza hacia el punto T en línea recta, tal como se muestra en la figura. Calcule la distancia recorrida por la persona desde el punto P(punto de tangencia) hasta el T

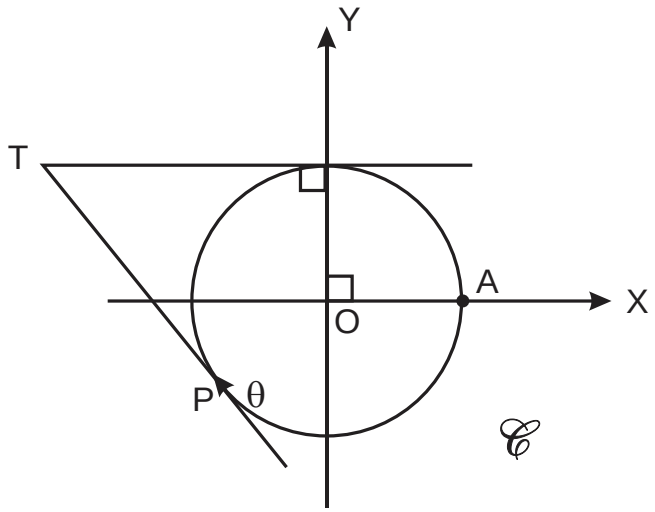
A) $(\text{ctg}\theta - \csc\theta)\text{dm}$

B) $(\text{tg}\theta - \sec\theta)\text{dm}$

C) $(-\sec\theta - \csc\theta)\text{dm}$

D) $(\text{ctg}\theta - \text{sen}\theta)\text{dm}$

E) $(\text{tg}\theta - \cos\theta)\text{dm}\}$



<u>Solución</u>:

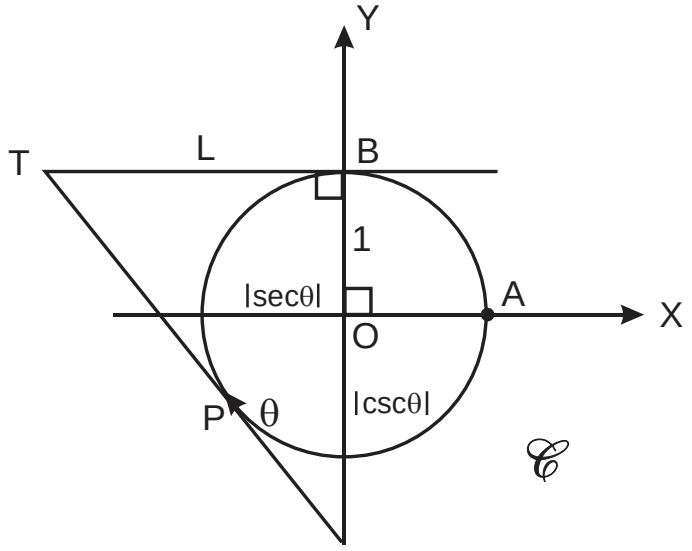
<u>Del gráfico</u>: PT=TB=L

$$\frac{L}{1+|\csc\theta|} = \frac{|\sec\theta|}{|\csc\theta|}$$

$$\frac{L}{1-\csc\theta} = \frac{-\sec\theta}{-\csc\theta}$$

$$\frac{L}{1-\csc\theta} = \text{tg}\theta$$

$$\therefore \quad L = (\text{tg}\theta - \sec\theta)\text{dm}.$$



Rpta.: B

7. Carlos está ubicado el punto R (-3,-4) y se dirige hacia una plaza de armas que tiene forma circular de centro O (0,0) y con un diámetro que mide 1 km. Además se sabe que por el punto B(0,-1) pasa una avenida rectilínea de forma tangencial a la plaza. Si Carlos sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el centro de la plaza e intercepta a la avenida y a la circunferencia por segunda vez en los punto P y Q respectivamente ; halle la distancia entre P y Q.

A) 2,5 Km B) 2,25 Km C) 1,25 Km
D) 1,75 Km E) 1,5 Km

Solución:

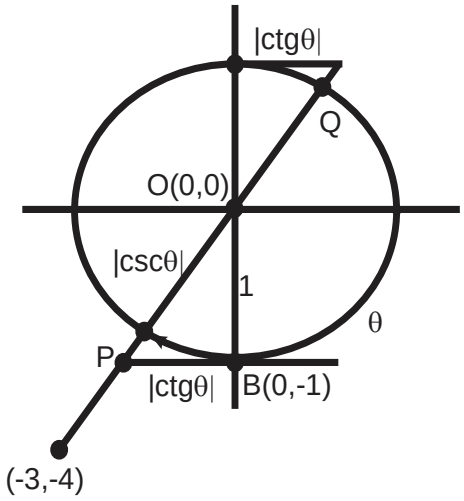
Tenemos $PQ = 1 + |\csc\theta|$

$PQ = 1 - \csc\theta$

entonces $PQ = 1 - \left(-\frac{5}{4}\right)$

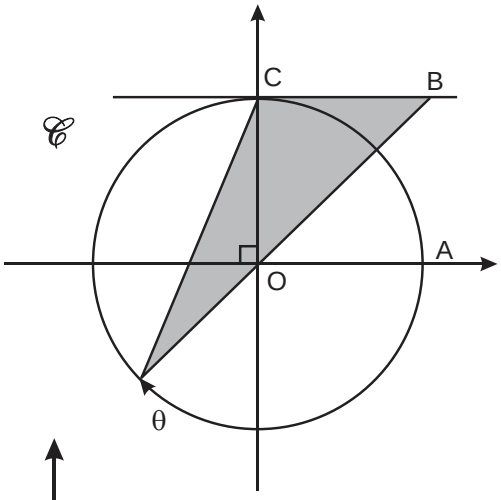
$PQ = \frac{9}{4}$Km

Así $PQ = 2{,}25$ Km



Rpta.: B

8. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica y C es punto de tangencia. Halle el área de la región sombreada.



A) $0{,}5(\sec\theta - tg\theta)u^2$

B) $0{,}5tg\theta u^2$

C) $0{,}5\csc\theta u^2$

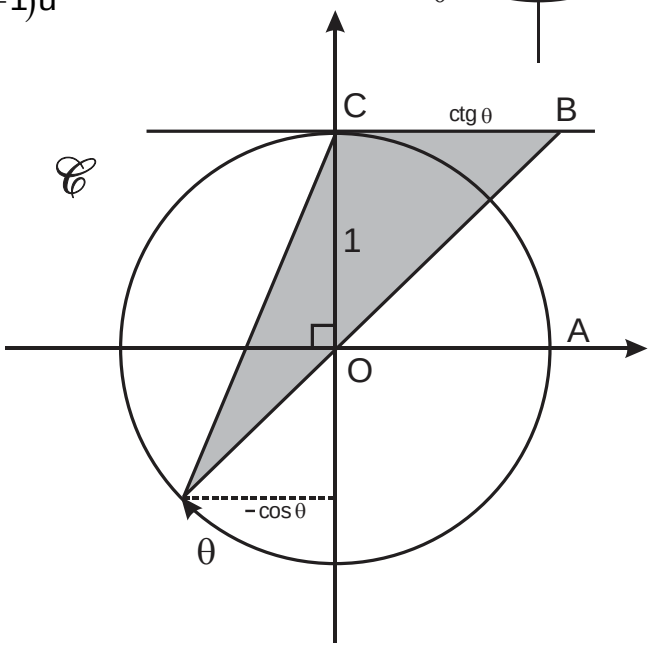
D) $0{,}5(c\,tg\theta - \cos\theta)u^2$

E) $0{,}5\sec\theta(\csc\theta - 1)u^2$

Solución:

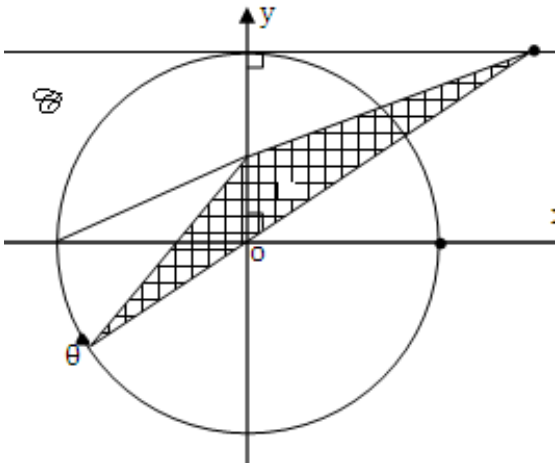
De la figura

$S = \frac{1}{2}(ctg\theta - \cos\theta)$



Rpta.: D

9. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si el área de la región sombreada es $A\left(\dfrac{1+B\text{sen}\theta}{1+C.\text{tg}\theta}\right)$, halle $(A+B+C)^2$



A) $\dfrac{1}{4}$

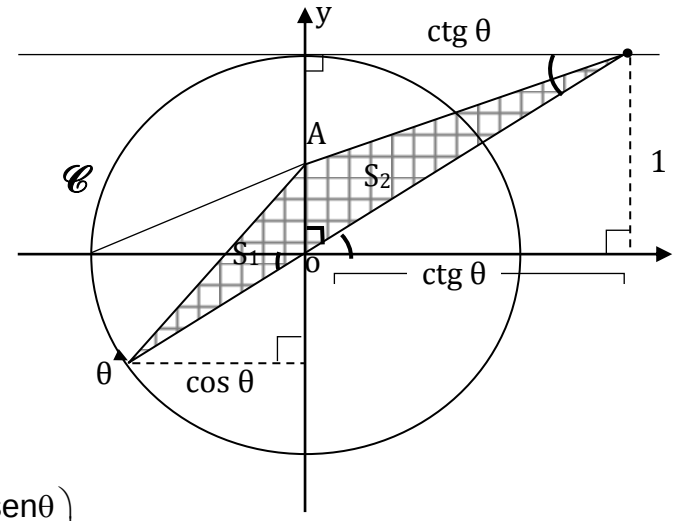
B) 1

C) 4

D) 9

E) 3

Solución:



$$A_R = S_1 + S_2$$

$$= \frac{OA(-\cos\theta)}{2} + \frac{OA(\text{ctg}\theta)}{2}$$

$$= \frac{OA}{2}(\text{ctg}\theta - \cos\theta)$$

$$\frac{OA}{1} = \frac{1}{1+\text{ctg}\theta}$$

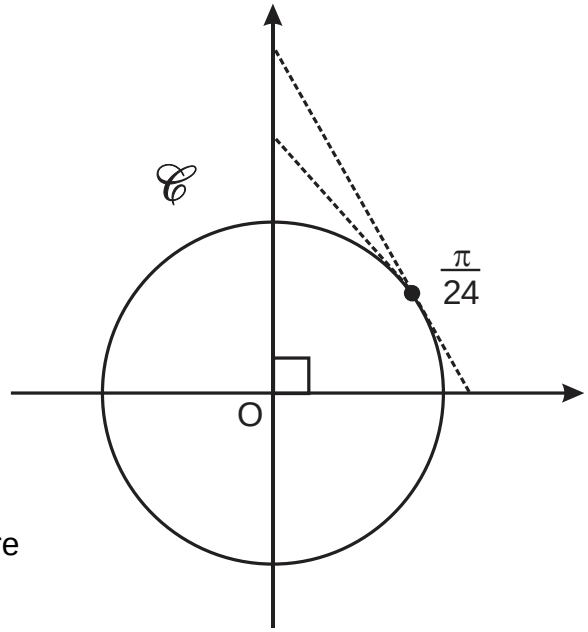
$$= \frac{1}{2(1+\text{ctg}\theta)}(\text{ctg}\theta - \cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\text{sen}\theta}{\text{tg}\theta+1}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \qquad B = -1 \qquad C = 1 \qquad (A+B+C)^2 = \frac{1}{4}$$

Rpta.: A

10. Una empresa de ventas virtual determina que en el año comercial 2019 el ingreso mensual en miles de dólares en el n-ésimo mes asciende a

$$g(n)=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{n\pi}{24}}{1+\cos\frac{n\pi}{24}}}+\csc\frac{n\pi}{24}+\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{24}\ .$$



¿En qué mes del año se obtiene el menor ingreso?

A) Enero B) Agosto C) Diciembre
D) Abril E) Mayo

<u>Solución</u>:

1) $1 \le n \le 12$

$$g(n)=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{n\pi}{24}}{1+\cos\frac{n\pi}{24}}}+\csc\frac{n\pi}{24}+\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{24}$$

$$g(n)=\operatorname{tg}\frac{n\pi}{48}+\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{48}=2\csc\frac{n\pi}{24}$$

2) $1 \le n \le 12$

$\Rightarrow \frac{\pi}{24} \le \frac{n\pi}{24} \le \frac{\pi}{2}$

Analizando la línea cosecante vemos que:

$1 \le \csc\frac{n\pi}{24} \le \csc\frac{\pi}{24}$

$\Rightarrow 2 \le 2\csc\frac{n\pi}{24}$

$\Rightarrow 2 \le g(n)$. Así el menor ingreso es de 2 mil dólares

$g(n)=2\csc\frac{n\pi}{24}=2 \Rightarrow \csc\frac{n\pi}{24}=1 \Rightarrow \frac{n\pi}{24}=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow n=12.$

El menor ingreso se obtiene en el mes de Diciembre.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica y $S\,u^2$ es el área de la región sombreada. Determine $S+\frac{\pi}{4}$, siendo T punto de tangencia.

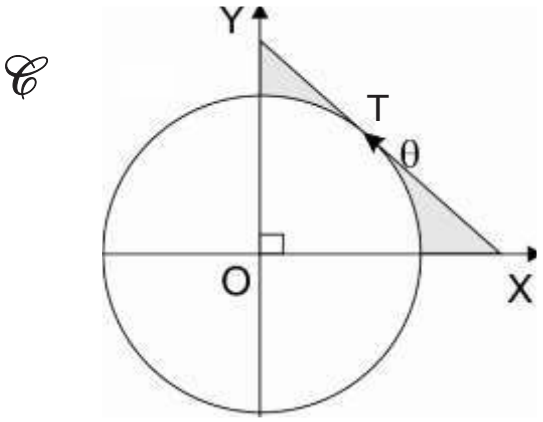
A) $-\frac{1}{2}\sec 2\theta$

B) $\operatorname{sen}2\theta$

C) $\sec 2\theta$

D) $\cos 2\theta$

E) $\csc 2\theta$



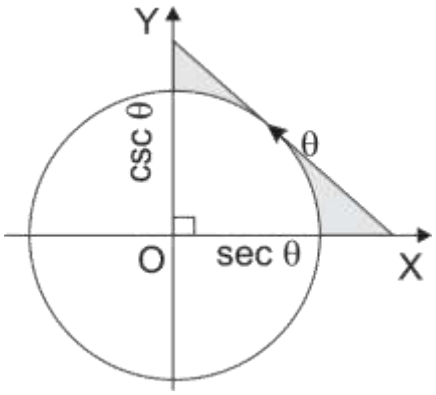
Solución:

$$S=\frac{1}{2}(\sec\theta)(\csc\theta)-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})(1)^2$$

$$S+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(\sec\theta)(\csc\theta)$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\frac{1}{\operatorname{sen}2\theta}=\csc 2\theta$$

$$Q=S+\frac{\pi}{4}=\csc 2\theta$$



Rpta.: E

2. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si OP=a, halle $2a^2-1$.

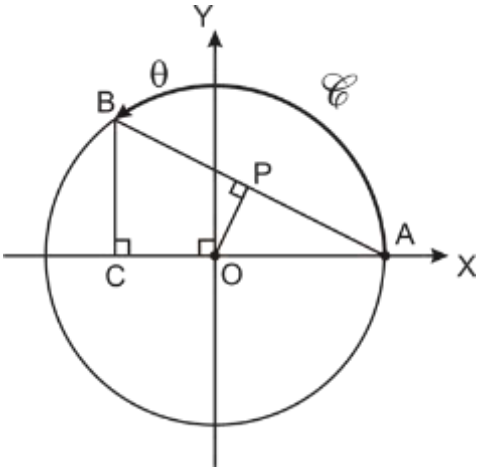
A) $\cos\theta$

B) $\operatorname{sen}\theta$

C) $2\cos\theta$

D) $4\cos\theta$

E) 1

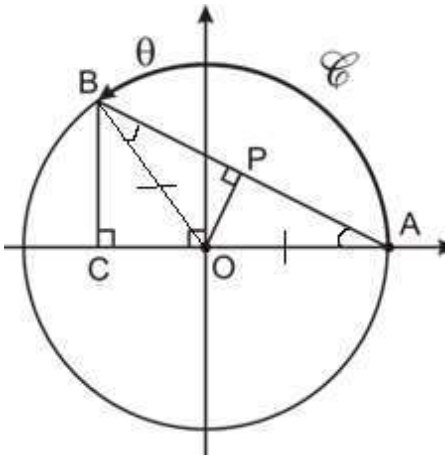


Solución:

$m\measuredangle PAO = \frac{\theta}{2}$

$OP = a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\Rightarrow 2a^2 - 1 = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = \cos\theta$



Rpta.: A

3. Si E = $\csc\left(29\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; $-\frac{\pi}{3} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$, hallar 2M – 3m donde M y m es el máximo y mínimo valor de E respectivamente.

A) 1.5 B) 1 C) 2 D) 0.8 E) 1.4

Solución:

Reduciendo E

$E = \csc\left(29\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$= \csc\left(14\pi + \frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$= \csc\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$\Rightarrow E = \sec\alpha, -\frac{\pi}{3} \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ del gráfico

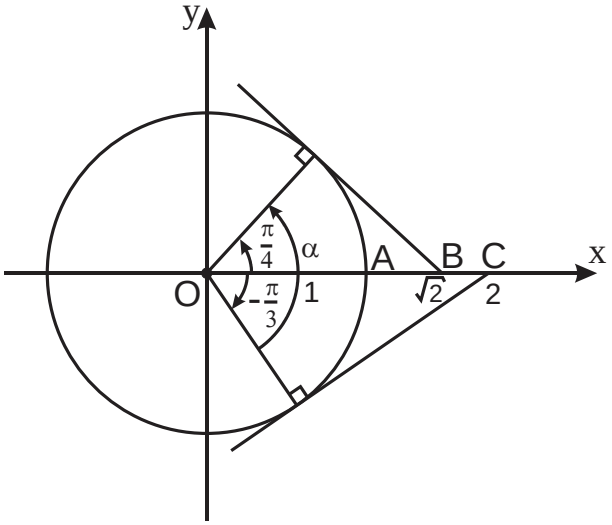
$1 \le \sec\alpha \le 2$

luego $M = 2,\ m = 1$

$2M - 3m = (2)(2) - 3(1)$

$= 4 - 3$

$= 1$



Rpta.: B

4. Si $x<0$, $-\pi<\theta<0$, tal que $4\operatorname{sen}\theta = x+\frac{1}{x}$, determine la cantidad de valores enteros que pude asumir la expresión $4\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

<u>Solución</u>:

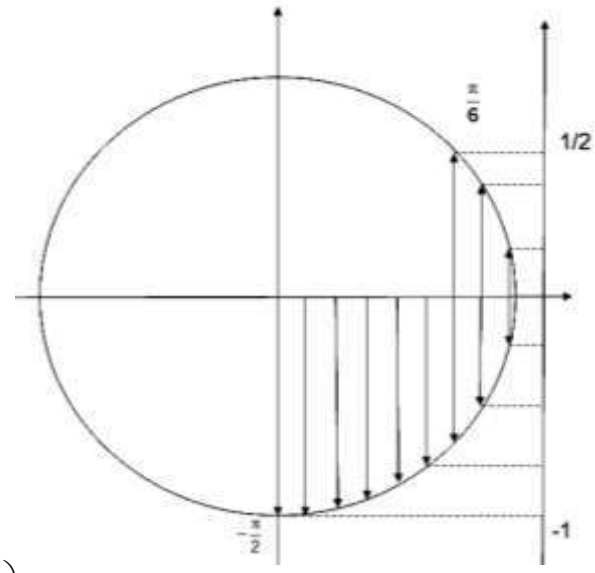
Sabemos:

$$x+\frac{1}{x}\le -2$$

Tenemos:

$$4\operatorname{sen}\theta\le -2 \quad\rightarrow\quad -1\le \operatorname{sen}\theta\le -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{6}\le\theta\le -\frac{\pi}{6}$$



Luego:

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{6} \quad\rightarrow\quad -4\le 4\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\le 2$$

Rpta.: E

5. Hallar los valores de α que satisfacen la desigualdad : $\sqrt{2\operatorname{sen}\alpha-1}\le\sqrt{2\cos\alpha-1}$ en $\langle 0;2\pi\rangle$

A) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ B) $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ C) $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ D) $\left\langle\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right\rangle$

Solución:

$\sqrt{2\text{sen}\alpha - 1} \leq \sqrt{2\cos\alpha - 1}$ ... (*)

$.2\text{sen}\alpha - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2} \leq \text{sen}\alpha \leq 1 \rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{6}$...(a)

$.2\cos\alpha - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{1}{2} \leq \cos\alpha \leq 1 \rightarrow 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{3} \leq \alpha < 2\pi$...(b)

de (*)elevando al cuadrado

$2\text{sen}\alpha - 1 \leq 2\cos\alpha - 1 \rightarrow 2\text{sen}\alpha \leq 2\cos\alpha$

coseno es positivo

$\text{tg}\alpha \leq 1 \rightarrow 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$...(c)

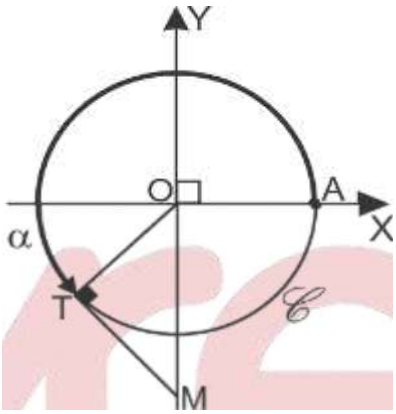
$(a) \cap (b) \cap (c) = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, si el área de la región triangular OTM es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}u^2$. Halle el valor de $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{3}$



A) 2

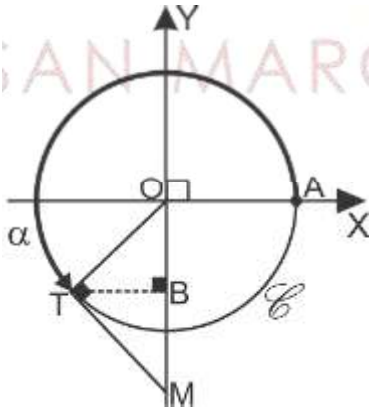
B) $\sqrt{3}$

C) $-\sqrt{3}+2$

D) -2

E) **-1**

Solución:



$\text{TB}=-\cos\alpha$

$\text{OM}=-\csc\alpha$

El área de la región es:

$$\frac{1}{2}(-\csc\alpha)(-\cos\alpha)=\frac{1}{2}\text{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{ctg}\alpha=\sqrt{3}\Rightarrow \alpha=\pi+\frac{\pi}{6}$$

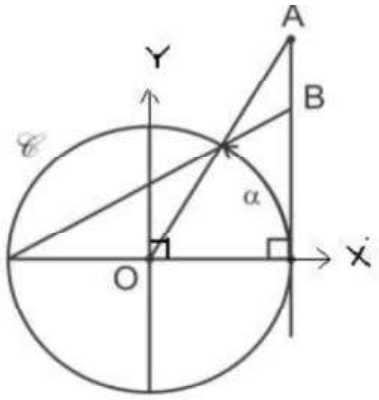
$$\Rightarrow \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{3}=\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}$$

$$=-\text{ctg}\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}=-2$$

Rpta.: D

2. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si se sabe que OA=a , AB=b, halle

$$a^2-\left(b+2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$



A) $tg\alpha$

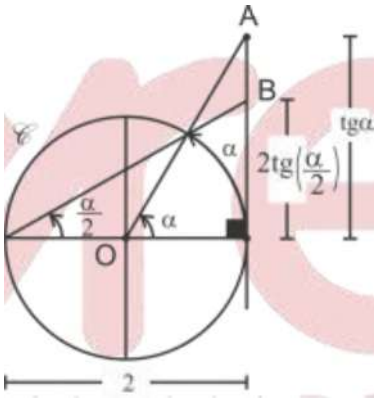
B) 1

C) $sen\alpha$

D) $\cos\alpha$

E) -1

Solución:



De la figura,

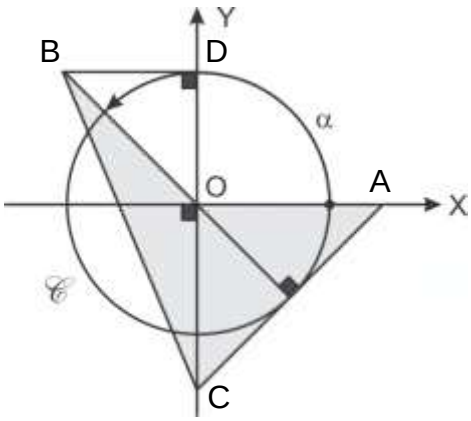
$$b=AB=tg\alpha-2tg\frac{\alpha}{2}$$

$$a=OA=\sec\alpha$$

$$a^2-\left(b+2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2=\sec^2\alpha-tg^2\alpha=1$$

Rpta.: B

3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si se sabe que el área de la región sombreada es $M\,u^2$, hallar el valor de $2Msen\alpha+ctg\alpha$



A) $-\sec\alpha$

B) $\sec\alpha$

C) $-\frac{1}{2}(\sec\alpha+tg\alpha)$

D) $\frac{1}{2}sen\alpha.tg\alpha$

E) $-\csc\alpha$

Solución:

$$M=-\frac{1}{2}\csc\alpha\,\text{ctg}\alpha-\frac{1}{2}\sec\alpha\csc\alpha$$

$$M=-\frac{1}{2}\csc\alpha\left(\sec\alpha+\text{ctg}\alpha\right)u^2$$

$$2M\text{sen}\alpha+\text{ctg}\alpha=-\sec\alpha$$

Pues

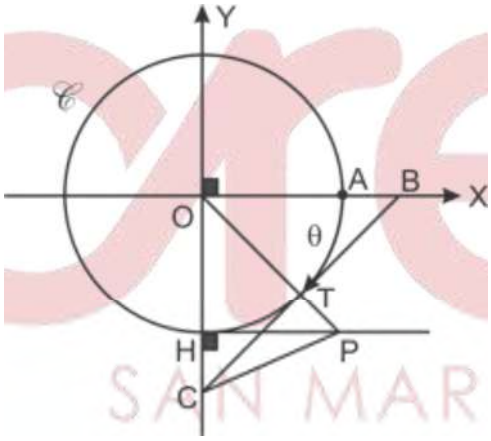
$$BD=\text{ctg}\alpha$$

$$OA=\left|\sec\left(180°+\alpha\right)\right|=-\sec\alpha$$

$$OC=\left|\csc\left(180°+\alpha\right)\right|=-\csc\alpha$$

Rpta.: A

4. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si T es punto de tangencia y CP=a. Halle el valor de $a^2\text{sen}^2\theta$.



A) $\text{sen}\theta$

B) $-\csc^2\theta$

C) $\csc\theta$

D) $2+\text{sen}\theta$.

E) $2+2\text{sen}\theta$

Solución:

$OB=\sec\theta$, $OC=-\csc\theta$

$HP=-\text{ctg}\theta$

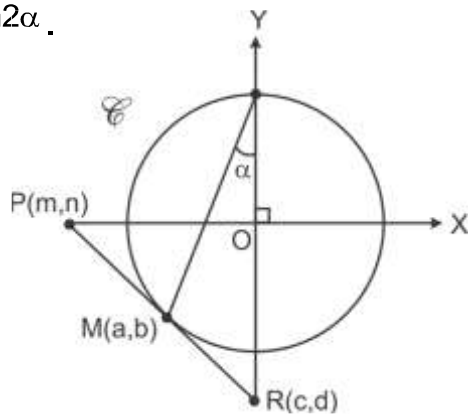
Teorema de Pitágoras en el triángulo HPC

$$a^2=\left(-\csc\theta-1\right)^2+\text{ctg}^2\theta$$

Luego $a^2\text{sen}^2\theta=2+2\text{sen}\theta$

Rpta.: E

5. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si M es punto de tangencia, determine $ma+nb+ac+bd+m\text{sen}2\alpha$.



A) $\text{sen}\alpha$

B) $-\csc\alpha$

C) 1

D) 2

E) 3

Solución:

$m=\sec(-2\alpha-90°)$

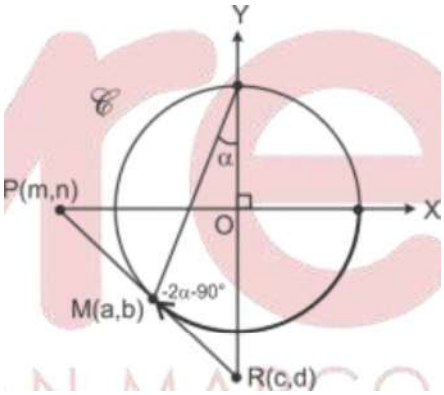
$n=0$

$a=\cos(-2\alpha-90°)$

$b=\text{sen}(-2\alpha-90°)$

$c=0$

$d=\csc(-2\alpha-90°)$

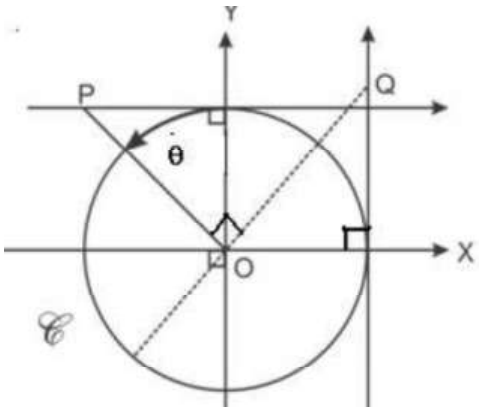


Por tanto

$ma+nb+ac+bd+m\text{sen}\alpha=2+\sec(\alpha+90°)\text{sen}\alpha=1$

Rpta.: C

6. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Determine la distancia entre P y Q



A) $(\csc\theta)\text{u}$

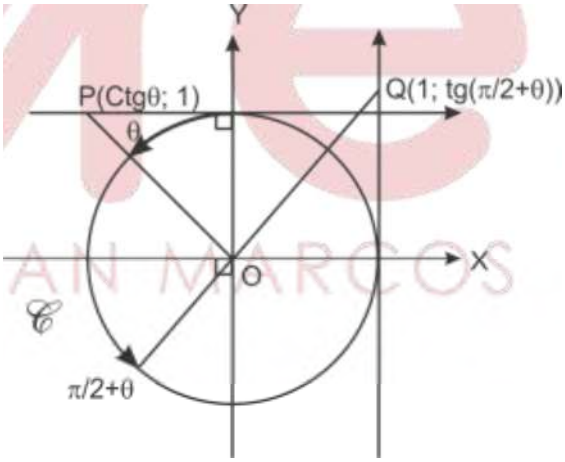
B) $\left(\dfrac{\sec^2\theta}{2}\right)\text{u}$

C) $\left(\dfrac{3}{2}\,\text{tg}\,\theta\right)\text{u}$

D) $\sqrt{2}\text{u}$

E) $\left(\sqrt{2}\csc\theta\right)\text{u}$

<u>Solución</u>:



$$PQ = \sqrt{(\text{ctg}\theta - 1)^2 + \left(1 - \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(\text{ctg}\theta - 1)^2 + (1 + \text{ctg}(\theta))^2}$$

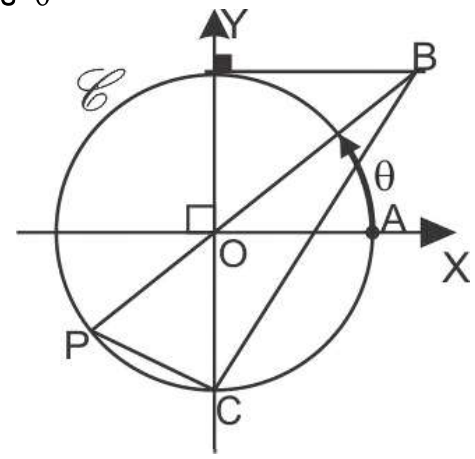
$$PQ = \sqrt{2\csc^2\theta}$$

$$(\theta \in \text{IIC})$$

$$PQ = \sqrt{2}\csc\theta$$

Rpta.: E

7. En la figura C es una circunferencia trigonométrica, el área de la región triangular PBC es $\left(\dfrac{(1+x)\text{ctg}\theta}{2}\right)u^2$ .Halle el valor de $x^2+\cos^2\theta$



A) $1+\cos^2\theta$

B) 1

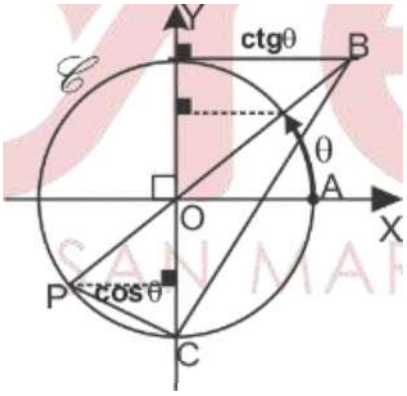
C) $2+\cos^2\theta$

D) $2\cos^2\theta$

E) $1+\text{sen}^2\theta$

Solución:

El área de la región triangular es:



$\text{Área}_{OBC}+\text{Área}_{POC}$

$$\frac{\text{ctg}\theta}{2}+\frac{\cos\theta}{2}=\left(\frac{\text{ctg}\theta(1+x)}{2}\right)$$

$\Rightarrow x\text{ctg}\theta=\cos\theta\Rightarrow x=\text{sen}\theta$

$x^2+\cos^2\theta=1$

Rpta.: B

8. Si $E=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}+\csc\theta+\text{ctg}\theta$ y $4\theta\in\langle 5\pi,6\pi\rangle$. ¿A qué intervalo pertenece la expresión E^2

A) $\langle 0,2\rangle$ B) $[0,2]$ C) $[-1,1\rangle$ D) $\langle -2,2]$ E) $\langle 0,4\rangle$

Solución:

Reduciendo

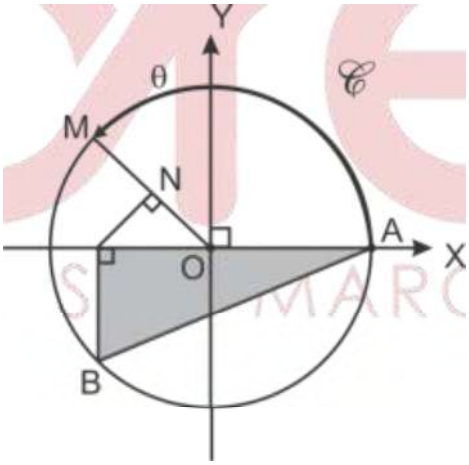
$$E=\sqrt{\frac{2\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}+\csc\theta+\text{ctg}\theta=\left|\text{tg}\frac{\theta}{2}\right|+\csc\theta+\text{ctg}\theta;\ \frac{\theta}{2}\in\left\langle\frac{5\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right\rangle$$

$$=\left|\text{tg}\frac{\theta}{2}\right|+\text{ctg}\frac{\theta}{2}=-\text{tg}\frac{\theta}{2}+\text{ctg}\frac{\theta}{2}=2\text{ctg}\theta.$$

Además $0<\text{ctg}\theta<1$, $\forall\,\theta\in\left\langle\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right\rangle$. Por tanto $0<E<2\Rightarrow E^2\in\langle 0,4\rangle$.

Rpta.: E

9. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si Au^2 es el área de la región sombreada y ON=NM, halle $\dfrac{8A}{\sqrt{3-\text{tg}^2\theta}}$



A) $2-\sec\theta$

B) $2+\sec\theta$

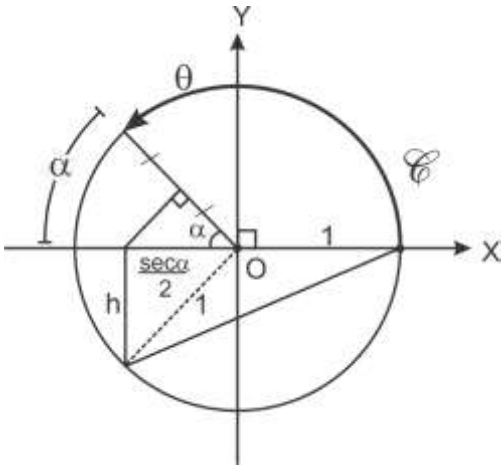
C) 1

D) $\sec\theta$

E) -1

Solución:

De la figura,



$$h=\sqrt{1-\frac{\sec^2\alpha}{4}}=\frac{\sqrt{4-\sec^2\alpha}}{2}$$

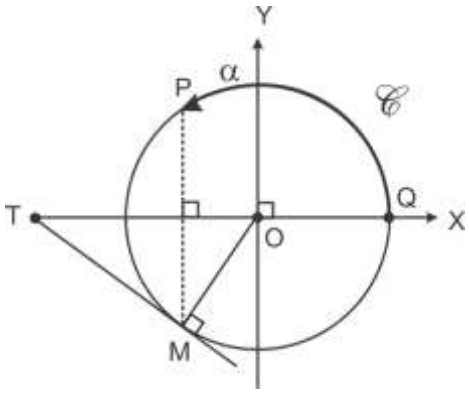
$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{4-\sec^2\alpha}}{2}\right)\left(1+\frac{\sec\alpha}{2}\right)$$

$$A=\frac{1}{8}\left(\sqrt{4-\sec^2\alpha}\right)\left(2+\sec\alpha\right),\quad \alpha+\theta=\pi \text{ entonces}$$

$$\frac{8A}{\sqrt{3-\text{tg}^2\theta}}=2+\sec\left(\pi-\theta\right)=2-\sec\theta$$

Rpta.: A

10. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si la coordenada del baricentro del triángulo TMO es $(a;b)$, halle 3(a-b).



A) $\sec\alpha+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha$

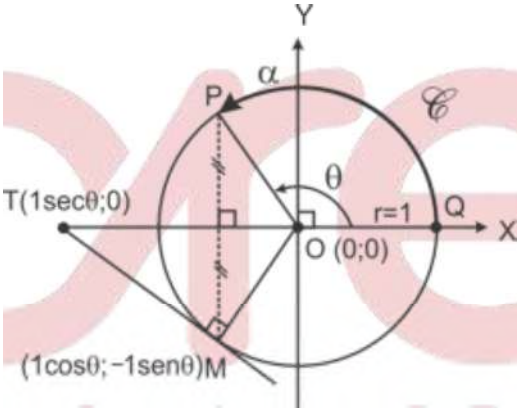
B) $\sec\alpha+\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$

C) $\sec\alpha-\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha$

D) $\sec\alpha-\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$

E) $\sec\alpha+\cos\alpha$

Solución:



Por Teorema de coordenadas

$$a=\frac{\sec\alpha+\cos\alpha+0}{3}$$

$$b=\frac{-\operatorname{sen}\alpha+0}{3}$$

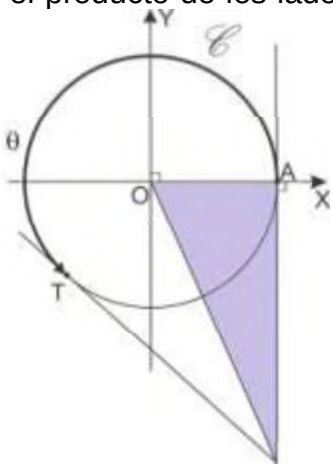
$$\Rightarrow 3(a-b)=\sec\alpha+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha$$

$$\theta=\alpha$$

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica, halle el producto de los lados del triángulo sombreado (T es punto de tangencia).



A) $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\csc\frac{\theta}{2}$

B) $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\sec\frac{\theta}{2}$

C) $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\csc\frac{\theta}{2}$

D) $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\sec\frac{\theta}{2}$

E) $-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\csc\frac{\theta}{2}$

Solución:

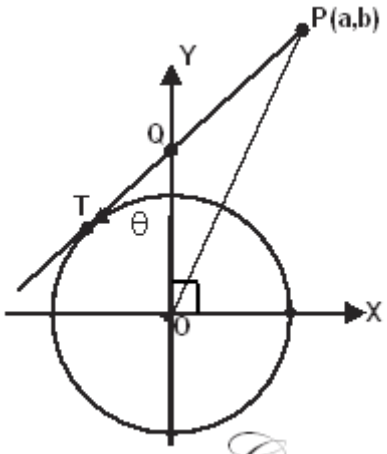
los lados del triángulo sombreado son :

$1, \text{tg}\left(180° - \frac{\theta}{2}\right)$ y $\sec\left(180° - \frac{\theta}{2}\right)$

piden : $\text{tg}\frac{\theta}{2}\sec\frac{\theta}{2}$

Rpta.: A

2. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si T es punto de tangencia, halle $a\text{sen}\theta + b\cos\theta$



A) $2 - \sec\theta$

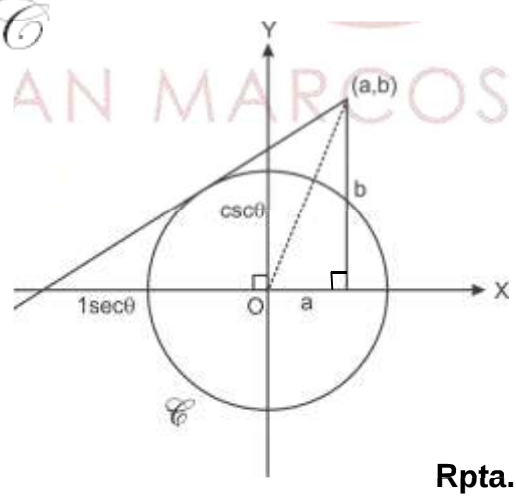
B) $2 + \sec\theta$

C) 1

D) $\sec\theta$

E) -1

Solución:



$$\frac{\csc\theta}{-\sec\theta} = \frac{b}{a - \sec\theta} \Rightarrow -\text{ctg}\theta\left(a - \sec\theta\right) = b$$

$$-a\text{ctg}\theta + \csc\theta = b \Rightarrow b + a\text{ctg}\theta = \csc\theta$$

$$b\text{sen}\theta + a\cos\theta = 1$$

Rpta.: C

3. En la figura, $\mathscr{C}$ es la circunferencia trigonométrica. Si Au^2 es el área de la región sombreada y T punto de tangencia, halle $A(1+\sec\theta)(1-tg\theta)$.

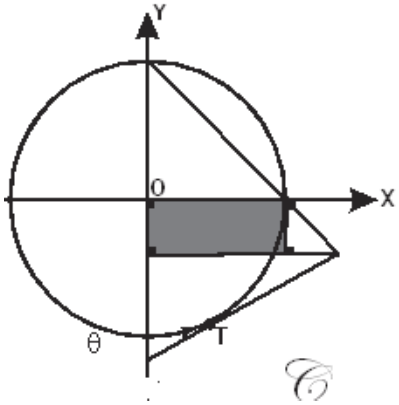
A) $tg^2\theta$

B) $tg\theta$

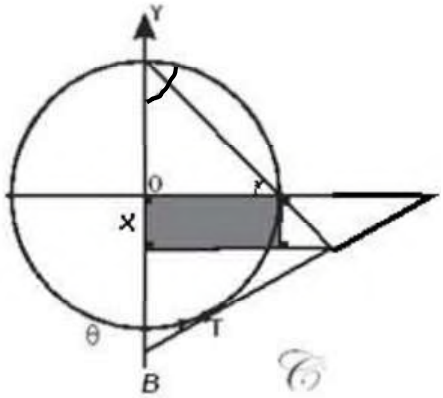
C) $ctg^2\theta$

D) $\sec^2\theta$

E) $1-tg^2\theta$



Solución:



$$\frac{\sec\theta}{-\csc\theta}=\frac{x+1}{-\csc\theta-x}$$

$$\sec\theta+x.tg\theta=x+1$$

$$\sec\theta-1=x(1-tg\theta)\Rightarrow x=\frac{\sec\theta-1}{1-tg\theta} \text{ y } A=x$$

$$A(1+\sec\theta)(1-tg\theta)=\left(\frac{\sec\theta-1}{1-tg\theta}\right)(1+\sec\theta)(1-tg\theta)$$

$$=tg^2\theta$$

Rpta.: A

4. Con los datos de la circunferencia trigonométrica $\mathscr{C}$ de la figura, hallar el área de la región trapezoidal ODCB

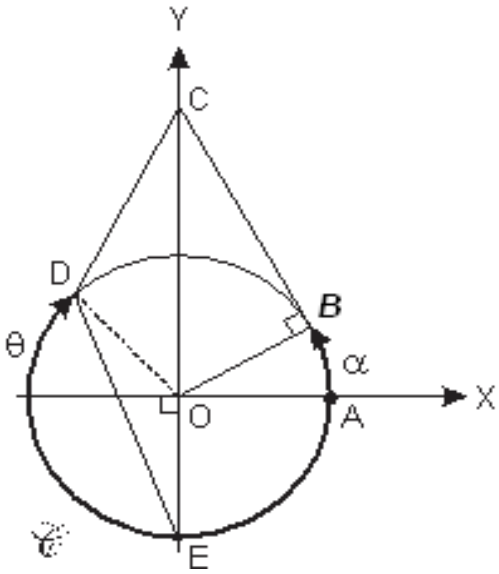
A) $-\frac{1}{2}\cos\theta\,(1-\csc\alpha)\,u^2$

B) $-\cos\theta\,(1+\csc\alpha)\,u^2$

C) $\frac{1}{2}(ctg\alpha-\cos\theta\csc\alpha)u^2$

D) $-\frac{1}{2}\cos\alpha\,(1-\csc\alpha)\,u^2$

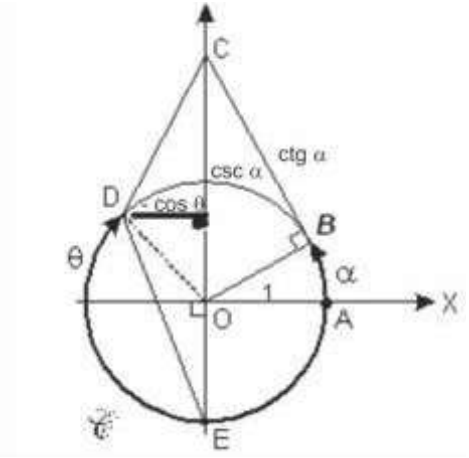
E) $-\frac{1}{2}(\csc\alpha-1)\cos\theta\,u^2$



Solución:

En la figura

$$S_{ODCB} = -\frac{\cos\theta\csc\alpha}{2} + \frac{ctg\alpha}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(ctg\alpha - \cos\theta\csc\alpha\right)u^2$$



Rpta.: C

5. Un corredor parte del punto M y recorre un arco θ en sentido horario sobre una pista circular de radio 1 m hasta llegar al punto P. En ese instante, otro corredor se ubica en el punto C, tal y como se muestra en la figura, determine la distancia en línea recta del corredor que se ubica en el punto C y el corredor que se ubica en el punto P

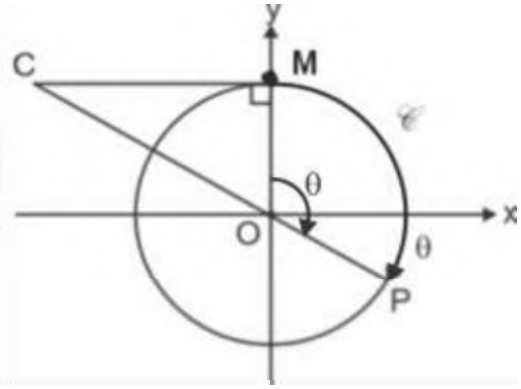
A) $(1-\sec\theta)$m

B) $(1-\csc\theta)$m

C) $(1+\csc\theta)$m

D) $(1+\sec\theta)$m

E) $(2+\csc\theta)$m



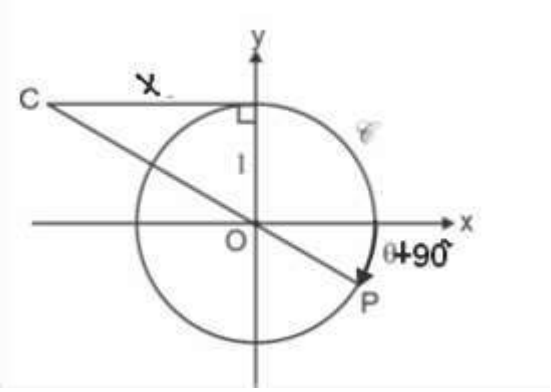
Solución:

Por Teorema de Pitágoras

$$OC = \sqrt{1+\left(-ctg(\theta+90°)\right)^2}$$
$$OC = -\csc(90+\theta) = -\sec\theta$$

Por tanto

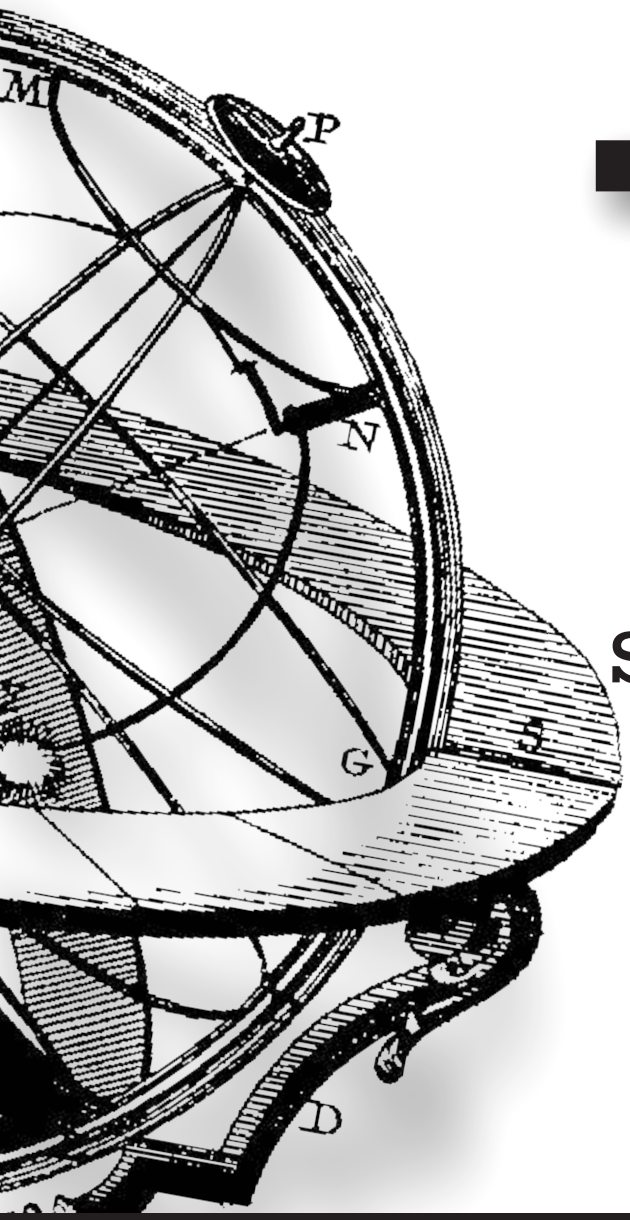
$$PC = 1-\sec\theta$$



Rpta.: A

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



15

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometria

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS I

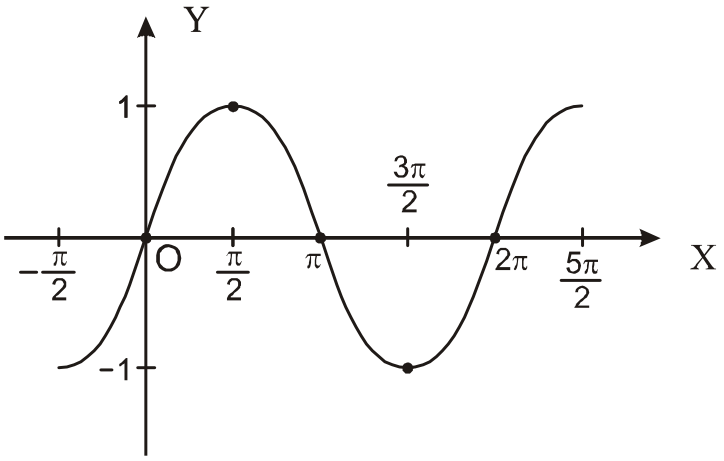
Función Seno

La función seno $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es impar, definida por $f(x)=\text{sen}x$

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

b) $\text{Ran}(f)=[-1,1]$

c) Período 2π



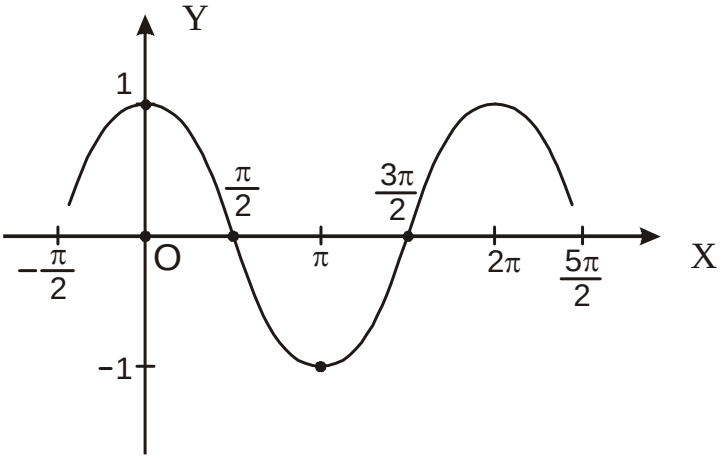
Función Coseno

La función coseno $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es par, definida por $f(x)=\cos x$

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

b) $\text{Ran}(f)=[-1,1]$

c) Período 2π



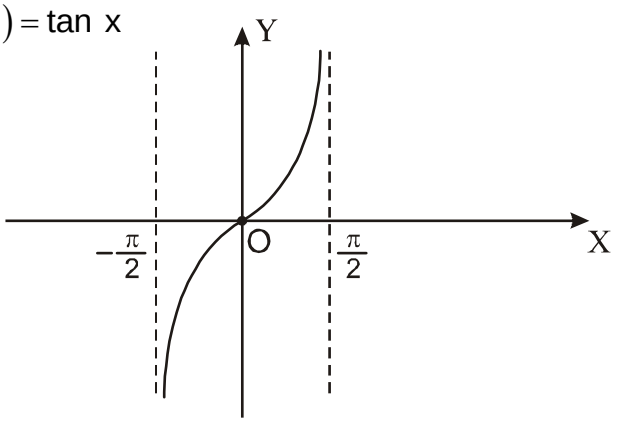
Función Tangente

Es la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es impar, definida por $f(x)=\tan x$

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\text{Ran}(f)=\mathbb{R}$

c) Período π



d) Es creciente en cada uno de los intervalos $(2k-1)\frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

<u>Propiedades de Funciones Sinusoidales y Cosenoidales</u>

Siendo A, B, ϕ, y k números reales fijos (constantes).

Se llama función sinusoidal, si su regla de correspondencia es de la forma:

$$f(x) = A.\text{Sen}\big(B(x-\phi)\big) + k, \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Y se llama función cosenoidal, si su regla de correspondencia es de la forma:

$$f(x) = A.\text{Cos}\big(B(x-\phi)\big) + k, \ \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Para cualquiera de estas funciones se tiene las siguientes propiedades:

a. La amplitud es $|A|$

b. El ángulo de desfase (desplazamiento horizontal) es ϕ .

Si $\phi > 0$, el desfase es $|\phi|$ unidades a derecha del origen de coordenadas.

Si $\phi < 0$, el desfase es $|\phi|$ unidades a izquierda del origen de coordenadas.

c. Desplazamiento vertical es k

Si k>0 el desplazamiento |k| unidades hacia arriba del origen de coordenadas.

Si k<0 el desplazamiento |k| unidades hacia abajo del origen de coordenadas.

d. Periodo $T = \frac{2\pi}{|B|}$

e. El Alcance o Rango de f es $\big[k-|A|;k+|A|\big]$.

Trigonometria

EJERCICIOS

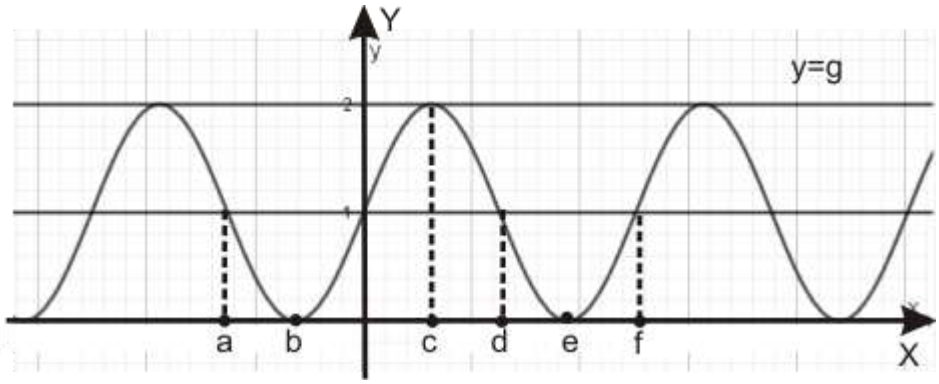
1. Según el gráfico de la función real f mostrada, cuya regla de correspondencia es $f(x)=1+\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right);\ x\in[-2\pi,4\pi]$. Halle $a+b+c+d+e+f+g+A+T$ donde A es la amplitud y T el periodo.

A)

B)

C)

D) $5\pi+3$



Solución:

Del gráfico

$a=-2\pi,\ b=-\pi,\ c=\pi,\ d=2\pi,\ e=3\pi,\ f=4\pi, g=2$

$A=1,\ T=4\pi$

Suma:

$S=-2\pi-\pi+\pi+2\pi+3\pi+4\pi+2+1+4\pi$

$S=11\pi+3$

Rpta.: B

2. Un bloque que está colgado del extremo de un resorte es jalado 20 cm por debajo de su posición de equilibrio. La distancia en centímetros del bloque respecto a su posición de equilibrio en el instante t en segundos está modelado por la función real f definida por $f(t)=20\cos(\omega t+\phi)$, $\frac{3\pi}{4}<\omega<\frac{11\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$. Siendo esta positiva si el bloque está por debajo del posición de equilibrio y negativa si el bloque está por encima.

Si a los 8 segundos de iniciado el movimiento armónico simple el bloque se encuentra a $10\sqrt{3}$ centímetros sobre su posición de equilibrio, calcule la distancia después de 24 segundos de la anterior observación y la posición del bloque respecto al posición de equilibrio.

A) 10 cm por encima

B) 14,1 cm por debajo

C) 10 cm por debajo

D) 14,1 cm por encima

Solución:

Consideraremos distancia positiva cuando el bloque este por debajo del punto de equilibrio.

$$20 = f(0) = 20\cos(\phi) \quad \rightarrow \quad \phi = 0$$

Luego:

$$-10\sqrt{3} = 20\cos(8\omega) \quad \rightarrow \quad \cos(8\omega) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$8\omega = \frac{41\pi}{6} \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{41\pi}{48}$$

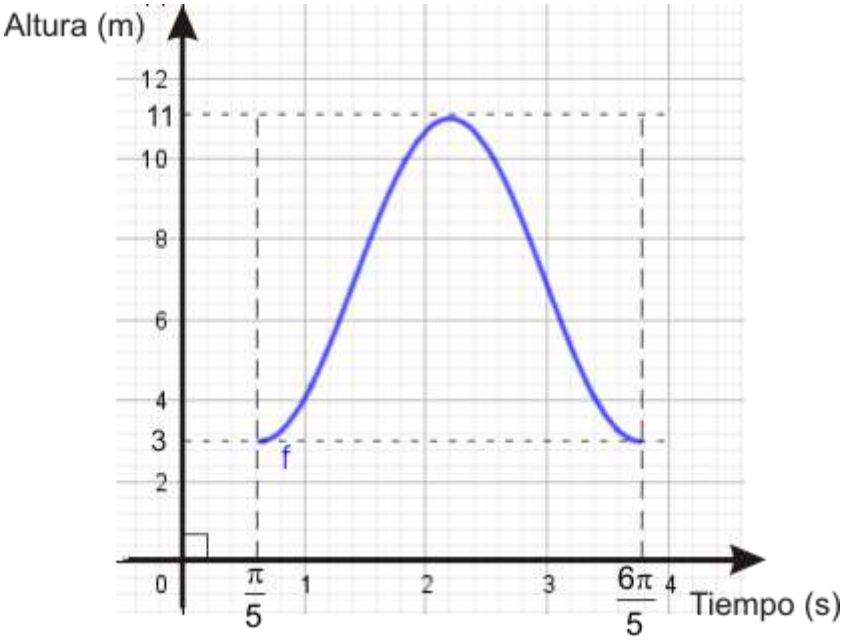
Calculando:

$$f(32) = 20\cos\left(\frac{41\pi}{48}(32)\right) = -10$$

$\therefore$ El bloque se encuentra a 10 cm por encima de la posición de equilibrio.

Rpta.: A

3. En la figura se representa la gráfica de una función cosenoidal, que modela la altura respecto al suelo de un insecto en un instante de tiempo "t" donde $t \in \left[\frac{\pi}{5}; \frac{6\pi}{5}\right]$, si el insecto describe un comportamiento periódico en el tiempo. Indique a que distancia del suelo se encuentra dicho insecto en el segundo $\frac{11\pi}{5}$.



A) 2 m B) 4 m C) 3 m D) 5 m

Solución:

Se observa que la gráfica corresponde al opuesto del Coseno (Grafica Invertida), por consiguiente, su ecuación será de la forma: $y = -A.\text{Cos}(Bx + C) + D$

Los valores lo buscamos en la gráfica:

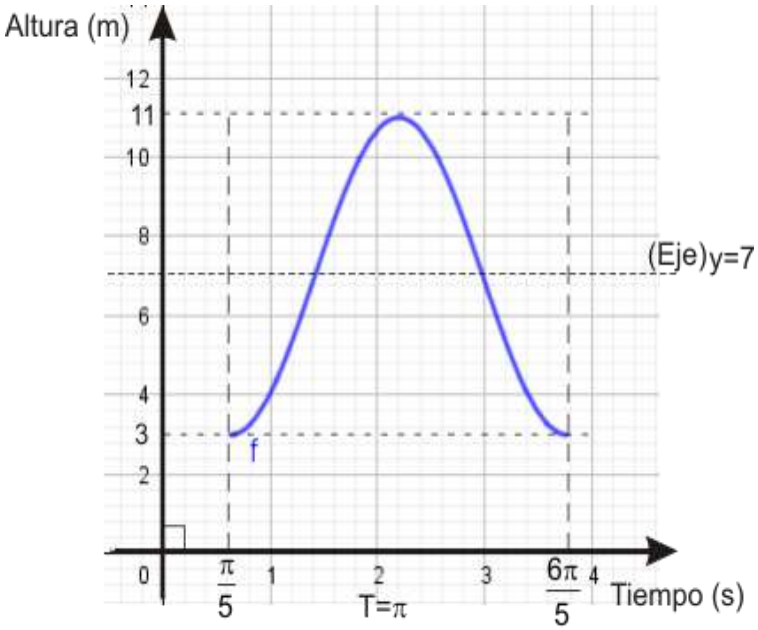
El eje es y = $\frac{3+11}{2}$ = 7 $\Longrightarrow$ D = 7

La amplitud es 11 – 7 = 4 $\Longrightarrow$ A = 4

El periodo de la curva es $\pi = \frac{2\pi}{B}$ $\Longrightarrow$ B = 2

El desfase de la curva es $\frac{\pi}{5}$ además : Bt + C = 0 $\Longrightarrow$ $2\frac{\pi}{5}$ + C = 0 $\Longrightarrow$ C = $-2\frac{\pi}{5}$

La curva es $y = f(t) = -4\cos\left(2t - \frac{2\pi}{5}\right) + 7$



Piden:

$$f\left(\frac{11\pi}{5}\right) = -4\cos\left(2\frac{11\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) + 7$$

$$f\left(\frac{11\pi}{5}\right) = -4(1) + 7 = 3$$

El insecto se encontrará a 3 m del suelo.

Rpta .: C

4. La afluencia de personas en miles, que abordan la línea 1 del tren eléctrico después de las 6 am, hasta antes de las 9 am, el 15 de marzo del año 2020 se estima mediante la función $F(t)=6-5\text{sen}\left(\frac{23\pi}{2}+\frac{\pi t}{3}\right)$, donde el tiempo t son las horas transcurridas desde la medianoche del día anterior. Determine el mínimo número de personas que abordarían el tren eléctrico.

A) 1001 B) 1009 C) 1000 D) 1006

Solución:

Se deduce que

$$F(t)=6-5\text{sen}\left(\frac{23\pi}{2}+\frac{\pi t}{3}\right)=6-5\text{sen}\left(10\pi+\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi t}{3}\right)=6+5\cos\frac{\pi t}{3}$$

Como

$$6<t<9 \quad\rightarrow\quad 2\pi<\frac{\pi t}{3}<3\pi \quad\rightarrow\quad \cos 3\pi<\cos\frac{\pi t}{3}<\cos 2\pi$$

$$\rightarrow\quad -1<\cos\frac{\pi t}{3}<1 \quad\rightarrow\quad -5<5\cos\frac{\pi t}{3}<5$$

$$\rightarrow\quad 1<\underbrace{6+5\cos\frac{\pi t}{3}}_{F(t)}<11$$

Luego $\therefore F_{\text{mín}}=1{,}001$ personas

Rpta.: A

5. La cantidad de personas inscritas al recién inaugurado gimnasio "Ponte en Forma" está modelada por $P(x)=4\text{sen}2x\cos^2 x-4\text{sen}^2 x\text{sen}2x$ en cientos, donde $x\in\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$ denota la cantidad de días (en centenas aproximadamente) después de su gran inauguración. Durante ese tiempo, ¿cuántas personas como máximo fueron inscritas?

A) 200 personas B) 300 personas
C) 250 personas D) 350 personas

Solución:

$P(x) = 4sen2x\cos^2 x - 4sen^2 xsen2x$

$P(x) = 4sen2x(\cos^2 x - sen^2 x)$

$P(x) = 2sen4x$

$\text{como}: 0 \le x \le \frac{\pi}{8}$

$\rightarrow 0 \le 4x \le \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow 0 \le sen4x \le 1$

$\rightarrow 0 \le 2sen4x \le 2$

$\therefore\ P_{máx} = 2.$

Rpta.: A

6. Determinar la razón entre el máximo valor de la función decreciente y el mínimo valor de la función creciente, si dichas funciones reales están dadas por

$$f(x) = \cos 2x + sen2x\ ,\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{8}$$
$$g(x) = \cos x - \sqrt{3}senx\ ,\quad \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{2\pi}{3}$$

A) 3 B) 1 C) 0 D) $\frac{1}{3}$

Solución:

1) $f(x) = \cos 2x + sen2x = \sqrt{2}\left(sen\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}sen2x\right)$

$\Rightarrow\ f(x) = \sqrt{2}sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right);$

$0 \le x \le \frac{\pi}{8} \Rightarrow 0 \le 2x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le 2x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}$. Como seno es creciente en $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, también lo es f, y vemos que

$\sqrt{2}sen\frac{\pi}{4} \le f(x) \le \sqrt{2}sen\frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \le f(x) \le \sqrt{2}.$

Así, mín $f(x) = 1$.

2) $g(x) = \cos x - \sqrt{3}senx = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x - sen\frac{\pi}{3}senx\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{3} \le \pi$. Como coseno es decreciente en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, entonces también lo es g.

Además $\cos\pi \le \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 \le \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 0 \Rightarrow -2 \le g(x) \le 0$

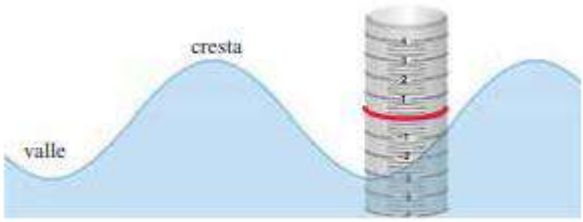
$\Rightarrow$ Máx $g(x) = 0$.

$$\therefore \quad \frac{\text{Máx}\, g(x)}{\text{Mín}\, f(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Rpta.: C

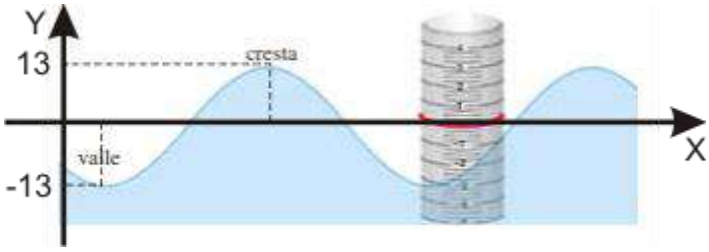
7. En la figura se representa una ola pasando por un pilote rompeolas, donde el nivel del agua respecto al nivel medio del mar, está modelada por la función $h(t) = 5\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}t\right) + 12\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, en metros, en el tiempo t segundos.

Encuentre la altura de la ola, es decir, la distancia vertical entre el valle y la cresta de la ola.



A) 26 m B) 13 m C) 24 m D) 12 m

<u>Solución</u>:



$$h(t) = 5\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}t\right) + 12\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) = 13\left(\frac{5}{13}\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}t\right) + \frac{12}{13}\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\right)$$

$$h(t) = 13\left(\cos\alpha\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{10}t\right) + \text{sen}\alpha\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)\right) = 13\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{10}t\right)$$

La altura de la ola es de 26 m.

Rpta.: A

8. Las estrellas variables son aquellas cuyo brillo varían periódicamente. El modelo del brillo de una de estas estrellas se realiza mediante la función

$$b(t) = 8.9 - 3.1\cos\left(\frac{\pi}{192}t\right);$$

donde t denota el tiempo en días. ¿Cuánto días pasan desde que la estrella tuvo su brillo mínimo, hasta que obtuvo su brillo máximo?

A) 192 días B) 184 días C) 176 días D) 162 días

Solución:

El brillo mínimo de la estrella se alcanza cuando

$$\cos\left(\frac{\pi}{192}t\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi}{192}t = 0; 2\pi \rightarrow t = 0; 384; ..$$

Luego el registro del brillo de la estrella comienza cuando la estrella tiene un brillo mínimo, y luego después de 384 días, que es el periodo del brillo de la estrella.

El brillo máximo de la estrella se alcanza cuando

$$\cos\left(\frac{\pi}{192}t\right) = -1 \rightarrow \frac{\pi}{192}t = \pi \rightarrow t = 192$$

Luego el primer registro del brillo máximo es luego de 192 días, luego se va intercalando entre el máximo y el mínimo cada 192 días.

Rpta.: A

9. Cada vez que late nuestro corazón, la presión sanguínea primero aumenta y después disminuye a medida que el corazón descansa entre una pulsación y otra. La presión sanguínea de Luka está modelada por la función $p(t) = 116 + 24\text{sen}(192\pi t)$ donde p(t) es la presión en mmHg (milímetros de mercurio), en el tiempo t medida en minutos. Determine el número de pulsaciones por minuto de Luka.

A) 96 pulsaciones B) 72 pulsaciones C) 98 pulsaciones D) 81 pulsaciones

Solución:

Determinaremos primero el periodo, pues este representará una pulsación

$T = \frac{2\pi}{192\pi} = \frac{1}{96}$, entonces 1 pulsación dura $\frac{1}{96}$ min, entonces 96 pulsaciones ocurren durante 1 min.

Rpta.: A

10. Un músico que toca el saxofón hace sonar la nota SI varias veces con la misma intensidad, sosteniendo el sonido en cada vez. Observándose que para la nota SI pura, la variación de la presión normal del aire está dada por $V(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\text{Sen}\left(\frac{\pi t}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\text{Cos}\left(\frac{\pi t}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donde V se mide en kilogramos por centímetro cuadrado y la variable del tiempo t se mide en segundos.
¿Cuánto dura la nota SI antes de que se repita?

A) 3 s B) 4 s C) 6 s D) 8 s

Solución:

$$V(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\text{Sen}\left(\frac{\pi t}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\text{Cos}\left(\frac{\pi t}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$V(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\text{Sen}\left(\left(\frac{\pi t}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

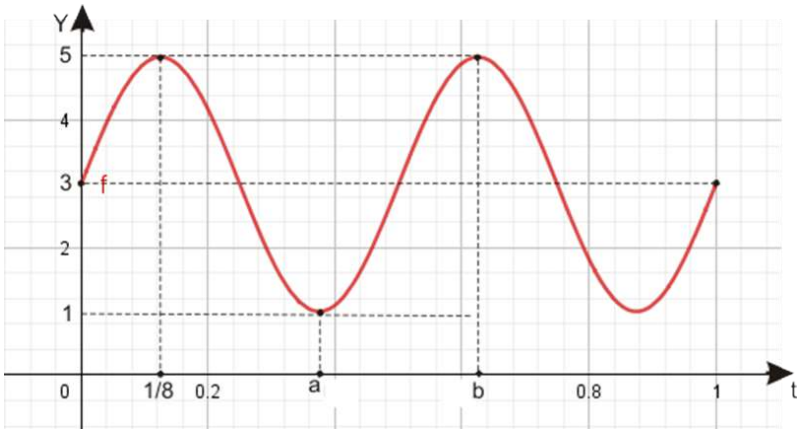
$$V(t)=\frac{1}{2}\text{Sen}\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En la figura se representa la pantalla de un monitor que registra parte de la intensidad sonora del cantar de una ballena azul. Si la función f que modela la intensidad del canto del cetáceo, tiene como regla de correspondencia $f(t)=A.\text{sen}(B\pi t)+C$; donde t es el tiempo transcurrido en segundos. Según la gráfica ¿en qué instante de tiempo en segundos la intensidad sonora del canto de la ballena es mínima por primera vez?



A) $\frac{1}{3}$ seg B) $\frac{3}{8}$ seg C) $\frac{4}{7}$ seg D) $\frac{3}{5}$ seg

Solución:

Al ser f una función cosenosoidal, donde: $f(t) = A.sen(B\pi t) + C$

El desplazamiento vertical entonces $C = 3$, la amplitud entonces $A = 2$

Luego: $f(t) = 2.sen(B\pi t) + 3$, de la figura y la regla tenemos que:

$$T = \frac{2\pi}{B\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow B = 4$$

Luego: $f(t) = 2.sen(4\pi t) + 3$

Si la intensidad es mínima entonces

$$f(t) = 1 \rightarrow 2.sen(4\pi t) + 3 = 1$$

$$sen(4\pi t) = -1 \rightarrow 4\pi t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t = \frac{3}{8}$$

Rpta.: C

2. Un niño sube a un ascensor, donde la altura del niño respecto al suelo se modela mediante la función f , cuya regla de correspondencia es $f(t) = 5\left(\sqrt{2}+1\right)\tan\left(\frac{\pi t}{16}\right)$ en metros; en el instante de tiempo t en segundos donde $0 \le t \le 4$ ¿En qué instante el niño está a 5 metros del suelo?

A) 3 s B) 4 s C) 5 s D) 2

Solución:

$$f(t) = 5 \rightarrow 5 = 5\left(\sqrt{2}-1\right)\tan\left(\frac{\pi t}{16}\right)$$

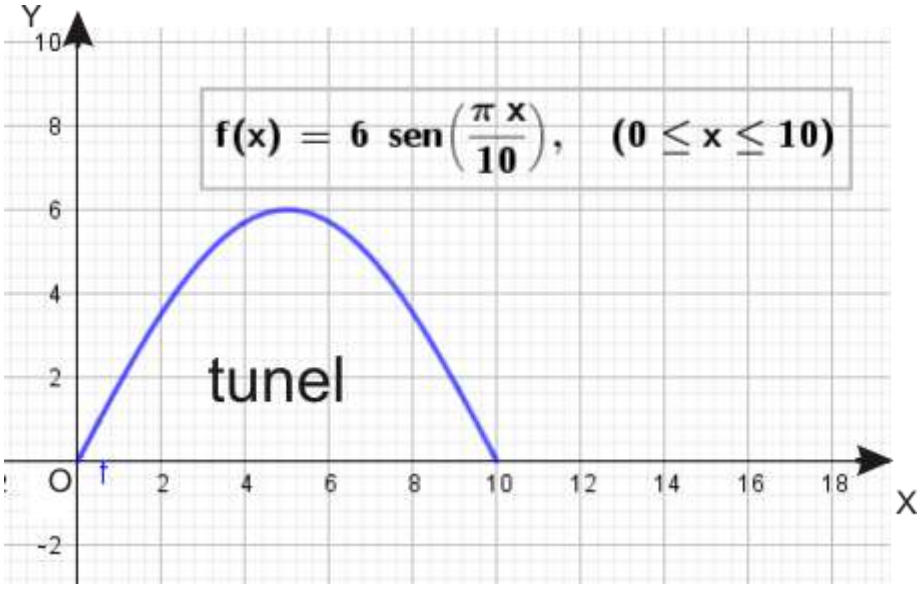
$$0 \le \frac{\pi t}{16} \le \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{\pi t}{16}\right) = \sqrt{2}+1$$

$$\frac{\pi t}{16} = \frac{\pi}{8} \rightarrow t = 2$$

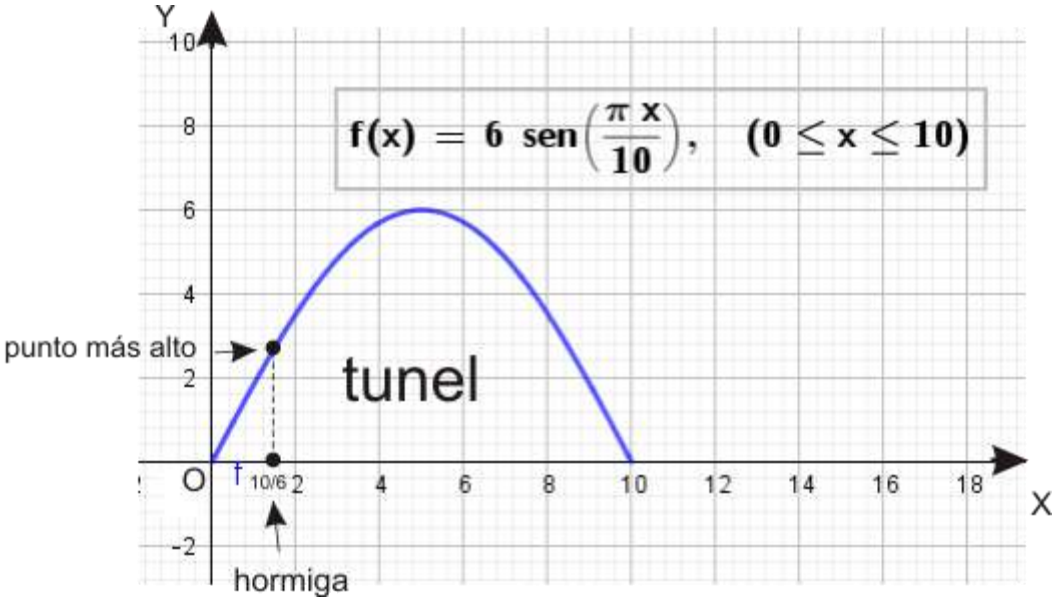
Rpta.: D

3. En la figura se representa la sección transversal de un túnel, que está representada por la gráfica de la función f; donde para cada punto (x; y), x denota la distancia horizontal en metros respecto al punto O, e y representa la distancia vertical en metros respecto a O. Si una hormiga pasa por un punto P en el suelo del túnel, que está a 10/6 metros del punto O. ¿A qué altura se encuentra el punto más alto del túnel que está sobre la hormiga?



A) 3 m B) 3,5 m C) 3,6 m D) 3,7 m

<u>Solución</u>:

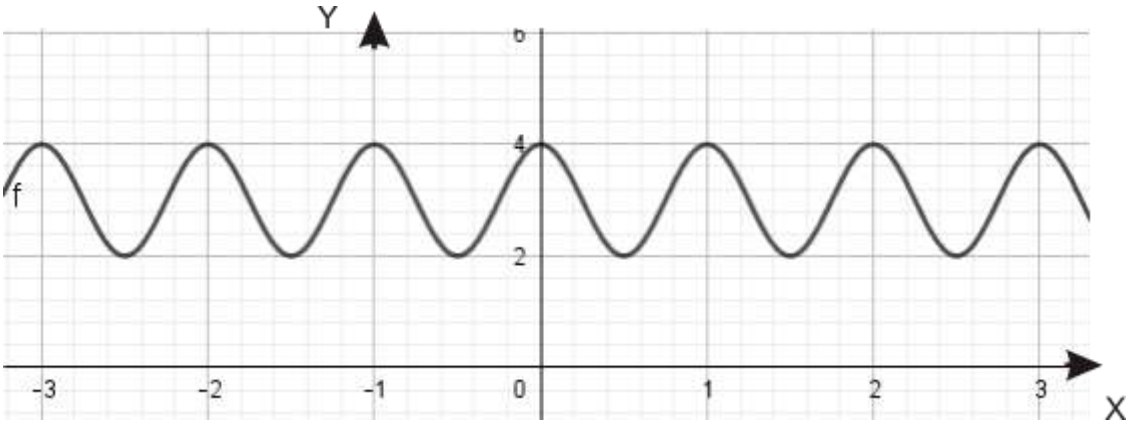


El punto más alto del túnel sobre la hormiga, está definido como

$$f\left(\frac{10}{6}\right)=6\text{Sen}\left(\frac{\pi\left(10/6\right)}{10}\right)=6\text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=3$$

Rpta.: A

4 En la siguiente figura, se representa la gráfica de una función f. Si f cumple que $f(x)=\cos(A\pi x)+B$, determine la suma de $A+B$.



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

Solución:

De la figura se tiene que el periodo de f es T=1, luego si $f(x)=\cos(A\pi x)+B$, entonces A=2 y el desplazamiento vertical es B=3.

Luego $A+B=5$.

Rpta.: C

5. El ingreso mensual de una empresa que se dedica a la venta de una gran variedad de papel tapiz se modela mediante la función f, cuya regla de correspondencia está dado por $f:\ f(t)=\text{sen}^6\left(\frac{\pi t}{6}\right)+2\text{sen}^3\left(\frac{\pi t}{6}\right)+3;\quad 0\le t\le 12$. Si f(t) está en miles de soles, mientras que t representa el tiempo en meses transcurridos desde el primer día del mes del año.

¿En qué mes la empresa logra su máximo ingreso?

A) Junio B) Marzo C) Mayo D) Diciembre

Solución:

$$f(t) = \text{sen}^6\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2\text{sen}^3\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 3$$

$$f(t) = \left(\text{sen}^3\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 1\right)^2 + 2$$

Si $0 \le t \le 12 \rightarrow 0 \le \frac{\pi t}{6} \le 2\pi$

Entonces

$$-1 \le \text{sen}^3\left(\frac{\pi t}{6}\right) \le 1$$

$$0 \le \text{sen}^3\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 1 \le 2$$

$$0 \le \left(\text{sen}^3\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 1\right)^2 \le 4 \rightarrow 2 \le f(t) \le 6$$

El máximo ingreso de la empresa se logra, cuando $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1 \rightarrow t = 3$

El máximo ingreso de la empresa es de S/. 6 000 y esto se logra en el mes de Marzo

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. El número de habitantes en millones de personas después de x años transcurridos a partir del año 2000, está determinada por la función real P definida por $P(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 30$. ¿Cuántas veces se alcanzará el número máximo de habitantes, en el periodo 2005 a 2020?

A) 1 vez B) 2 veces C) 3 veces D) 4 veces

Solución:

El máximo número de habitantes, se logra cuando $\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow \pi x = 2\pi + 8n\pi \rightarrow x = 2 + 8n$.

Si n = 0, transcurren 2 años, entonces en el 2002 se alcanza el máximo.
Si n = 1, transcurren 10 años, entonces en el 2010 se alcanza el máximo.
Si n = 2, transcurren 18 años, entonces en el 2018 se alcanza el máximo.

Rpta.: B

2. La variación de la temperatura en el cuerpo humano es un proceso biológico que se repite aproximadamente cada 24 horas. La temperatura del cuerpo es máxima a las 5 pm y mínima a las 5 am. Si la función $F(t) = 98{,}6 - a\,\text{sen}(bt + c)$, $a, b > 0$ modela la temperatura del cuerpo en grados Fahrenheit y t denota el tiempo en horas transcurridos desde la medianoche. Además, la máxima y mínima temperatura del cuerpo son $98{,}9\ °F$ y $98{,}3\ °F$, Si c el mínimo valor positivo, determine el valor de $20a + \frac{24}{\pi}(b + c)$.

A) 4 B) 6 C) 10 D) 12

Solución:

Del enunciado, el proceso que se repite está relacionado con el periodo, es decir:

$$\frac{2\pi}{b} = 24 \quad \rightarrow \quad b = \frac{\pi}{12}$$

Tenemos:

$$-a + 98,6 \leq 98,6 - a\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12} + c\right) \leq a + 98,6$$

$$98,3 = -a + 98,6 \quad \rightarrow \quad a = 0,3$$

Cuando $t = 5$:

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12} + c\right) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{5\pi}{12} + c = \frac{\pi}{2} \rightarrow c = \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore \quad 20a + \frac{24}{\pi}(b + c) = 10$$

Rpta.: C

3. La función real h definida por $h(t) = 36 - 30\cos\left(\frac{\pi}{6,2}t\right)$ representa la profundidad de las mareas de un determinado océano en pies, donde t denota el tiempo en horas. Si $t = 0$ corresponde a las 00:00 horas. ¿A qué hora la profundidad es la máxima posible por primera vez, si esta se da en la mañana y en el lapso de un día?

A) 5:15 am B) 7:10 am C) 6:12 am D) 9:45 am

Solución:

$$h(t) = 36 - 30\cos\left(\frac{\pi}{6,2}t\right)$$

La profundidad máxima del océano ocurre cuando $\cos\left(\frac{\pi}{6,2}t\right) = -1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{6,2}t = \pi \quad \Rightarrow \quad t = 6,2 \text{ horas} \rightarrow t = 6h + 0,2h \rightarrow t = 6h + 12\text{min}$$

$\therefore$ La profundidad máxima del océano se da a las 6:12 am.

Rpta.: C

4. La fuerza electromotriz o voltaje inducido por un generador eléctrico en un instante de tiempo t en segundos es representado por $E(t)=E_o e^{2t}\cos 2\pi t-2$ voltios, donde t es el tiempo en segundos transcurridos desde que el generador se enciende y "e" es el número de Napier. Halle el máximo voltaje cuando ha transcurrido 2 segundos.

A) $2(e^4-1)$ V B) $(2e^4-1)$ V C) $2e^2$ V D) (e^4-1) V

Solución:

$E(t)=E_o e^{2t}\cos 2\pi t-2$ cuando $t=0, E(t)=0;$ no hay corriente eléctrica

$E(0)=E_o e^{o}\cos 0-2=0$ de donde $E_o=2$

Luego $E(t)=2e^{2t}\cos 2\pi t-2$ como $-1\le\cos 2\pi t\le 1$ y $e^{2t}>0$

$\Rightarrow -e^{2t}\le e^{2t}\cos 2\pi t\le e^{2t}$

$\Rightarrow -2e^{2t}\le 2e^{2t}\cos 2\pi t\le 2e^{2t}$

$\Rightarrow -2-2e^{2t}\le 2e^{2t}\cos 2\pi t-2\le 2e^{2t}-2$

$\Rightarrow -2-2e^{2t}\le E(t)\le 2e^{2t}-2$

Luego, el máximo voltaje es cuando $t=2$, entonces $\text{Máx}(E(t))=2e^4-2=2(e^4-1)$

Rpta.: A

5. Se estima que el número de crímenes en miles de una ciudad para el próximo año está modelada por la función real C definida por $C(x)=2\text{sen}^4x-2\text{sen}^2x+\frac{1}{2}$, donde x denota los meses después del inicio del próximo año. ¿Cuántos crímenes como máximo puede esperarse que se cometan?

A) 500 B) 800 C) 1000 D) 400

Solución:

$C(x)=2\text{sen}^4x-2\text{sen}^2x+\frac{1}{2}=2(\text{sen}^2x-\frac{1}{2})^2$

como $0\le\text{sen}^2x\le 1\rightarrow -\frac{1}{2}\le\text{sen}^2x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\rightarrow 0\le(\text{sen}^2x-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}$

$\therefore 0\le\underbrace{2(\text{sen}^2x-\frac{1}{2})^2}_{C(x)}\le\frac{1}{2}$

Rpta.: A

6. La presión sanguínea de Luis se modela por la siguiente expresión P definida como $P(t)=20\text{sen}(160\pi t)+130$, donde t es el tiempo en minutos desde que se le tomo la presión a Luis, durante el primer periodo. ¿En qué instantes se da la presión sistólica es decir la presión máxima de Luis?

A) $\frac{1}{160}$ min B) $\frac{1}{240}$ min C) $\frac{5}{120}$ min D) $\frac{1}{320}$ min

Solución:

Primero vemos el periodo de P(t), $T=\frac{2\pi}{160\pi}$, entonces $T=\frac{1}{80}$

En el primer periodo $t\in\left[0,\frac{1}{80}\right]$ luego $0\le t\le\frac{1}{80}$

Entonces $0\le 160\pi t\le 2\pi$

Así, para que se dé la presión sístole se tendría que $\text{sen}(160\pi\, t)=1$

$$160t\pi=\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},...$$

$$t=\frac{1}{320},\frac{5}{320},\frac{9}{320},...$$

Luego $t=\frac{1}{320}$ min

Rpta.: D

7. Determine el dominio de la función real definida por $f(x)=\sqrt{|\text{sen}7x|-1}$.

A) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{14}\,/\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{7}\,/\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\{(2n+1)\pi\,/\,n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\left\{\frac{n\pi}{14}\,/\,n\in\mathbb{Z}\right\}$

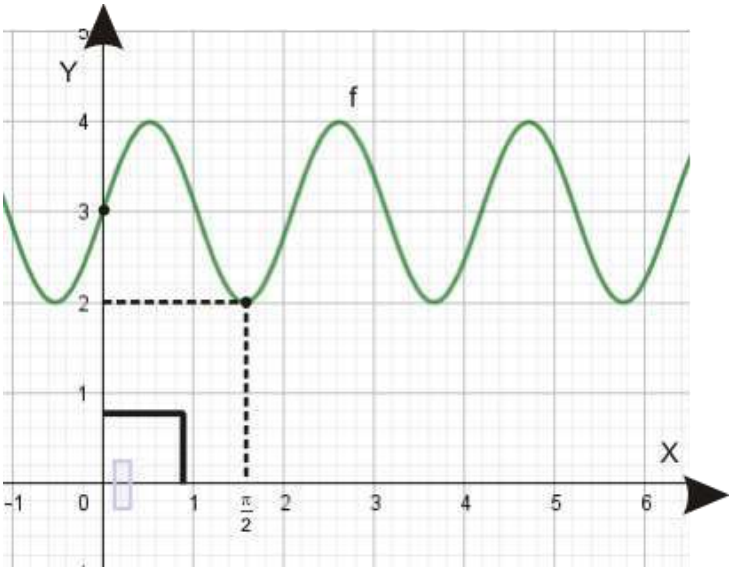
Solución:

$$|\text{sen}7x|-1\ge 0\rightarrow|\text{sen}7x|\ge 1\rightarrow \text{sen}7x=\pm 1\rightarrow 7x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x=(2n+1)\frac{\pi}{14}$$

Rpta.: A

8. En la figura se tiene la gráfica de la función f. cuya regla de correspondencia es $f(x) = a.\text{sen}(bx) + c$ y una recta horizontal $\mathscr{L}$: y = 3. Si b es positivo, determine su valor.



A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

Solución:

De la figura mostrada, la amplitud de la función es 1 es decir a = 1, la traslación vertical de la función seno es 3 es decir $c = 3$. Luego tenemos, que la regla de correspondencia se puede definir de la siguiente manera:

$f(x) = \text{sen}(bx) + 3$**,** notamos también que, el valor del periodo esta entre 2 y 3

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \rightarrow \text{sen}\left(\frac{b\pi}{2}\right) + 3 = 2 \rightarrow b = 4n + 3$ **,** luego el periodo es $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4n+3}$

Entonces, de la figura $2 < T < 3$

$2 < \frac{2\pi}{4n+3} < 3 \rightarrow 8n + 6 < 2\pi < 12n + 9 \rightarrow 4n + 3 < \pi < 6n + 4{,}5$, entonces h = 0; luego, el periodo es $T = \frac{2\pi}{3}$ y $b = 3$.

Rpta.: C

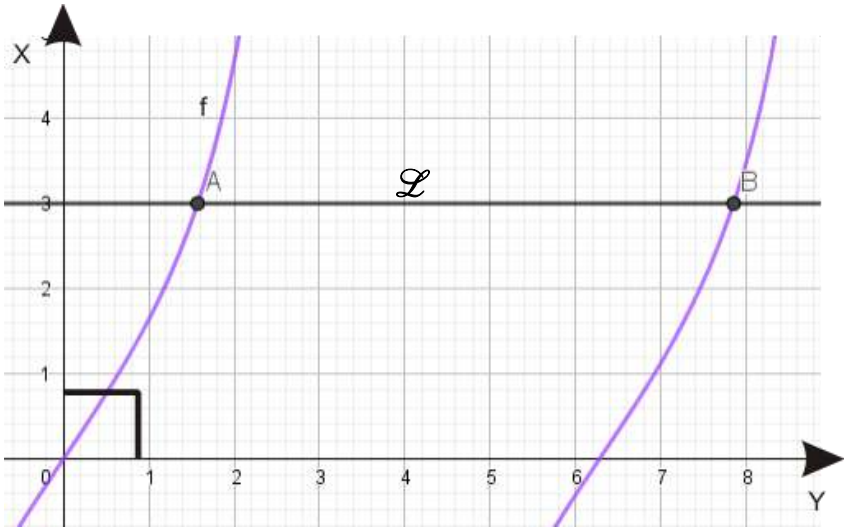
9. Si en la figura se representa parte de la gráfica de la función real f definida como $f(x) = 3\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, determine las coordenadas del punto medio de A y B.

A) $\left(\frac{3\pi}{4}, 3\right)$

B) $\left(\frac{3\pi}{2}, 3\right)$

C) $\left(\frac{5\pi}{2}, 3\right)$

D) $\left(\frac{7\pi}{2}, 3\right)$



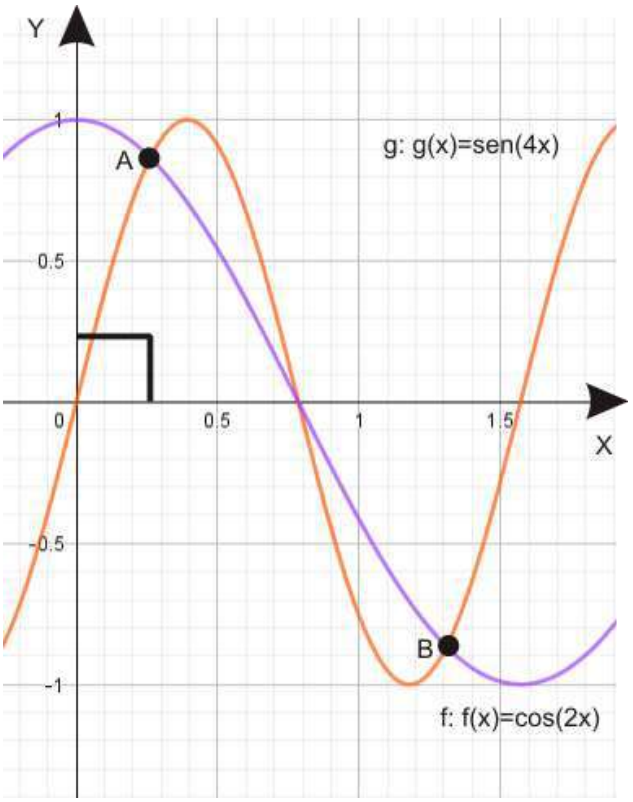
Solución:

Claramente observamos que las ordenadas de los puntos A y B son iguales a 3, es decir $y = f(x) = 3\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 3 \rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

El periodo de esta función es $T = 2\pi$, entonces la otra solución para la ecuación es $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$, luego el punto medio entre A y B es $\left(3; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Rpta.: B

10. En la figura se representan las gráficas de las funciones f y g. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:



i. $A \in f$ y $B \in g$

ii. $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \in f \cap g$

iii. Las abscisas de A y B, son soluciones de la ecuación $\text{sen}(4x) = \cos(2x)$.

A) VVV

B) VFV

C) FFV

D) VVF

Solución:

i. De la figura tenemos que A y B pertenecen tanto a f como a g. (V)

ii. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \in f$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(4\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \text{sen}\pi = 0 \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \in g$

Luego: $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \in f \cap g$. (V)

iii. $A = (x_A, y_A) \in f \cap g \rightarrow f(x_A) = y_A \wedge g(x_A) = y_A \rightarrow g(x_A) = f(x_A)$

Luego, $\text{sen}(4x_A) = \cos(2x_A)$, análogamente con el punto B. (V)

Rpta.: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La distancia en kilómetros a la que se encuentra un mensajero motorizado de computadoras de su centro de abastecimiento, está modelada por la función $D(t)=5\text{sen}^2\left(\frac{t\pi}{4}\right)$, donde t denota las horas transcurridas desde las 6 de la mañana hasta las 10 de la noche. Determine cuántas veces salió el mensajero de su centro de abastecimiento en un día para realizar las entregas.

A) 5 B) 2 C) 3 D) 4

Solución:

Cuando salga y regrese el mensajero al centro de abastecimiento la distancia respecto al punto de partida será igual cero, esto indica que:

$$D(t)=5\text{sen}^2\left(\frac{t\pi}{4}\right)=0\rightarrow \text{sen}\left(\frac{t\pi}{4}\right)=0\rightarrow \frac{t\pi}{4}=n\pi\rightarrow t=4n$$

Entre las 6 am y 10 pm transcurren 16 horas.

El mensajero salió cuatro veces.

Rpta.: D

2. Halle la intersección del dominio y el rango de la función f definida como $f(x)=\text{sen}\sqrt{4\pi^2-x^2}$.

A) $[0,1]$ B) $[-2,1]$ C) $[-1,1]$ D) $[-\pi,\pi]$

Solución:

Hallando el Dominio: $4\pi^2-x^2\geq 0\rightarrow -2\pi\leq x\leq 2\pi\rightarrow \text{Dom}(f)=[-2\pi,2\pi]$

Hallando el Rango: $0\leq 4\pi^2-x^2\leq 4\pi^2\rightarrow 0\leq\sqrt{4\pi^2-x^2}\leq 2\pi\rightarrow -1\leq \text{sen}\sqrt{4\pi^2-x^2}\leq 1$

Luego la intersección es: $\text{Dom}(f)\cap\text{Ran}(f)=[-1,1]$

Rpta.: C

3. Si f es una función definida como $f(x)=5\text{sen}\left(3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+6,\ \frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{7\pi}{6}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. El mínimo de f es 1,

ii. El periodo de f es $\frac{2\pi}{3}$,

iii. f es creciente en $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$.

A) VFV B) VFF C) VVV D) FFF

Solución:

i. Si $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$ entonces

$$0 \le 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 3\pi \to -1 \le \text{sen}\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) \le 1 \to 1 \le f(x) \le 11 \quad \text{(V)}$$

ii. La función f no es periódica, ya que no está definida $f\left(\frac{7\pi}{6} + T\right)$ con T > 0. (F)

iii. $\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{7\pi}{6} \to \frac{\pi}{2} \le x - \frac{\pi}{6} \le \pi \to \frac{3\pi}{2} \le 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 3\pi$,

si el ángulo $w = 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, varía de $\frac{5\pi}{2}$ a 3π , es decreciente. (F)

Rpta.: B

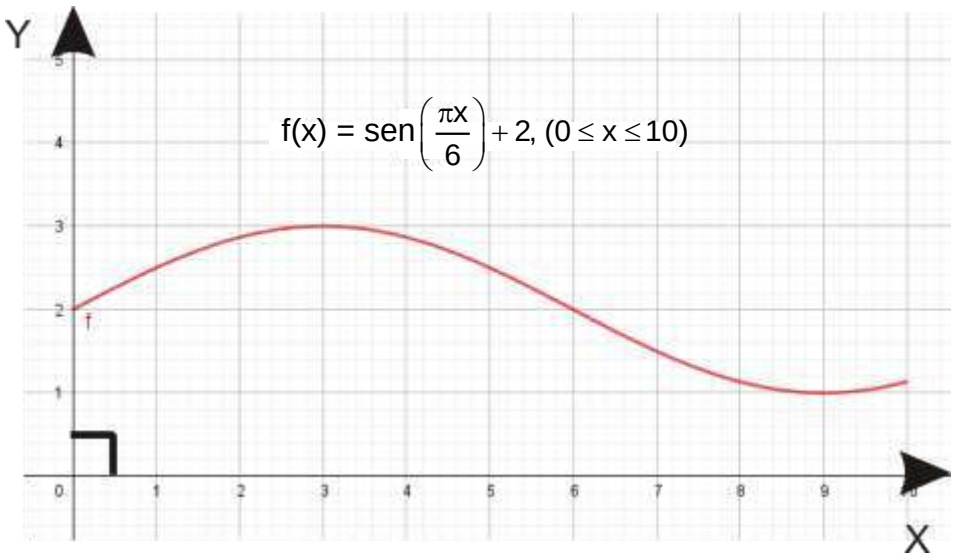
4. En la figura se representa la gráfica de una función f, que modela la altura de un avión que partió al mediodía en miles de metros, después de x horas transcurridas desde la 2 de la tarde. Determine a qué hora el avión está a 1500 metros de altura y si éste asciende o desciende.

A) 9:00 pm. desciende.

B) 10:00 pm. desciende

C) 8:00 pm. asciende

D) 7:00 pm. desciende



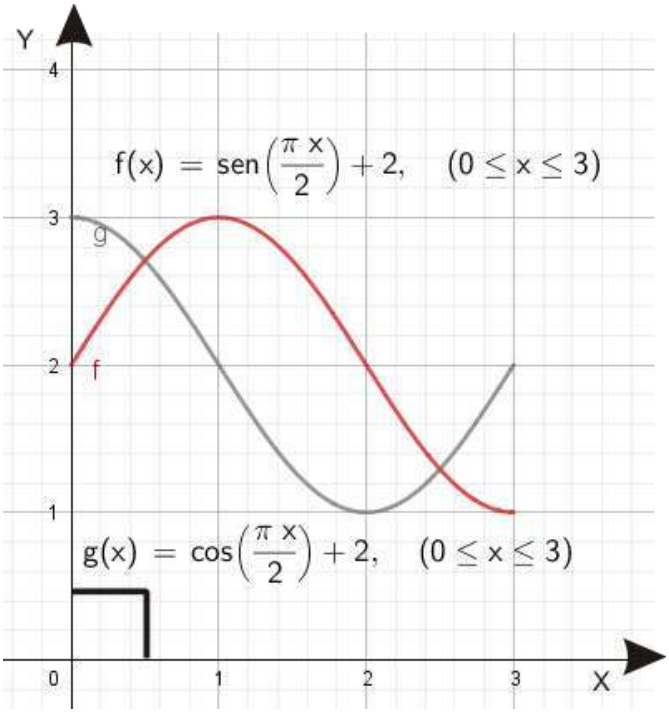
Solución:

$$f(x) = 1.5 \to \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 2 = 1.5 \to \text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) = -\frac{1}{2} \to \frac{\pi x}{6} : \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \to x = 7;11$$

Luego como $0 < x < 10$ entonces $x = 7$.

Rpta.: A

5. El nivel del agua en metros de dos piscinas, en las primeras tres horas se modela con las funciones f y g, donde x representa las horas transcurridas desde el mediodía. Si Luka desea entrar a una de las piscinas justo cuando tienen el mismo nivel agua. ¿A qué hora es más recomendable entrar a la piscina si se sabe que Luka no sabe nadar y no es muy alto?



A) 2:00 pm

B) 3:30 pm

C) 2:00 pm

D) 2:30 pm

Solución:

Si el nivel del agua es el mismo entonces

$$f(x) = g(x) \rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2 = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2 \rightarrow \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{4} \ \vee \ \frac{\pi x}{2} = \frac{5\pi}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2} \ \vee \ x = \frac{5}{2}$$

Media hora o dos horas y media después del mediodía, las piscinas tienen el mismo nivel de agua.

Menor nivel del agua es lo mejor, así que a la 2:30 pm es más recomendable.

Rpta.: D

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Halle el dominio de la función real f definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}5x}{(\operatorname{sen}3x+\cos 3x)^2}$.

A) $\mathbb{R}-\{(4n-1)\frac{\pi}{12}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ B) $\mathbb{R}-\{\frac{n\pi}{4}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ C) $\mathbb{R}-\{(4n-1)\frac{\pi}{6}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\mathbb{R}-\{(2n-1)\frac{\pi}{3}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ E) $\mathbb{R}-\{(3n-1)\frac{\pi}{8}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

Solución:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}5x}{(\operatorname{sen}3x+\cos 3x)^2}=\frac{\operatorname{sen}5x}{1+\operatorname{sen}6x}$$

$$x\in \text{Dom(f)} \Leftrightarrow \operatorname{sen}6x\neq -1 \Leftrightarrow 6x\neq(4n-1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x\neq(4n-1)\frac{\pi}{12},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Rpta.: A

2. Si $\langle c, d\rangle$ es el rango de la función real f definida por $f(x)=\dfrac{\sec^2\frac{\pi}{3}\cdot\cos 8x}{\cos 4x-\operatorname{sen}4x}$, halle el valor de $\sqrt{2}(d-c)$.

A) 18 B) 15 C) 16 D) 14 E) 19

Solución:

$$f(x)=\frac{\sec^2\frac{\pi}{3}\cdot\cos 8x}{\cos 4x-\operatorname{sen}4x}=4(\cos 4x+\operatorname{sen}4x) \text{ si } \operatorname{tg}4x\neq 1.$$

$$\operatorname{tg}4x\neq 1\Rightarrow 4x\neq n\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow 4x+\frac{\pi}{4}\neq n\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow \operatorname{sen}(4x+\frac{\pi}{4})\neq\operatorname{sen}(n\pi+\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(4x+\frac{\pi}{4})\neq\cos(n\pi)=\pm 1 \quad\cdots(1)$$

$$f(x)=4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 4x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}4x)=4\sqrt{2}\operatorname{sen}(4x+\frac{\pi}{4})\quad\cdots(2)$$

$$-1<\operatorname{sen}(4x+\frac{\pi}{4})<1 \Rightarrow -4\sqrt{2}<4\sqrt{2}\operatorname{sen}(4x+\frac{\pi}{4})<4\sqrt{2} \text{ de (1) y (2)}$$

$$\Rightarrow \text{Ran(f)}=\langle -4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}\rangle=\langle c, d\rangle$$

$$\therefore\ \sqrt{2}(d-c)=16.$$

Rpta.: C

3. Una empresa que se dedica a la venta de cierta clase de teléfonos móviles, llega a la conclusión, después de un estudio de mercado, que la función de demanda para ese producto es $f(p)=\dfrac{\operatorname{sen}(2\cos p)}{\operatorname{sen}(\cos p)}$ en miles de unidades y p es el precio en dólares del producto. ¿Cuál es la mínima cantidad demandada?

A) 7 000 unidades
B) 1 000 unidades
C) 2 000 unidades
D) $(2\cos 1)$ miles de unidades
E) $(2\cos 2)$ miles de unidades

<u>Solución</u>:

1) $f(p)=\dfrac{\operatorname{sen}(2\cos p)}{\operatorname{sen}(\cos p)} \quad \Rightarrow \quad f(p)=\dfrac{2\operatorname{sen}(\cos p)\cos(\cos p)}{\operatorname{sen}(\cos p)}$

$\Rightarrow \quad f(p)=2\cos(\cos p)\ ,\ p\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\ ,\ n\in\mathbb{Z}$

2) $-1\leq \cos p \leq 1\ ,\ \cos p\neq 0$

Teniendo en cuenta la gráfica de coseno, tenemos que:

$$\cos 1 \leq \cos(\cos p) < 1 \quad \Rightarrow \quad 2\cos 1 \leq 2\cos(\cos p) < 2$$
$$\Rightarrow \quad 2\cos 1 \leq f(p) < 2$$

$\therefore$ mínima cantidad demandada = $(2\cos 1)$ miles de unidades.

Rpta.: D

4. La función real h definida por $h(t) = 7 - 3\cos(\frac{\pi t}{48})$, donde t denota el tiempo en segundos, representa la altura de una montaña rusa en metros, ubicada en un parque de diversiones. Halle la altura máxima de la montaña rusa y cuál es su periodo, en ese orden.

A) $14m$; 96 B) $14m$; 48 C) $10m$; 96 D) $20m$; 96 E) $40m$; 48

Solución:

$$h(t) = 7 - 3\cos\left(\frac{\pi t}{48}\right)$$

sabemos $-1 \le \cos\left(\frac{\pi t}{48}\right) \le 1 \Rightarrow -3 \le -3\cos\left(\frac{\pi t}{48}\right) \le 3 \Rightarrow 4 \le 7 - 3\cos\left(\frac{\pi t}{48}\right) \le 10$

$$4 \le h(t) \le 10$$

$$h(t)_{max} = 10 \quad \wedge \quad T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{48}} = 96.$$

Rpta.: C

5. La temperatura T expresada en grados centígrados en una ciudad esta descrita por la función $T(t) = 4\cos(bt) + 3\text{sen}(bt) + 20$. Calcule la suma de la temperatura máxima y mínima.

A) 10°C B) 20°C C) 30°C D) 40°C E) 50°C

Solución:

$$T(t) = 4\cos(bt) + 3\text{sen}(bt) + 20$$

$$\Rightarrow -\sqrt{(4)^2 + (3)^2} \le 4\cos(bt) + 3\text{sen}(bt) \le \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$\Rightarrow -5 \le 4\cos(bt) + 3\text{sen}(bt) \le 5$$

$$\Rightarrow 15 \le 4\cos(bt) + 3\text{sen}(bt) + 20 \le 25$$

$$\Rightarrow 15 \le T(t) \le 25$$

$$\Rightarrow T_{MÍN} = 15°C \quad \wedge \quad T_{MÁX} = 25°C$$

Luego la suma de ambas temperaturas es 40°C.

Rpta.: D

6. El voltaje E de un circuito eléctrico se modela por la función definida por $E(t) = 7\text{sen}(120\pi t)$, donde t es el tiempo medido en segundos. Si $\frac{1}{240} \le t \le \frac{5}{720}$, halle la diferencia entre el máximo y mínimo voltaje.

A) $\frac{3}{2}$V B) $\frac{7}{4}$V C) $\frac{7}{8}$V D) 4V E) $\frac{7}{2}$V

Solución:

Consideremos

$$\frac{1}{240} \le t \le \frac{5}{720} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \le 120\pi t \le \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{sen}\frac{5\pi}{6} \le \text{sen}\left[120(\pi t)\right] \le \text{sen}\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \le \text{sen}\left[120(\pi t)\right] \le 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{2} \le 7\text{sen}\left[(120\pi t)\right] \le 7$$

De donde se obtiene

$$\therefore E_{max} - E_{min} = 7 - \frac{7}{2} = \frac{7}{2}\text{voltios}$$

Rpta.: E

7. La demanda de agua de una comunidad en la temporada de verano está determinada por la función real f definida por $f(t) = 2000\,\text{sen}\frac{\pi t}{100} + 4000$ en metros cúbicos por día, donde t denota el tiempo en días. Halle el día en que se produce la demanda máxima de agua por primera vez en el año.

A) Día 51 B) Día 50 C) Día 40 D) Día 60 E) Día 55

Solución:

$$f(x) = 2000\,\text{sen}\frac{\pi t}{100} + 4000$$

Para la máxima demanda se debe tener $\text{sen}\frac{\pi t}{100} = 1$

$$\Rightarrow \frac{\pi t}{100} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 50$$

$\therefore$ La máxima demanda se produce el día 50.

Rpta.: B

8. Las alturas de olas causadas por un tsunami están modeladas por la función real f definida por $f(t) = 25\cos\frac{\pi t}{15}$ en pies y t en minutos. Calcule el número de veces en la que las olas alcanzan una altura de 12,5 pies, en un intervalo de 45 minutos.

A) 3 veces B) 4 veces C) 2 veces D) 5 veces E) 1 vez

Solución:

$$f(t) = 25\cos\frac{\pi t}{15} \Rightarrow 25\cos\frac{\pi t}{15} = 12{,}5 \Rightarrow \cos\frac{\pi t}{15} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{15} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t = 5,\ 25,\ 35.$$

Rpta.: A

9. Sea la función real f definida por $f(x) = -8\,\text{sen}(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4})$. Halle la suma de la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de f.

A) 10,5 B) 11,5 C) 12,5 D) 13,5 E) 9,5

Solución:

$$f(x) = -8\,\text{sen}(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4})$$

$$\text{Amplitud}: A = 8$$

$$\text{Periodo}: T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$\text{Desplazamiento de fase}: 0 \le \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4} \le 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi x}{2} \le \frac{9\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A + T + D = 8 + 4 + \frac{1}{2} = 12{,}5$$

Rpta.: C

10. La superficie de la capa de nieve en el hemisferio norte está modelada por $S(t) = 25 + 21\cos[\frac{\pi}{26}(t-5)]$ en millones de kilómetros cuadrados, donde t denota el tiempo en semanas a partir del primero de enero. Halle el mes en que la capa de nieve sea mínima.

A) Julio B) Octubre C) Junio D) Agosto E) Setiembre

Solución:

$S(t) = 25 + 21\cos[\frac{\pi}{26}(t-5)]$

La capa de nieve mínima ocurre cuando $\cos[\frac{\pi}{26}(t-5)] = -1$

$\Rightarrow \frac{\pi}{26}(t-5) = \pi \Rightarrow t = 31$ semanas, que corresponde al mes de agosto.

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle el dominio de la función real f definida por $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos 4x} - \operatorname{ctg} 2x$.

A) $\mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{12} / n \in \mathbb{Z}\}$ B) $\mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{5} / n \in \mathbb{Z}\}$ C) $\mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{4} / n \in \mathbb{Z}\}$

D) $\mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{6} / n \in \mathbb{Z}\}$ E) $\mathbb{R} - \{\frac{n\pi}{8} / n \in \mathbb{Z}\}$

Solución:

$f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\cos 4x} - \operatorname{ctg} 2x$

$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow \cos 4x \neq 0 \ \wedge \ \text{sen } 2x \neq 0 \ \wedge \ \cos 2x \neq 0$

$\Rightarrow \ \cos 4x \neq 0 \ \wedge \ \text{sen } 4x \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{sen } 8x \neq 0 \ \Rightarrow \ 8x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \ x \neq \frac{n\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}$

Rpta.: E

2. Halle el rango de la función real f definida por

$$f(x) = 4\,\text{sen}\,2x \cdot \cos 2x - \cos 8x,\ -\frac{\pi}{24} \le x < \frac{\pi}{24}.$$

A) $[-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\rangle$ B) $[-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}]$ C) $\langle -\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\rangle$

D) $[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\rangle$ E) $[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$

Solución:

$$f(x) = 4\,\text{sen}\,2x \cdot \cos 2x - \cos 8x,\ -\frac{\pi}{24} \le x < \frac{\pi}{24}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4\,\text{sen}\,2x \cdot \cos 2x - \cos 8x \Rightarrow f(x) = 2\,\text{sen}\,4x - 1 + 2\,\text{sen}^2 4x$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(\text{sen}\,4x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}$$

Luego, $-\frac{\pi}{6} \le 4x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \text{sen}\,4x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le (\text{sen}\,4x + \frac{1}{2})^2 < 1$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \le 2(\text{sen}\,4x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\rangle.$$

Rpta.: A

3. Las oscilaciones de una pesa está determinada por la función real f definida por $f(t) = 10\cos\frac{\pi t}{6}$ en centímetros, t en segundos. Para una distancia de 5 centímetros, halle el número de oscilaciones en un intervalo de 30 segundos.

A) 2 oscilaciones B) 4 oscilaciones C) 3 oscilaciones
D) 5 oscilaciones E) 6 oscilaciones

Solución:

$$f(t) = 10\cos\frac{\pi t}{6} \Rightarrow 10\cos\frac{\pi t}{6} = 5 \Rightarrow \cos\frac{\pi t}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{11\pi}{3},\ \frac{13\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t = 2,\ 10,\ 14,\ 22,\ 26$$

Luego, en 30 segundos se producen 5 oscilaciones.

Rpta.: D

4. Halle el periodo de la función real f definida por $f(x)=\dfrac{2\operatorname{sen}4x}{\sec 2x}$.

A) 2π B) 3π C) $\dfrac{3\pi}{2}$ D) $\dfrac{5\pi}{3}$ E) π

Solución:

$$f(x)=\frac{2\operatorname{sen}4x}{\sec 2x}=4\operatorname{sen}2x\cdot\cos^2 2x=2\operatorname{sen}2x\,(1+\cos 4x)$$
$$=2\operatorname{sen}2x+2\cos 4x\cdot\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}6x-\operatorname{sen}2x$$
$$=\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}6x$$

Luego, $T_1=n\pi$, $T_2=\dfrac{m\pi}{3}$, $n, m\in\mathbb{Z}$.

$\therefore T=\pi$.

Rpta.: E

5. Sea la función real f definida por $f(x)=9\cos(\dfrac{3\pi x}{4}-\dfrac{\pi}{3})$. Halle la suma de la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de f.

A) $\dfrac{107}{9}$ B) $\dfrac{101}{9}$ C) $\dfrac{109}{9}$ D) $\dfrac{103}{9}$ E) $\dfrac{113}{9}$

Solución:

$$f(x)=9\cos(\frac{3\pi x}{4}-\frac{\pi}{3})$$

Amplitud: $A=9$

Periodo: $T=\dfrac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}}=\dfrac{8}{3}$

Desplazamiento de fase: $0\le\dfrac{3\pi x}{4}-\dfrac{\pi}{3}\le 2\pi \Rightarrow \dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{3\pi x}{4}\le\dfrac{7\pi}{3}\Rightarrow \dfrac{4}{9}\le x\le\dfrac{28}{9}$

$$\Rightarrow D=\frac{4}{9}$$

$\therefore A+T+D=9+\dfrac{8}{3}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{109}{9}$.

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. El proceso rítmico de respiración consiste en intervalos alternos de inhalación y exhalación. Según estudios realizados, un ciclo completo dura 5 segundos. Si la función $f(t)=a\,\text{sen}\,bt$ modela el volumen de la circulación del aire en el instante t en litros por segundo y si el volumen máximo es 0,6 litros por segundo, determine el valor de $10a+10\pi b^{-1}$.

A) 30 B) 29 C) 32 D) 31 E) 28

Solución:

$f(t)=a\,\text{sen}\,bt,\ b>0$

De la información el periodo es $\frac{2\pi}{b}=5 \Rightarrow b=\frac{2\pi}{5}$

El volumen máximo está dada por la amplitud que es $a=0{,}6$

$\therefore 10a+10\pi b^{-1}=10(0{,}6)+10\pi\left(\frac{5}{2\pi}\right)=6+25=31.$

Rpta.: D

2. Si $[c,d]$ es el rango de la función real f definida por $f(x)=\text{tg}^2 8x-4\text{tg}8x+9,\ -\frac{\pi}{32}\le x\le\frac{\pi}{24}$, halle el valor de $c+d+4\sqrt{3}$.

A) 28 B) 25 C) 27 D) 24 E) 26

Solución:

$f(x)=\text{tg}^2 8x-4\text{tg}8x+9=(\text{tg}8x-2)^2+5$

$-\frac{\pi}{32}\le x\le\frac{\pi}{24}\Rightarrow -\frac{\pi}{4}\le 8x\le\frac{\pi}{3}\Rightarrow -3\le \text{tg}\,8x-2\le\sqrt{3}-2$

$\Rightarrow (\sqrt{3}-2)^2\le(\text{tg}\,8x-2)^2\le 9\Rightarrow(\sqrt{3}-2)^2+5\le(\text{tg}\,8x-2)^2+5\le 14$

$\Rightarrow 12-4\sqrt{3}\le(\text{tg}\,8x-2)^2+5\le 14$

$\Rightarrow \text{Ran}(f)=[12-4\sqrt{3},\ 14]=[c,\ d]$

$\therefore\ c+d+4\sqrt{3}=12-4\sqrt{3}+14+4\sqrt{3}=12+14=26.$

Rpta.: E

3. La trayectoria que recorre una partícula está descrita por la función real $f(x)=|\text{sen}2x|$. Halle la distancia entre los puntos O(0, 0) y A(6T, 0), donde T denota el periodo de f.

A) π u B) 2π u C) 3π u D) 4π u E) 5π u

Solución:

El periodo es $T=\frac{\pi}{2} \Rightarrow OA=6(\frac{\pi}{2})=3\pi u.$

Rpta.: C

4. La presión sanguínea de una persona en milímetros de mercurio se modela por la función $p(t)=20\,sen(At)+100$, donde t es el tiempo en segundos y $A > 0$. Si la presión sanguínea oscila entre 80 y 120 milímetros por segundo; además tiene un periodo de 1 segundo, halle el tiempo en el que la presión sanguínea fue mínima durante el primer segundo.

A) 0,75 s B) 0,60 s C) 0,90 s D) 0,50 s E) 0,65 s

Solución:

Periodo: $\frac{2\pi}{A}=1 \Rightarrow A=2\pi$

Además $p(t_0)=80 \Rightarrow 20\,sen(2\pi t_0)+100=80 \Rightarrow sen(2\pi t_0)=-1$

$\Rightarrow 2\pi t_0=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_0=\frac{3}{4} \Rightarrow t_0=0{,}75.$

Rpta.: A

5. La función real h definida por $h(t)=12-8\cos\left(\frac{\pi t}{36}\right)$, donde t denota el tiempo en segundos, representa la altura de una rueda de la fortuna instalada en un soporte de 12 metros de altura. ¿Cuánto tiempo se demorará la rueda en dar una vuelta completa?.

A) 70 s B) 60 s C) 84 s D) 72 s E) 65 s

Solución:

Periodo: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{36}}=72$,

Por consiguiente, la rueda demora en dar una vuelta completa 72 segundos.

Rpta.: D

6. Un cuerpo de peso igual a W kg es desplazado a lo largo de un piso horizontal a una velocidad constante por una fuerza de magnitud $F(\theta)$kg y dirigida en un ángulo de θ radianes con respecto al plano del piso. Si $F(\theta)=\dfrac{W}{2(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}$, donde θ es un ángulo agudo, ¿cuál es la mínima fuerza que se puede aplicar al cuerpo?.

A) $\dfrac{2\sqrt{5}}{W}$kg B) $\dfrac{W}{\sqrt{5}}$kg C) $\dfrac{W}{2\sqrt{5}}$kg D) $\dfrac{\sqrt{5}}{W}$kg E) $\dfrac{W}{\sqrt{2}}$kg

Solución:

$$(1)\ F(\theta)=\frac{W}{2(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}=\frac{W}{\operatorname{sen}\theta+2\cos\theta}$$

$$=\frac{W}{\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\theta+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta)}=\frac{W}{\sqrt{5}(\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta)}$$

$$=\frac{W}{\sqrt{5}\ \operatorname{sen}(\theta+\alpha)}$$

$$(2)\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\ \wedge\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 0<\theta+\alpha<\pi\Rightarrow 0<\operatorname{sen}(\theta+\alpha)\le 1$$

$$\Rightarrow 1\le\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta+\alpha)}\ \Rightarrow\ \frac{W}{\sqrt{5}}\le F(\theta)\cdot$$

Rpta.: B

7. Halle el dominio de la función real f definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{sen}4x}+\cos 7x\cdot\operatorname{tg}4x$.

A) $\mathbb{R}-\{\frac{n\pi}{8}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ B) $\mathbb{R}-\{\frac{n\pi}{4}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ C) $\mathbb{R}-\{\frac{n\pi}{5}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\mathbb{R}-\{\frac{n\pi}{3}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ E) $\mathbb{R}-\{\frac{n\pi}{6}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

Solución:

$$x\in\operatorname{Dom}(f)\ \Leftrightarrow\ \operatorname{sen}4x\ne 0\ \wedge\ \cos 4x\ne 0\ \Leftrightarrow\ x\ne\frac{n\pi}{4}\ \wedge\ x\ne\frac{(2n+1)\pi}{8},\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\ x\ne\frac{n\pi}{8}/\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{\frac{n\pi}{8},\ n\in\mathbb{Z}\}$$

Rpta.: A

8. La temperatura expresada en grados centígrados en una ciudad, está descrita por la función T definida por $T(t) = 12\cos(at) + 5\text{sen}(at) + 10$, a > 0. Calcule la temperatura mínima.

A) -1^oC B) 4^oC C) -3^oC D) -4^oC E) 3^oC

Solución:

$T(t) = 12\cos(at) + 5\text{sen}(at) + 10$

$\Rightarrow -\sqrt{12^2 + 5^2} \le 12\cos(at) + 5\,\text{sen}(at) \le \sqrt{12^2 + 5^2}$

$\Rightarrow -3 \le T(t) \le 23$

$\therefore$ La temperatura mínima es de -3^oC.

Rpta.: C

9. La función real f está definida por

$$f(x) = (\sqrt{8} - \text{sen}\,x)(\sqrt{8} + \text{sen}\,x),\ \frac{\pi}{8} \le x \le \frac{5\pi}{12}.$$

Si M es el valor máximo que puede tomar f, calcule el valor de $4M - \sqrt{2}$.

A) 30 B) 32 C) 28 D) 25 E) 35

Solución:

$f(x) = (\sqrt{8} - \text{sen}\,x)(\sqrt{8} + \text{sen}\,x) = 8 - \text{sen}^2 x = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \le 2x \le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \le \cos 2x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{1}{2}\cos 2x \le \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{15}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x \le \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ **y**

$\Rightarrow M = \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore 4M - \sqrt{2} = 30.$

Rpta.: A

10. El número de horas de luz solar en una época del año se determina por la función $h(t) = 3\,\text{sen}[\pi - \frac{2\pi}{365}(t - 79)] + 12$, para t en días, y $t = 0$ corresponde al 1 de enero. Halle el día más largo.

A) El día 170 del año
B) El día 172 del año
C) El día 171 del año
D) El día 169 del año
E) El día 173 del año

Solución:

$h(t) = 3\,\text{sen}[\frac{2\pi}{365}(t-79)] + 12$

Para día más largo:

$\text{sen}[\frac{2\pi}{365}(t-79)] = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{365}(t-79) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 79 + \frac{365}{4}$

$\Rightarrow t = \frac{681}{4} = 170{,}25$, que corresponde al día 171 del año.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La población de conejos en el tiempo t en años está dado por la función $P(t) = 1000\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) + 4000$. Si la población de conejos fluctúa durante ciclos de 10 años, halle el valor de t donde por primera vez su población es mínima.

A) Al cuarto año
B) Al tercer año
C) Al séptimo año
D) Al quinto año
E) Al sexto año

Solución:

Para que la población sea mínima: $\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) = -1$

$\Rightarrow \frac{\pi t}{5} = \pi \Rightarrow t = 5$, que corresponde al quinto año.

Rpta.: D

2. La fuerza electromotriz, en voltios, en cierto circuito de corriente alterna está dada por la función real E definida por $E(t) = 120\,\text{sen}(120\pi t)$, $t \geq 0$, donde t se mide en segundos. Si T y M denotan el periodo y el máximo valor que toma la función E, respectivamente, calcule $M \cdot T$.

A) $\frac{2}{3}$
B) 4
C) $\frac{4}{3}$
D) 3
E) 2

Solución:

$E(t) = 120\,\text{sen}(120\pi t)$, $t \geq 0$

Valor máximo $M = 120$

Periodo $T = \frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60}$

$\therefore M \cdot T = 120(\frac{1}{60}) = 2.$

Rpta.: E

3. Sean A y T la amplitud y el periodo, respectivamente de la función real f definida por $f(x)=\text{sen}^6\frac{x}{8}+\cos^6\frac{x}{8}$. Halle $8A+\frac{T}{\pi}$.

A) 5 B) 8 C) 7 D) 9 E) 6

Solución:

$$f(x)=\text{sen}^6\frac{x}{8}+\cos^6\frac{x}{8}=1-3\,\text{sen}^2\frac{x}{8}\cdot\cos^2\frac{x}{8}=1-\frac{3}{4}\text{sen}^2\frac{x}{4}$$

$$=1-\frac{3}{8}(1-\cos\frac{x}{2})=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow A=\frac{3}{8}\ \text{ y }\ T=4\pi$$

$$\therefore\ 8A+\frac{T}{\pi}=8(\frac{3}{8})+\frac{4\pi}{\pi}=7.$$

Rpta.: C

4. Halle el dominio de la función real f definida por $f(x)=\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)-\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$.

A) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{8}\ /\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{16}\ /\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{6}\ /\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

D) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{14}\ /\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

E) $\mathbb{R}-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{10}\ /\ n\in\mathbb{Z}\right\}$

Solución:

$$x\in\text{Dom}(f)\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)-\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)\neq 0\ \wedge\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)\neq 0\ \wedge\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+8x\right)\neq 0\Leftrightarrow \cos 8x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 8x=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=(2n+1)\frac{\pi}{16},\ n\in\mathbb{Z}$$

Rpta.: E

5. Sea la función real f definida por $f(x)=\sqrt{\cos 6x-\frac{1}{9}}$. Si $[c,d]$.es el rango de f, halle $c+6\sqrt{2}d$.

A) 8 B) 5 C) 7 D) 9 E) 6

Solución:

$$f(x)=\sqrt{\cos 6x-\frac{1}{9}}$$

$$\cos 6x-\frac{1}{9}\geq 0 \Rightarrow \cos 6x\geq\frac{1}{9} \Rightarrow \frac{1}{9}\leq\cos 6x\leq 1$$

$$\Rightarrow 0\leq\cos 6x-\frac{1}{9}\leq\frac{8}{9} \Rightarrow 0\leq\sqrt{\cos 6x-\frac{1}{9}}\leq\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

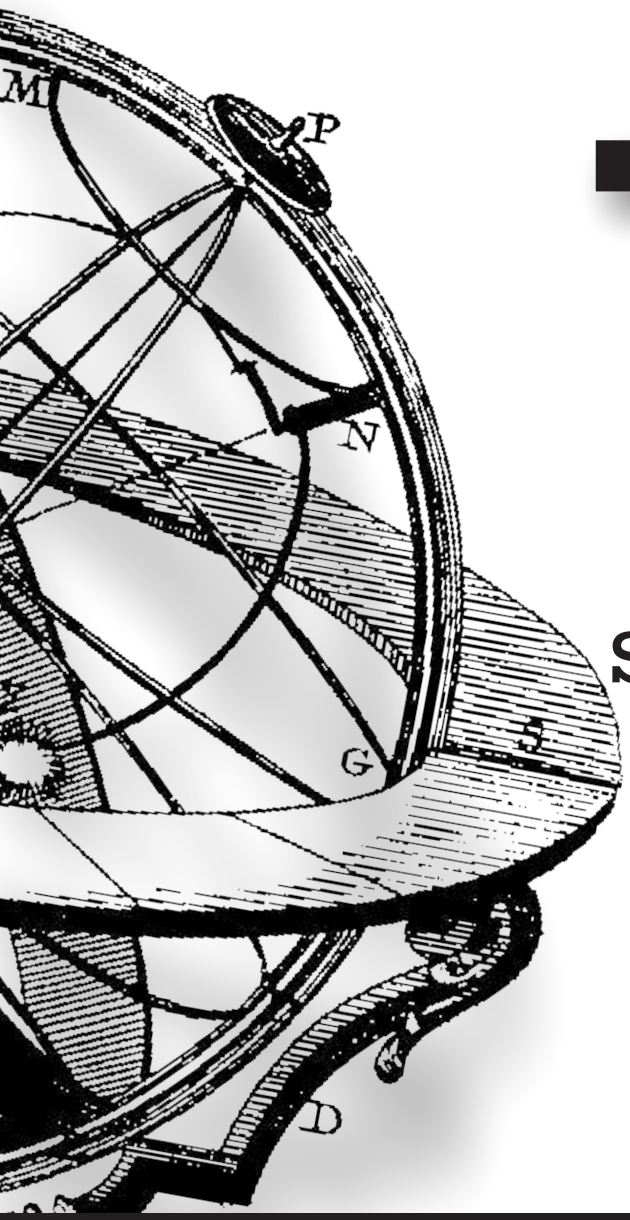
$$\Rightarrow \text{Ran}(f)=[0,\frac{2\sqrt{2}}{3}]=[c,d]$$

$$\therefore\ c+6\sqrt{2}d=0+6\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=8.$$

Rpta.: A

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



16

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS II

FUNCIÓN COTANGENTE

La función cotangente $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se define por $f(x)=\cot x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}\ =\ \mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

$\operatorname{Ran}(f)=\mathbb{R}$

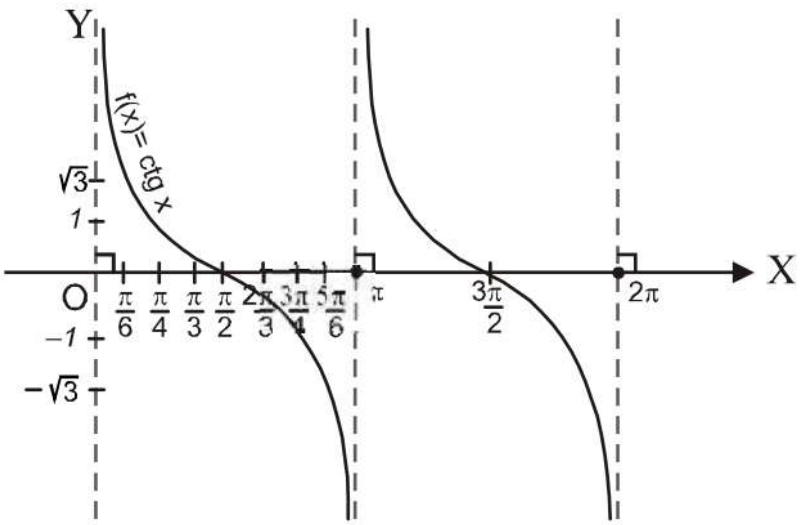
PROPIEDADES

1) $f(x)=\cot x$ es una función periódica y su periodo mínimo es $T=\pi$, es decir, $\cot(x+\pi)=\cot x$, para todo x en su dominio.
2) $f(x)=\cot x$ es una función decreciente en cada intervalo de su dominio.

GRÁFICA

Construimos la tabla

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)=\cot x$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$



FUNCIÓN SECANTE

La función secante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se define por $f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$

$$\text{Dom}(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\ =\ \mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{Ran}(f)=\{y\in\mathbb{R}/y\leq-1\ \vee\ y\geq1\}=\langle-\infty,-1]\cup[1,+\infty\rangle$$

$$\sec x\leq-1\ \vee\ \sec x\geq1$$

PROPIEDAD

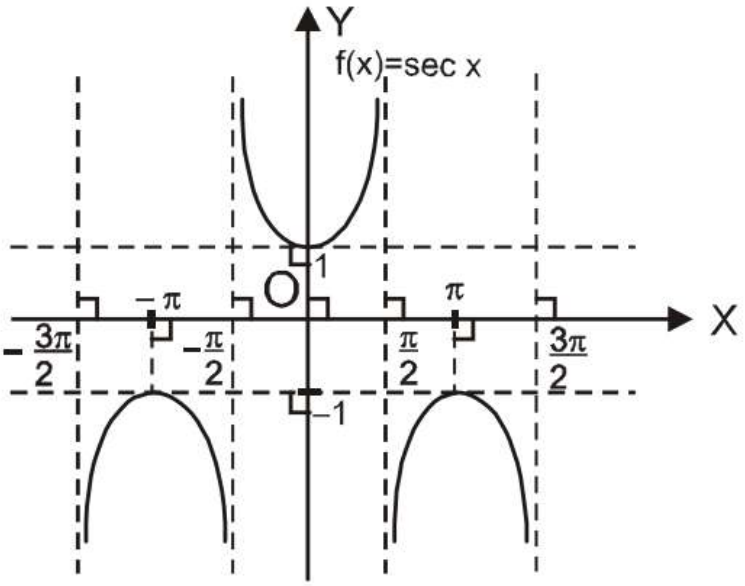
$f(x)=\sec x$ es una función periódica y su periodo mínimo es $T=2\pi$, es decir, $\sec(x+2\pi)=\sec x$, para todo x en su dominio.

GRÁFICA

Construimos la tabla

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)=\sec x$	$\nexists$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\nexists$

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)=\sec x$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\nexists$



FUNCIÓN COSECANTE

La función cosecante $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se define por $f(x)=\csc x=\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}$

$$\text{Dom}(f)=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\ =\ \mathbb{R}-\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$$

$\text{Ran}(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \leq -1 \vee y \geq 1\} = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$

$\csc x \leq -1 \vee \csc x \geq 1$

PROPIEDAD

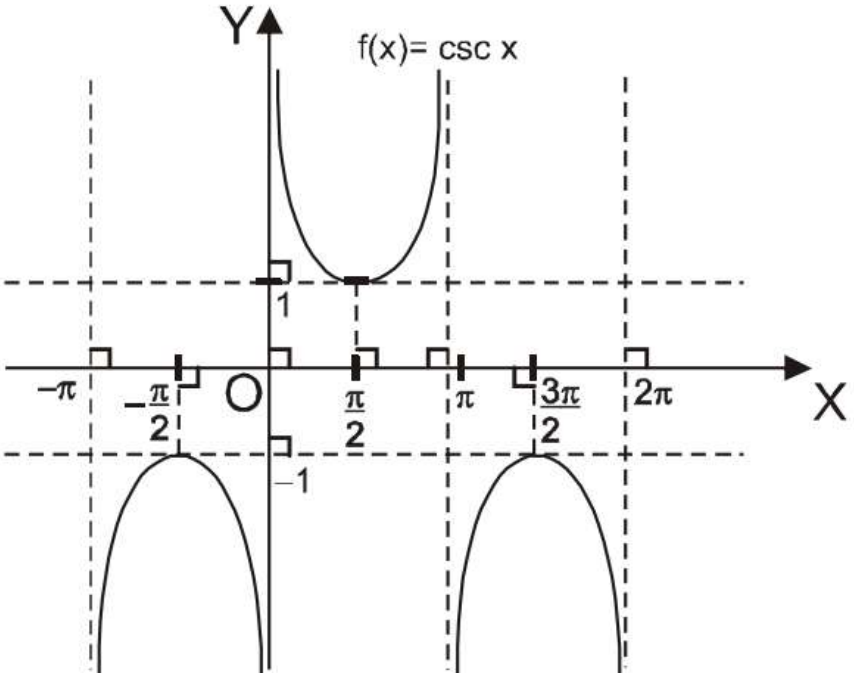
$f(x) = \csc x$ es una función periódica y su periodo mínimo es $T = 2\pi$, es decir, $\csc(x + 2\pi) = \csc x$, para todo x en su dominio.

GRÁFICA

Construimos la tabla

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x) = \csc x$	$\nexists$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\nexists$

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(x) = \csc x$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	$\nexists$



Trigonometría

EJERCICIOS

1. Dada la función real f definida por $f(x)=\sec 2x-\csc 2x$, halle el complemento del dominio de f.

A) $\left\{\frac{n\pi}{4} / n\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{\frac{n\pi}{2} / n\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{4} / n\in\mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{\frac{n\pi}{5} / n\in\mathbb{Z}\right\}$

Solución:

$f(x)=\sec 2x-\csc 2x$

$2x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$

$2x\neq n\pi$

Luego $2x\neq\frac{n\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad x\neq\frac{n\pi}{4}$

$\therefore$ El complemento del dominio de f es $\frac{n\pi}{4}$.

Rpta.: A

2. La función real f está definida por $f(x)=\csc^2 2x-4\cot 2x+9$. Halle el menor valor entero que pertenece al rango f.

A) 4 B) 3 C) 7 D) 6

Solución:

$$f(x)=\csc^2 2x-4\cot 2x+9$$

$$f(x)=1+\cot^2 2x-4\cot gx+9$$

$$f(x)=\cot^2 2x-4\cot 2x+10$$

$$f(x)=(\cot 2x-2)^2+6$$

$$(\cot 2x-2)^2 \geq 0$$

$$(\cot 2x-2)^2+6 \geq 6$$

$$y \geq 6$$

El menor valor entero del rango de f es 6.

Rpta: D

3. En una ciudad la temperatura del día está dada por la función T definida por $T(t)=\cot\left(\frac{\pi t}{2}\right)-\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, $t\in\left\langle 0,\frac{\pi}{6}\right\rangle$ donde t es el tiempo en horas. Si el registro de la temperatura es después de la medianoche ¿a qué hora la temperatura será de 2°C?

A) 00:20 am B) 00:10 am C) 00:15 am D) 00:40 am

Solución:

$$T(t)=\cot\left(\frac{\pi t}{2}\right)-\tan\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$T(t)=2\cot(\pi t)=2$$

$\cot(\pi t) = 1$

$\pi t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{4}h$

La hora es 00:15 am.

Rpta.: C

4. La fábrica "MEMORY" produce y vende semanalmente chip de memoria que está modelada por la expresión $V(x) = 400\sqrt{3}(\csc 2x - \cot 2x)$ en miles de unidades aproximadamente, donde $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$. ¿Cuántos chip de memoria se produjeron y vendieron en dicha semana?

A) 400 mil unidades
B) 350 mil unidades
C) 200 mil unidades
D) 450 mil unidades

<u>Solución</u>:

$V(x) = 400\sqrt{3}(\csc 2x - \cot 2x)$

$V(x) = 400\sqrt{3}\tan x$

Como $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow \tan\frac{\pi}{6} \leq \tan x \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan x \leq \sqrt{3}$

$\rightarrow 400 \leq 400\sqrt{3}\tan x \leq 1200$

$\therefore V_{min} = 400.$

Rpta.: A

5. La función $f(t)=2\sqrt{3}\left|\csc\frac{\pi t}{8}+\cot\frac{\pi t}{8}\right|$ modela la producción de cajas de chocolates en miles de unidades diariamente.

Sabiendo que $t \in \left[8,\frac{40}{3}\right]$. ¿Cuál es la máxima producción?

A) 6000 B) 5000 C) 3000 D) 2500

Solución:

Simplificando f(t) usando:

$$\csc A+\cot A=\cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ f(t)=2\sqrt{3}\left|\cot\left(\frac{\pi t}{16}\right)\right| \quad ... \quad (1)$$

De: $8 \le t \le \frac{40}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi t}{16} \le \frac{5\pi}{6}$

Luego: $-\sqrt{3} \le \cot\left(\frac{\pi t}{16}\right) \le 0 \Rightarrow \sqrt{3} \ge \left|\cot\left(\frac{\pi t}{16}\right)\right| \ge 0$

Por $2\sqrt{3}$: $6 \ge f(t) \ge 0$

$\therefore$ La producción máxima será de 6000 cajas de chocolates.

Rpta: A

6. La función real f definida por $f(t)=60+30\cot^2\left[\frac{\pi(t-4)}{16}\right]$ describe la trayectoria de un insecto en cm, donde t denota el tiempo en minutos. Si $8 \le t \le 16$, calcule la diferencia entre la máxima y mínima altura que alcanza el insecto con respecto al suelo en ese lapso de tiempo.

A) 50 cm B) 20 cm C) 30 cm D) 40 cm

Solución:

$$f(t) = 60 + 30\cot^2\left[\frac{\pi(t-4)}{16}\right]$$

$$8 \le t \le 16$$

$$\frac{\pi}{4} \le \frac{\pi(t-4)}{16} \le \frac{3\pi}{4}$$

$$\cot\frac{\pi}{4} \le \cot\left[\frac{\pi(t-4)}{16}\right] \le \cot\frac{3\pi}{4}$$

$$-1 \le \cot\left[\frac{\pi(t-4)}{16}\right] \le 1$$

$$0 \le \cot^2\left[\frac{\pi(t-4)}{16}\right] \le 1$$

$$0 \le 30\cot^2\left[\frac{\pi(t-4)}{16}\right] \le 30$$

$$60 \le f(t) \le 90$$

$\therefore$ La diferencia entre la máxima y mínima altura es 30 cm.

Rpta: C

7. Sea f la función real definida por $f(x) = 2 - \csc\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Si $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$, halle la diferencia entre el máximo y mínimo valor de la función f.

A) $4 - 2\sqrt{3}$ B) $4 + 2\sqrt{3}$ C) 4 D) $4\sqrt{3}$

Solución:

$$f(x)=2-\left(\csc\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+\cot\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2-\cot\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Como $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{6}\ \rightarrow\ \frac{\pi}{12}\le x-\frac{\pi}{4}\le\frac{11\pi}{12}$ aplicamos cot (decreciente)

$$\rightarrow\ \cot\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)\le\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\cot\frac{\pi}{12}$$

$$\rightarrow\ -2-\sqrt{3}\le\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 2+\sqrt{3}$$

$$\rightarrow\ -\sqrt{3}\le 2-\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 4+\sqrt{3}$$

Luego la diferencia es $4+\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)=4+2\sqrt{3}$.

Rpta: B

8. Una población de bacterias $P(t)$ (en millones) es introducido en un cultivo de laboratorio y es modelada por la función

$$P(t)=500\sqrt{3}\left[\cot\left(t+\frac{\pi}{12}\right)+\tan\left(t+\frac{\pi}{12}\right)\right],\ t\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$$

donde t es el tiempo en horas, ¿cuál será la población máxima de bacterias en el intervalo de tiempo indicado?

A) 3000 millones

B) 1500 millones

C) 4000 millones

D) 2000 millones

Solución:

Como

$$\cot\left(t+\frac{\pi}{12}\right)+\tan\left(t+\frac{\pi}{12}\right)=2\csc\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$$

entonces

$$P(t)=1000\sqrt{3}\csc\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$$

Luego:

si $\frac{\pi}{12} \leq t \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2t \leq \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2t + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \csc\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \csc\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \leq \csc\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow 1 \leq \csc\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 1000\sqrt{3} \leq 1000\sqrt{3}\csc\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1000\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow 1000\sqrt{3} \leq P(t) \leq 2000$

Población máxima: 2000 millones

Rpta: D

9. Si la función real f definida por $f(t) = 12\sec\left(Bt - \frac{\pi}{4}\right)$ modela el movimiento periódico de una partícula, donde t denota el tiempo en segundos. Si $f(1) = 24\tan\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{4} < B < \pi$, determine el periodo de la función f.

A) $\frac{21}{5}$ B) $\frac{24}{7}$ C) $\frac{16}{5}$ D) $\frac{19}{4}$

<u>Solución</u>:

$f(1) = 12\sec\left(Bt - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{B} \ldots (1)$

$f(1) = 24$

$24 = 12\sec\left[B(1) - \frac{\pi}{4}\right]$

$\sec\left(B - \frac{\pi}{4}\right) = 2$

$$B-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad B=\frac{7\pi}{12}$$

En (1): $T=\dfrac{24}{7}$.

Rpta: B

10. Sea la función real f definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)-1,\ 0<x<2\pi$.

Determine el intervalo para el cual la función es negativa.

A) $\left\langle \pi,\frac{3\pi}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle \frac{3\pi}{2},2\pi\right\rangle$ C) $\left\langle \frac{\pi}{2},\pi\right\rangle$ D) $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$

<u>Solución</u>:

Del enunciado:

$$f(x)=\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\cot^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(x)=\cot\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cot\left(\frac{x}{2}\right)+1\right]$$

Luego:

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cot\left(\frac{x}{2}\right)+1\right]<0 \quad \rightarrow \quad -1<\cot\left(\frac{x}{2}\right)<0$$

$$\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \pi<x<\frac{3\pi}{2}$$

$\therefore$ El intervalo buscado es $\left\langle \pi,\frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

Rpta: A

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea la función f definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2020x)}{\csc 6x-\cot 6x}+\cos 4x$. Halle el dominio de f

A) $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{n\pi}{7}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{n\pi}{6}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

C) $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{n\pi}{4}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

D) $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{n\pi}{3}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

Solución:

Sea $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2020x)}{\csc 6x-\cot 6x}+\cos 4x$

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(2020x)}{\tan 3x}+\cos 4x$$

Cálculo del dominio de f

$$\operatorname{sen}3x\neq 0 \ \wedge\ \cos 3x\neq 0 \ \Rightarrow\ \operatorname{sen}6x\neq 0$$

$$\Rightarrow x\neq\frac{n\pi}{6}\ ,\ n\in\mathbb{Z}$$

Por lo tanto Dom(f) = $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{n\pi}{6}/n\in\mathbb{Z}\right\}$

Rpta: B

2. Si $[a,b]$ es el rango de la función real f definida por $f(x)=-2\csc 2x+\csc^2 2x+3\cos\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{8}\leq x\leq\dfrac{5\pi}{12}$. Calcule $(a+b)^5$.

A) -1 B) 1 C) -4 D) 6

Solución:

$$f(x)=-2\csc 2x+\csc^2 2x+3\cos\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)=\csc^2 2x-2\csc 2x$$

$f(x) = (\csc 2x - 1)^2 - 1$

$\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$

$\frac{\pi}{4} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6}$

$1 \leq \csc 2x \leq 2$

$0 \leq \csc 2x - 1 \leq 1$

$0 \leq (\csc 2x - 1)^2 \leq 1$

$-1 \leq y \leq 0 \Rightarrow a = -1, b = 0$

Luego: $(a+b)^5 = -1$

Rpta: A

3. Halle el periodo de la funcion real f definida por $f(x) = (1 + \tan^2 3x)\csc^2 3x$

A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$

<u>Solución</u>:

$f(x) = (1 + \tan^2 3x)\csc^2 3x$

$f(x) = \sec^2 3x \csc^2 3x$

$f(x) = \frac{4}{(2\operatorname{sen} 3x \cos 3x)^2}$

$f(x) = 4\csc^2 6x$

Luego: $T = \frac{\pi}{6}$

Rpta: D

4. El número de personas contagiadas diariamente en decenas del Covid 19 en un país sudamericano está modelada por la función real f definida por $f(t)=9\csc^2\left(\frac{\pi t}{24}\right)+6\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)\csc^2\left(\frac{\pi t}{24}\right)-5$, donde t denota el tiempo en días. Si $6 \leq t \leq 8$, ¿Cuántas personas contagiadas como máximo se espera diariamente?

A) 200 B) 250 C) 300 D) 340

Solución:

$$f(t)=9\csc^2\left(\frac{\pi t}{24}\right)+6\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)\csc^2\left(\frac{\pi t}{24}\right)-5$$

$$f(t)=9\left[1+\tan^2\left(\frac{\pi t}{24}\right)\right]+6.\,2\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{24}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{24}\right).\frac{1}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi t}{24}\right)}-5$$

$$f(t)=\left[3\cot\left(\frac{\pi t}{24}\right)+2\right]^2$$

$$6 \leq t \leq 8$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \left(\frac{\pi t}{24}\right) \leq \frac{\pi}{3}$$

$$1 \geq \cot\left(\frac{\pi t}{24}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3 \geq 3\cot\left(\frac{\pi t}{24}\right) \geq \sqrt{3}$$

$$5 \geq 3\cot\left(\frac{\pi t}{24}\right)+2 \geq \sqrt{3}+2$$

$$\left(\sqrt{3}+2\right)^2 \leq f(t) \leq 25$$

Por lo tanto, el número de personas contagiadas como máximo es 250.

Rpta: B

5. La cantidad de pantalones que produce una empresa textil está dada por la función f definida por $f(x)=\tan x+\cot x+\sec^2 x+\csc^2 x$ en miles de unidades donde $x\neq\frac{n\pi}{2}/n\in\mathbb{Z}$. ¿Cuál es la mínima cantidad de pantalones que produce dicha empresa?

A) 1500 B) 1800 C) 2000 D) 2500

Solución:

$$x\neq\frac{n\pi}{2}/n\in\mathbb{Z}$$

$$f(x)=\tan x+\cot x+\sec^2 x+\csc^2 x$$

$$f(x)=\tan x+\cot x+1+\tan^2 x+1+\cot^2 x$$

$$f(x)=(\tan x+\cot x)+(\tan x+\cot x)^2$$

$$f(x)=\left(\tan x+\cot x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ .....(1)$$

Se sabe que: $\tan x+\cot x\leq -2\ \vee\ \tan x+\cot x\geq 2$

$$\tan x+\cot x+\frac{1}{2}\leq -\frac{3}{2}\ \vee\ \tan x+\cot x+\frac{1}{2}\geq\frac{5}{2}$$

$$\left(\tan x+\cot x+\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{9}{4}\ \vee\ \left(\tan x+\cot x+\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{25}{4}$$

$$\left(\tan x+\cot x+\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{9}{4}$$

$$f(x)\geq 2$$

Por lo tanto, la empresa produce 2000 pantalones como mínimo.

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. La función F es real y está definida por $F(x)=\pi+4\sec^2 x$. Halle T + M, donde T es el periodo de F y M es el menor número entero que pertenece al rango de F.

A) $\pi + 7$ B) $\pi + 8$ C) $2\pi + 7$ D) $\frac{\pi}{2}+7$

Solución:

$T=\pi$

$\sec^2 x \geq 1 \Rightarrow 4\sec^2 x \geq 4 \Rightarrow \pi+4\sec^2 x \geq \pi+4$

$F(x) \geq \pi+4$

Rango de $F=\left[\pi+4,+\infty\right\rangle \Rightarrow M=8$

$\therefore T+M=\pi+8$

Rpta.: B

2. La función real F está definida por $F(x)=2\csc 2x+\sqrt{x-1}+\sqrt{4-2x}$. Si el dominio de F es $[a,b]-\{c\}$, halle $c\cdot b^a$.

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{2}$ D) 2π

Solución:

$F(x)=\frac{2}{\text{sen}2x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{4-2x}$

Si $\text{sen}2x \neq 0$, $x-1\geq 0$ y $4-2x\geq 0$,

entonces x pertenece al dominio de F

$x\geq 1 \wedge x\leq 2 \Rightarrow 1\leq x\leq 2$

Si $\text{sen}2x=0$, entonces, $2x=\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi k}{2}$,

$k\in\mathbb{Z}$ (estos valores de x no pertenecen al dominio)

$k=0,\ x=0,\ \ k=1,\ x=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \text{Dom}(F)=[1,2]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Finalmente, como $a=1$, $b=2$ y $c=\frac{\pi}{2}$

$c\cdot b^a=\frac{\pi}{2}\cdot 2^1=\pi$

Rpta.: A

3. La función real f está definida por f(x) = $\sqrt{3}$ + cotx, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Si a es el mayor entero que pertenece al rango de f y b es el menor entero en el rango de f, halle a – b.

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4

Solución:

$f(x) = \sqrt{3} + \cot x,\ x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

La función cotangente es decreciente en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, entonces,

$\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \cot\frac{\pi}{6} \ge \cot x \ge \cot\frac{5\pi}{6} \Rightarrow$

$\sqrt{3} \ge \cot x \ge -\sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \le \cot x \le \sqrt{3} \Rightarrow$

$0 \le \sqrt{3} + \cot x \le \sqrt{3} \Rightarrow 0 \le F(x) \le 2\sqrt{3}$

$\therefore \text{Ran}(f) = \left[0, 2\sqrt{3}\right]$

Números enteros que pertenecen al Ran(f): 0, 1, 2 y 3

mayor entero: $3 = a$

menor entero: $0 = b$, entonces, $a - b = 3 - 0 = 3$ **Rpta.: A**

4. Una empresa minera exporta $M(x) = \left\lfloor \left(\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3} \right\rfloor$ miles de toneladas de minerales procesadas en x meses $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)$. ¿Cuál fue la máxima cantidad de minerales procesados qué exportó?

A) 2000 t B) 3000 t C) 2500 t D) 1500 t

Solución:

Como $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

$\rightarrow 0 \le \tan x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \le \tan x + \frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\rightarrow \frac{1}{3} \le \left(\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \le \frac{4}{3}$

$\therefore 1 \le \underbrace{\left(\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3}}_{M(x)} \le 2$

Exportó 2000 toneladas. **Rpta.: A**

5. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\cos x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f$ es una función.

II. El periodo de la función real f, definida por f(x) = $5\cot\left(\frac{1}{2}x\right)$, es igual a 2π.

III. Si $\forall x \neq k\pi,\ h(\cot x) = \csc^2 x \rightarrow h$ es una función.

A) FVV B) VFV C) VVV D) FVF

Solución:

Del enunciado:

I. Para $x = \frac{\pi}{2}$, tenemos $f(0) = 1$.

Para $x = \frac{3\pi}{2}$, tenemos $f(0) = -1$.

II. Periodo es 2π

III. Tenemos:

$h(y) = y^2 + 1,\ y \in \mathbb{R}$.

Rpta.: A

6. La función real F definida por f(t) = $11\cot^2 t + 80,\ \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$, donde t denota el tiempo en segundos, describe la altura en centímetros a la que se encuentra una partícula con respecto al suelo. Calcule la suma de la mínima y máxima altura que puede alcanzar la partícula.

A) 160 cm B) 198 cm C) 150 cm D) 193 cm

Solución:

$$F(t) = 11\cot^2 t + 80$$

$$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \cot\frac{\pi}{4} \geq \cot t \geq \cot\frac{5\pi}{6}$$

$$1 \geq \cot t \geq -\sqrt{3}$$

$$0 \leq \cot^2 t \leq 3$$

$$0 \leq 11\cot^2 t \leq 33$$

$$80 \leq \cot^2 t + 80 \leq 113$$

$$80 \leq f(t) \leq 113$$

Luego, la suma de la mínima y máxima altura que puede alcanzar la partícula es 193 cm.

Rpta.: D

7. Hallar el número N del cual se sabe que su 75% es igual a (900·A) donde A es el valor máximo de la función real F definida por F(x) = $\frac{4+\cot x}{2+\cot x}$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

A) 2000 B) 1800 C) 1600 D) 1900

Solución:

$$F(x) = \frac{2+(2+\cot x)}{2+\cot x} = \frac{2}{2+\cot x} + 1$$

$$F(x) = \frac{2}{2+\cot x} + 1$$

$$\text{Por dato}: \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cot\frac{\pi}{6} \ge \cot x \ge \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{3} \ge \cot x \ge 1 \Rightarrow 2+\sqrt{3} \ge 2+\cot x \ge 3 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} \le \frac{1}{2+\cot x} \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{2+\sqrt{3}} \le \frac{2}{2+\cot x} \le \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{2+\sqrt{3}} + 1 \le \underbrace{\frac{2}{2+\cot x} + 1}_{F(x)} \le \frac{5}{3} \Rightarrow$$

Por lo tanto, el valor máximo de F es $\frac{5}{3}$, luego, A = $\frac{5}{3}$

75% de N = $900\left(\frac{5}{3}\right)$ = 1500 de donde N = 2000

Rpta.: A

8. La función F es real y está definida por F(x) = $3+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\csc x\right)$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Halle la suma de los números enteros que pertenecen al rango de la función F.

A) 4 B) 5 C) 3 D) 6

Solución:

i) Si $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{2\pi}{3}$ entonces $1 \le \csc x \le 2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}\cdot\csc x \le \pi$

ii) En el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ la función coseno es localmente decreciente, luego,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \ge \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\csc x\right) \ge \cos\pi \Rightarrow$$

$$0 \ge \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\csc x\right) \ge -1 \Rightarrow$$

$$-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\csc x\right) \le 0 \Rightarrow$$

$$2 \le 3+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\csc x\right) \le 3 \Rightarrow$$

$$2 \le F(x) \le 3 \Rightarrow$$

Por lo tanto, $\text{Ran}(F) = [2,3]$

Enteros que pertenecen al rango de F: 2 y 3 cuya suma es 5.

Rpta.: B

9. Determine la suma de las abscisas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones reales F y G definidas por:

$$F(x) = \text{sen}x \cdot \sec x,\ x \in [-\pi, \pi]$$
$$G(x) = \cos x \cdot \csc x,\ x \in [-\pi, \pi]$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3

Solución:

$F(x) = \tan x,\ x \in [-\pi, \pi]$

$G(x) = \cot x,\ x \in [-\pi, \pi]$

$\tan x = \cot x \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow 2\text{sen}^2 x = 2\cos^2 x \Rightarrow$

$1 - \cos 2x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = (2k+1)\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

$k = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4};\ k = 1, x = \dfrac{3\pi}{4};\ k = 2, x = \dfrac{5\pi}{4}$ (no sirve)

$k = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{4};\ k = -2,\ x = -\dfrac{3\pi}{4};\ k = -3,\ x = -\dfrac{5\pi}{4}$ (no sirve)

Son 4 puntos de intersección cuyas abscisas son

$\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}$ y $-\dfrac{3\pi}{4}$

La suma de las abscisas es $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} + \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = 0$

Rpta.: B

10. Sea F la función real definida por F(x) = $\begin{cases} 3 + 2\text{sen}x,\ x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \\ 3 + 5\tan x,\ x \in \left[\pi, \dfrac{5\pi}{4}\right] \end{cases}$. Halle la suma de los números enteros que pertenecen al rango de la función F.

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33

Solución:

i) $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \Rightarrow \text{sen}\frac{\pi}{2} \ge \text{sen}x \ge \text{sen}\pi \Rightarrow$

$1 \ge \text{sen}x \ge 0 \Rightarrow 0 \le \text{sen}x \le 1 \Rightarrow$

$0 \le 2\text{sen}x \le 2 \Rightarrow 3 \le 3 + 2\text{sen}x \le 5 \Rightarrow$

ii) $\pi \le x \le \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \tan\pi \le \tan x \le \tan\frac{5\pi}{4} \Rightarrow$

$0 \le \tan x \le 1 \Rightarrow 0 \le 5\tan x \le 5 \Rightarrow$

$3 \le 3 + 5\tan x \le 8 \Rightarrow 3 \le F(x) \le 8$

Por consiguiente, el rango de F es [3,8] y los números enteros en su rango son 3, 4, 5, 6, 7 y 8 cuya suma es 33.

Rpta.: D

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La función real F está definida por F(x) = $3\csc(2x) + 5$; halle la suma de los números enteros que no pertenecen al rango de F.

A) 25 B) 27 C) 33 D) 35

Solución:

$\csc 2x \ge 1 \ \vee \ \csc 2x \le -1$

$3\csc 2x \ge 3 \ \vee \ 3\csc 2x \le -3$

$3\csc 2x + 5 \ge 8 \ \vee \ 3\csc 2x + 5 \le 2$

$\therefore F(x) \ge 8 \vee F(x) \le 2$

Los números enteros que no pertenecen al rango de F son 3, 4, 5, 6 y 7 cuya suma es 25.

Rpta.: A

2. La función real F está definida por F(x) = $\dfrac{\cot\left(\frac{2x}{3}\right)}{4 + \cos 2x} + 5$. Halle la suma de los números que pertenecen al intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$ y no están en el dominio de F.

A) 3π B) 2π C) 0 D) π

Solución:

$y = F(x) = \dfrac{\cot\left(\frac{2x}{3}\right)}{4 + \cos 2x} + 5$. Para cualquier valor de x, 4 + cos2x $\neq$ 0

Si $\text{sen}\left(\frac{2x}{3}\right)=0$, x no pertenece al dominio de F; $\frac{2x}{3}=\pi k \Rightarrow x=\frac{3\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$

$\therefore \text{Dom}(F)=R-\left\{\frac{3\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$

$k=0,\ x=0$

$k=1,\ x=\frac{3\pi}{2}$

$k=2,\ x=3\pi$

$k=3,\ x=\frac{9\pi}{2}$ (no sirve)

$k=-1,\ x=-\frac{3\pi}{2}$

$k=-2,\ x=-3\pi$ (no sirve)

Los números $-\frac{3\pi}{2}$, 0, $\frac{3\pi}{2}$ y 3π pertenecen al intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2}, 8\pi\right]$ y no pertenecen al dominio de F; la suma de los números mencionados es 3π.

Rpta.: A

3. La edad de Juan es (2A) años y la de Pedro es (3B) años. Si A y B representan el valor máximo y el valor mínimo, respectivamente, de la función real F definida por $F(x)=9\tan^2 x+5$, $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$; ¿en cuánto excede la edad de Juan a la de Pedro?

A) 13 años B) 12 años C) 14 años D) 15 años

<u>Solución</u>:

Observando el gráfico de la función tangente podemos afirmar que ella es localmente creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$, luego, $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\le \tan x\le \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}\le \tan x\le 1\Rightarrow 0\le \tan^2 x\le 1\Rightarrow 0\le 9\tan^2 x\le 9\Rightarrow 5\le 9\tan^2 x+5\le 14\Rightarrow 5\le F(x)\le 14$

$\text{máx}(F)=14=A$, $\text{mín}(F)=5=B$

Edad de Juan $=2(14)=28$ años

Edad de Pedro $=3(5)=15$ años

Exceso $=28$ años -15 años $=13$ años

Rpta.: A

4. La función real F está definida por $F(x)=8\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\cdot \text{tg}x\right)+4,\ -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$. Si [a,b] es el rango de F, hallar b^a.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 2

Solución:

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ la función tangente es localmente creciente, esto es,

$$-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\Rightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\le \tan x\le \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow -1\le \tan x\le 1\Rightarrow -\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}\tan x\le\frac{\pi}{6}$$

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ la función seno es localmente creciente, luego,

$$-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}\tan x\le\frac{\pi}{6}\Rightarrow \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\le\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\tan x\right)\le\text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{1}{2}\le\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\tan x\right)\le\frac{1}{2}\Rightarrow -4\le 8\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\tan x\right)\le 4\Rightarrow$$

$$0\le 8\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\tan x\right)+4\le 8\Rightarrow 0\le F(x)\le 8$$

$\therefore \text{Ran}(F)=[0,8]$, por consiguiente,

$b^a=8^0=1$

Rpta.: A

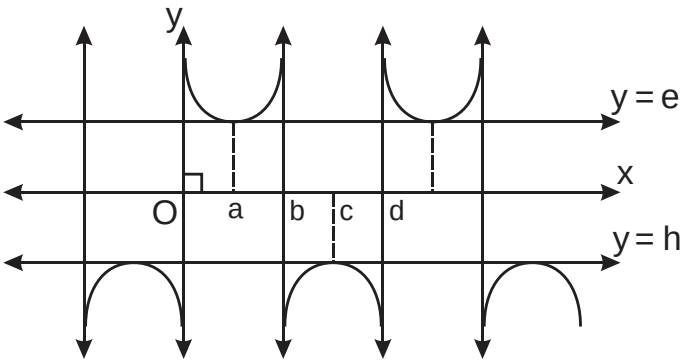
5. El gráfico de la función real $F(x)=2\csc\left(\frac{1}{2}x\right)$ se muestra en la figura adjunta, halle a + b + c + d + e + h.

A) 10π

B) $10\pi-2$

C) $8\pi+2$

D) 910π



Solución:

Periodo T = 4π

Del gráfico:

$a = \pi$

$b = 2\pi$

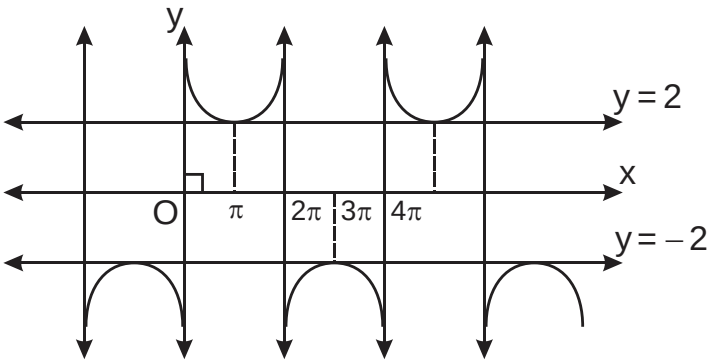
$c = 3\pi$

$d = 4\pi$

$e = 2$

$h = -2$

Luego: a + b + c + d + e + h = 10π



Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Dada la función real f definida por

$$f(x) = 5[\,tg(5x+\frac{3\pi}{2})+ctg(5x+\frac{\pi}{2})]\,,$$

halle el complemento del dominio de f.

A) $\{\frac{n\pi}{4}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ B) $\{\frac{n\pi}{5}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ C) $\{\frac{n\pi}{10}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\{\frac{n\pi}{8}/\ n\in\mathbb{Z}\}$ E) $\{\frac{n\pi}{12}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

Solución:

$$f(x) = 5[\,tg(5x+\frac{3\pi}{2})+ctg(5x+\frac{\pi}{2})] = -5(ctg5x + tg\,5x)$$

$$f(x) = -10\csc 10x$$

$$x\in Dom(f) \Leftrightarrow sen10x\neq 0 \Leftrightarrow 10x\neq n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\neq\frac{n\pi}{10},\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ (Dom(f))' = \{\ \frac{n\pi}{10}/\ n\in\mathbb{Z}\ \}.$$

Rpta.: C

2. Halle el rango de la función real f definida por $f(x) = 12ctg3x\cdot\csc 6x$.

A) $[6,\ +\infty\rangle$ B) $\langle 1,\ +\infty\rangle$ C) $[1,\ +\infty\rangle$ D) $\langle 6,\ +\infty\rangle$ E) $\langle 3,\ +\infty\rangle$

Solución:

$$f(x) = 12ctg3x\cdot\csc 6x = \frac{12\cos 3x}{2sen^2 3x\cdot\cos 3x} = \frac{6}{sen^2 3x} = 6\csc^2 3x,\ \ 6x\neq n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\ \csc^2 3x > 1 \Rightarrow 6\csc^2 3x > 6$$

$$\therefore\ Ran(f) = \langle 6,\ +\infty\rangle.$$

Rpta.: D

3. Halle el dominio de la función real f definida por

$$f(x)=\left(\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\csc 4x-\operatorname{ctg}2x\right)\sec 4x.$$

A) $[-1,\ 1]-\{0,\pm\frac{3\pi}{16},\pm\frac{\pi}{4}\}$

B) $[-1,\ 1]-\{0,\pm\frac{\pi}{8},\pm\frac{\pi}{24}\}$

C) $[-1,\ 1]-\{0,\pm\frac{\pi}{24},\pm\frac{\pi}{4}\}$

D) $[-1,\ 1]-\{0,\pm\frac{\pi}{12},\pm\frac{\pi}{4}\}$

E) $[-1,\ 1]-\{0,\pm\frac{\pi}{8},\pm\frac{\pi}{4}\}$

<u>Solución</u>:

$f(x)=\left(\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\csc 4x-\operatorname{ctg}2x\right)\sec 4x$

$x\in\text{Dom}(f)\Leftrightarrow 1-x^2\geq 0\ \wedge\ \operatorname{sen}4x\neq 0\ \wedge\ \operatorname{sen}2x\neq 0\ \wedge\ \cos 4x\neq 0$

$x\in[-1,\ 1]\ \wedge\ \operatorname{sen}8x\neq 0\Rightarrow x\in[-1,\ 1]\ \wedge\ 8x\neq n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow x\in[-1,\ 1]\ \wedge\ x\neq 0,\pm\frac{\pi}{8},\pm\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \text{Dom}(f)=[-1,\ 1]-\{0,\pm\frac{\pi}{8},\pm\frac{\pi}{4}\}$

Rpta.: E

4. En una ciudad, la temperatura del día en °C está dada por la función real T definida por $T(t)=4\operatorname{ctg}^2t+11,\ \frac{\pi}{3}\leq t\leq\frac{3\pi}{4}$, donde t es el tiempo en horas. Calcule la suma de la máxima y mínima temperatura en °C.

A) 22°C B) 23°C C) 26°C D) 25°C E) 24°C

<u>Solución</u>:

$\frac{\pi}{3}\leq t\leq\frac{3\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\geq\operatorname{ctg}t\geq\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}\geq\operatorname{ctg}t\geq -1\Rightarrow 0\leq\operatorname{ctg}^2t\leq 1\Rightarrow 0\leq 4\operatorname{ctg}^2t\leq 4$

$\Rightarrow\ 11\leq 4\operatorname{ctg}^2t+11\leq 15$

$\therefore\ 11\leq T\leq 15$

Luego, la suma de la máxima y mínima temperatura es 26°C.

Rpta.: C

5. El nevado Alpamayo que se encuentra en el Parque Nacional Huascarán, en la Región Ancash, es considerado el más bello del mundo. Calcule la altura del nevado si está modelada por la función real f definida por $f(x)=5948-\sec x$ en metros, donde $-\frac{\pi}{8}\leq\frac{x}{2}<\frac{\pi}{6}$.

A) 5 945 m B) 5 947 m C) 5 950 m D) 5 942 m E) 5 949 m

Solución:

$$-\frac{\pi}{8}\leq\frac{x}{2}<\frac{\pi}{6}\Rightarrow-\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{3}\Rightarrow 1\leq\sec x<2\Rightarrow -2<-\sec x\leq -1$$

$$\Rightarrow 5946<5948-\sec x\leq 5947$$

$\therefore$La altura del nevado es $5947\,m$.

Rpta.: B

6. La función real f definida por $f(t)=\dfrac{2-\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)}$ determina la altura (en metros) de un dron con respecto al suelo en el cual $t\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ representa el tiempo en minutos. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el dron?

A) 4,75 m B) 5 m C) 7,5 m D) 7 m E) 6 m

Solución:

Tenemos

$$f(t)=\frac{2-\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)}\Rightarrow f(t)=\frac{1+1-\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)}\Rightarrow f(t)=\frac{1+2\operatorname{sen}^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)}+2\Rightarrow f(t)=\csc^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+2$$

Como $0\leq t\leq\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{6}\leq 2t+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1\leq\csc\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)\leq 2$

$$\Rightarrow 3\leq\csc^2\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+2\leq 6$$

Luego, la altura máxima que puede alcanzar el dron es de 6m.

Rpta.: E

7. Las oscilaciones de una pesa está determinada por la función real f definida por

$f(t) = 20\sec\frac{\pi t}{6} - 10$ en centímetros, t en segundos. Para una distancia de 30 centímetros, halle el número de oscilaciones en un intervalo de 30 segundos.

A) 3 veces B) 5 veces C) 4 veces D) 6 veces E) 2 veces

Solución:

$f(t) = 20\sec\frac{\pi t}{6} - 10 = 30 \Rightarrow \sec\frac{\pi t}{6} = 2$

$\Rightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3} \Rightarrow t = 2, 10, 14, 22, 26$

Luego, el número de oscilaciones en 30 segundos es 5.

Rpta.: B

8. El mínimo valor de la función real f definida por $f(x) = tg^2 x + ctg^2 x + 8$ en metros es el ancho de un terreno de forma rectangular y el valor de la función real g definida por $g(x) = 6(\sec^2 2x + \csc^2 2x)sen^2 4x$ en metros es el largo del mismo terreno. Si el costo de cada metro cuadrado es 600 soles, halle el precio del terreno.

A) S/ 144 000 B) S/ 145 000 C) S/ 150 000
D) S/ 130 000 E) S/ 160 000

Solución:

Ancho: $2 \leq tg^2 x + ctg^2 x \Rightarrow 10 \leq tg^2 x + ctg^2 x + 8$

Luego el ancho es $10\,m$

Largo: $g(x) = 6(\sec^2 2x + \csc^2 2x)sen^2 4x = 6(\sec^2 2x \cdot \csc^2 2x)sen^2 4x$

$= 6(4)\csc^2 4x \cdot sen^2 4x = 24$

Luego el largo es 24 m

El costo del terreno $= 10(24)(600) = 144000$ soles.

Rpta.: A

9. El voltaje instantáneo para un sistema eléctrico está dada por la función real $E(t)=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{\text{sen}2t+\cos 2t}\right)$ voltios; t en segundos. ¿Después de cuántos segundos el voltaje tomará su valor mínimo?

A) $\dfrac{\pi}{5}$ s B) $\dfrac{\pi}{2}$ s C) $\dfrac{3\pi}{2}$ s D) $\dfrac{\pi}{8}$ s E) $\dfrac{\pi}{6}$ s

Solución:

Expresando E(t) en forma simple

$$\text{sen}2t+\cos 2t=\sqrt{2}\left\{\text{sen}2t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2t\right\}=\sqrt{2}\left\{\text{sen}2t+\cos\frac{\pi}{4}+\text{sen}\frac{\pi}{4}\cos 2t\right\}$$

$$\text{sen}2t+\cos 2t=\sqrt{2}\text{sen}\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{invirtiendo}:\frac{1}{\text{sen}2t+\cos 2t}=\frac{1}{\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)}\Rightarrow\frac{2\sqrt{2}}{\text{sen}2t+\cos 2t}=2\csc\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow E(t)=2\csc\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Como $\csc\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\le -1\vee\csc\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\ge 1$

$\Rightarrow E(t)\le -2\vee E(t)\ge 2$

por la naturaleza del fenómeno eléctrico, solo se da

$$E(t)=2\csc\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\ge 2$$

$$\csc\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\ge 1$$

mínimo cuando $\csc\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$$2t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{8}\text{ seg.}$$

Rpta.: D

10. Las funciones reales f, g definidas por $f(t)=3e^{t\sec^2 t}$ y $g(t)=5e^{t\,tg^2 t}$, t tiempo en horas, modelan el crecimiento de dos tipos de bacterias en miles. Halle la razón de crecimiento del primer tipo de bacterias con respecto al segundo tipo, después de 8 horas.

A) $\dfrac{3}{5}e^6$ B) $\dfrac{3}{5}e^5$ C) $\dfrac{3}{5}e^8$ D) $\dfrac{3}{5}e^4$ E) $\dfrac{3}{5}e^2$

Solución:

$$\frac{f(8)}{g(8)} = \frac{3e^{8\sec^2 8}}{5e^{8\,tg^2 8}} = \frac{3}{5}e^{8(\sec^2 8 - tg^2 8)} = \frac{3}{5}e^8 .$$

Rpta.: C

EJERCICIOS

1. Halle el complemento del dominio de la función real f definida por

$$f(x) = tg^2 2x - ctg^2 2x + tg\,4x .$$

A) $\{ \frac{n\pi}{4} / n \in \mathbb{Z} \}$ B) $\{ \frac{n\pi}{8} / n \in \mathbb{Z} \}$ C) $\{ \frac{n\pi}{3} / n \in \mathbb{Z} \}$

D) $\{ \frac{n\pi}{6} / n \in \mathbb{Z} \}$ E) $\{ \frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z} \}$

Solución:

$f(x) = tg^2 2x - ctg^2 2x + tg\,4x$

$x \in Dom(f) \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \ \wedge \ sen\,2x \neq 0 \wedge \cos 4x \neq 0$

$\Leftrightarrow sen\,4x \neq 0 \ \wedge \ \cos 4x \neq 0 \ \Leftrightarrow \ sen\,8x \neq 0$

$\Leftrightarrow \ 8x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ x \neq \frac{n\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}$

$\therefore (Dom(f))' = \{ \frac{n\pi}{8} / n \in \mathbb{Z} \}$

Rpta.: B

2. Halle el rango de la función real f definida por $f(x)=\sqrt{\sec^2\frac{x}{4}+\csc^2\frac{x}{4}}$, $x\in[\pi, 2\pi\rangle$.

A) $[2, +\infty\rangle$ B) $[1, +\infty\rangle$ C) $[3, +\infty\rangle$ D) $\langle 2, +\infty\rangle$ E) $\langle 1, +\infty\rangle$

Solución:

$$f(x)=\sqrt{\sec^2\frac{x}{4}+\csc^2\frac{x}{4}}=\sqrt{\sec^2\frac{x}{4}\cdot\csc^2\frac{x}{4}}=\sqrt{\frac{4}{(2\operatorname{sen}\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4})^2}}=\sqrt{4\csc^2\frac{x}{2}}$$

$$f(x)=2\left|\csc\frac{x}{2}\right|,\ x\in[\pi,\ 2\pi\rangle$$

$$\pi\le x<2\pi\ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2}\le\frac{x}{2}<\pi\ \Rightarrow\ 1\le\csc\frac{x}{2}\ \Rightarrow\ 2\le 2\csc\frac{x}{2}$$

$\therefore$ Ran(f) $=[2, +\infty\rangle$.

Rpta.: A

3. La función real f definida por $f(t)=4\csc^4 t+16\operatorname{ctg}^2 t+64,\ \frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}$, donde t denota el tiempo en segundos, describe la altura en centímetros a la que se encuentra una partícula con respecto al suelo. Halle la máxima altura que puede alcanzar la partícula.

A) 150 cm B) 158 cm C) 176 cm D) 174 cm E) 170 cm

Solución:

$$f(t)=4\csc^4 t+16\operatorname{ctg}^2 t+64,\quad \frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}$$

$$f(t)=4\csc^4 t+16(\csc^2 t-1)+64=4\csc^4 t+16\csc^2 t+48$$

$$f(t)=4(\csc^2 t+2)^2+32$$

Luego, $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}\le\csc t\le 2\Rightarrow\frac{4}{3}\le\csc^2 t\le 4\Rightarrow\frac{10}{3}\le\csc^2 t+2\le 6$

$$\Rightarrow\frac{100}{9}\le(\csc^2 t+2)^2\le 36\ \Rightarrow\frac{400}{9}\le 4(\csc^2 t+2)^2\le 144$$

$$\Rightarrow\frac{688}{9}\le 4(\csc^2 t+2)^2+32\le 176$$

$\therefore$La máxima altura que puede alcanzar la partícula es 176 cm.

Rpta.: C

4. La edad de Miguel es el triple de la edad de Mateo. Si la edad de Mateo está determinado por el valor que toma la función real f definida por $f(x)=4(\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}2x)^2-16\operatorname{ctg}^2 4x$, halle la edad de Miguel.

A) 30 años B) 60 años C) 45 años D) 48 años E) 36 años

Solución:

$f(x)=4(\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}2x)^2-16\operatorname{ctg}^2 4x=4(4\csc^2 4x)-16\operatorname{ctg}^2 4x=16$

Edad de Miguel $=3(16)=48$ años.

Rpta.: D

5. Halle el complemento del dominio de la función real f definida por

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}2x+\cos 2x}{\sec 3x-\csc\frac{\pi}{6}}.$$

A) $\{(6n\pm 1)\frac{\pi}{3}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

B) $\{(6n\pm 1)\frac{\pi}{6}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

C) $\{(3n\pm 1)\frac{\pi}{3}/n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\{(2n\pm 1)\frac{\pi}{6}/\ n\in\mathbb{Z}\}$

E) $\{(6n\pm 1)\frac{\pi}{9},\ n\in\mathbb{Z}\}$

Solución:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}2x+\cos 2x}{\sec 3x-\csc\frac{\pi}{6}}$$

$x\in \operatorname{Dom}(f)\Leftrightarrow \sec 3x-2\neq 0\Leftrightarrow 3x\neq 2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x\neq(6n\pm 1)\frac{\pi}{9},\ n\in\mathbb{Z}$

$\therefore (\operatorname{Dom}(f))'=\{(6n\pm 1)\frac{\pi}{9},\ n\in\mathbb{Z}\}.$

Rpta.: E

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $[c, d]$ es el rango de la función real f definida por

$$f(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + 3\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2},\ \frac{\pi}{12} \le x < \frac{11\pi}{40},$$

halle $d - c$.

A) 10 B) 11 C) 14 D) 12 E) 13

Solución:

$$f(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + 3\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2} = (2\csc 2x)^2 + 3(-1)$$

$$= 4\csc^2 2x - 3,\ \frac{\pi}{6} \le 2x < \frac{11\pi}{20}$$

$$\Rightarrow 1 \le \csc 2x \le 2 \ \Rightarrow 1 \le \csc^2 2x \le 4 \ \Rightarrow 4 \le 4\csc^2 2x \le 16$$

$$\Rightarrow 1 \le 4\csc^2 2x - 3 \le 13$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ran}(f) = [1, 13] = [c, d]$$

$$\therefore d - c = 12.$$

Rpta.: D

2. Sea la función real f definida por $f(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{sen} 2x \cdot \sec 2x$. Si T es el periodo de f, calcule el valor de $5 + \frac{4T}{\pi}$.

A) 8 B) 7 C) 9 D) 6,5 E) 7,5

Solución:

$$f(x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{sen} 2x \cdot \sec 2x = 1 + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} 2x = 1 + 2\csc 4x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\ 5 + \frac{4T}{\pi} = 5 + \left(\frac{4}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7.$$

Rpta.: B

3. En una ciudad, la temperatura del día en ^{o}C está dada por la función real T definida $T(t)=3\,ctg^2 t+5$, $\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{6}$, donde t es el tiempo en horas. Calcule la diferencia entre la máxima y mínima temperatura en ^{o}C.

A) 11 ^{o}C B) 7 ^{o}C C) 8 ^{o}C D) 10 ^{o}C E) 9 ^{o}C

Solución:

$$\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{6}\Rightarrow -\sqrt{3}\le ctg\ t\le 1\Rightarrow 0\le ctg^2 t\le 3$$
$$\Rightarrow 0\le 3\,ctg^2 t\le 9\Rightarrow 5\le 3\,ctg^2 t+5\le 14$$
$$\therefore \text{Máx}(T)-\text{Mín}(T)=14-5=9^{o}C.$$

Rpta.: E

4. La edad de Willy es el triple de la edad de Pedro. Si la edad de Pedro está determinada por el mínimo valor que toma la función real f definida por $f(t)=\sec^4 t+\csc^4 t$ en años, halle la edad de Willy.

A) 21 años B) 18 años C) 24 años D) 27 años E) 15 años

Solución:

$$\begin{aligned}f(t)&=\sec^4 t+\csc^4 t=(ctg^2t+1)^2+(tg^2t+1)^2\\&=tg^4t+2tg^2t+1+ctg^4t+2ctg^2t+1\\&=(tg^2t+ctg^2t)^2+2(tg^2t+ctg^2t)\\&\ge(2)^2+2(2)=8.\end{aligned}$$

El mínimo valor que toma f es 8 que es la edad de Pedro, en consecuencia, la edad de Willy es de 24 años.

Rpta.: C

5. El desplazamiento de una partícula está determinada por la función real f definida por $f(t)=\csc^2 t-2\csc t+6$ en metros, donde t denota el tiempo en minutos tal que $t\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$. ¿Cuál es la diferencia entre la máxima y mínima distancia que se puede alejar la partícula con respecto al eje horizontal?

A) 1 m B) 2 m C) 0,5 m D) 1,5 m E) 2,5 m

Solución:

$$f(t)=\csc^2 t-2\csc t+1+5=(\csc t-1)^2+5$$
$$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 1\le\csc t\le 2\Rightarrow 0\le(\csc t-1)^2\le 1$$
$$\Rightarrow 5\le(\csc t-1)^2+5\le 6$$
$$\therefore 6-5=1\text{m.}$$

Rpta.: A

6. La fuerza electromotriz (en voltios) aplicada a un circuito eléctrico está dada por la función real $E(t)=110\sec^2\frac{\pi t}{4}+2$, donde t denota el tiempo en segundos. Si $t\in[1,2\rangle$, ¿cuál será la mínima fuerza electromotriz aplicada al circuito eléctrico?,

A) 225 voltios B) 215 voltios C) 210 voltios D) 222 voltios E) 220 voltios

Solución:

$$1\le t<2\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi t}{4}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sqrt{2}\le\sec\frac{\pi t}{4}\Rightarrow 2\le\sec^2\frac{\pi t}{4}$$
$$\Rightarrow 220\le 110\sec^2\frac{\pi t}{4}\Rightarrow 222\le 110\sec^2\frac{\pi t}{4}+2$$
$$\Rightarrow 222\le E(t)$$

Entonces, la mínima fuerza electromotriz aplicada al circuito eléctrico es de 222 voltios.

Rpta.: D

7. Halle el complemento del dominio de la función real f definida por

$$f(x)=\operatorname{ctg}3x\cdot\csc 6x.$$

A) $\{\frac{n\pi}{5}/n\in\mathbb{Z}\}$ B) $\{\frac{n\pi}{6}/n\in\mathbb{Z}\}$ C) $\{\frac{n\pi}{3}/n\in\mathbb{Z}\}$

D) $\{\frac{n\pi}{4}/n\in\mathbb{Z}\}$ E) $\{\frac{n\pi}{8}/n\in\mathbb{Z}\}$

Solución:

$$f(x)=\operatorname{ctg}3x\cdot\csc 6x=\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen}3x\cdot\operatorname{sen}6x}=\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 3x},\ \cos 3x\neq 0$$

$$x\in\operatorname{Dom}(f)\Leftrightarrow \operatorname{sen}3x\neq 0\ \wedge\ \cos 3x\neq 0\Leftrightarrow \operatorname{sen}6x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow\ 6x\neq n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\ x\neq\frac{n\pi}{6},\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ (\operatorname{Dom}(f))'=\{\frac{n\pi}{6}\ /\ n\in\mathbb{Z}\}.$$

Rpta.: B

8. Halle el rango de la función real f definida por

$$f(x)=\sec^2 60^\circ-\sec^2 3x-\csc^2 3x,\ x\in\langle\frac{7\pi}{36},\ \frac{5\pi}{18}\rangle.$$

A) $\langle -12,-1]$ B) $[10,+\infty\rangle$ C) $[-12,+\infty\rangle$

D) $\langle -10,0]$ E) $\langle -12,0]$

Solución:

$$f(x)=\sec^2 60^\circ-\sec^2 3x-\csc^2 3x\ =4-\sec^2 3x=4-4\csc^2 6x$$

Luego, $\frac{7\pi}{36}<x<\frac{5\pi}{18}\Rightarrow\frac{7\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{3}\Rightarrow -2<\csc 6x\leq -1$

$$\Rightarrow 1\leq\csc^2 6x<4\Rightarrow -16<-4\csc^2 6x\leq -4\Rightarrow -12<4-4\csc^2 6x\leq 0$$

Rpta.: E

9. En una ciudad la temperatura del día en grados centígrados está dada por la función T definida por $T(t)=10(\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{48}-\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{24})$, donde t es el tiempo en horas. Si el registro de la temperatura se inicia desde la medianoche, ¿a qué hora la temperatura será de $10\,^\circ C$?.

A) $10:00\text{am}$ B) $09:00\text{am}$ C) $11:00\text{am}$ D) $12:00\text{m}$ E) $08:00\text{am}$

Solución:

$$T(t)=10(\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{48}-\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{24})=10\csc\frac{\pi t}{24}=10$$

$$\Rightarrow\csc\frac{\pi t}{24}=1\ \Rightarrow\frac{\pi t}{24}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=12\text{ horas.}$$

Rpta.: D

10. Halle el rango de la función real f definida por

$$f(x)=(\sec 3x+\csc 3x-3)(\sec 3x+\csc 3x+3).$$

A) $[-1,+\infty\rangle$ B) $[-8,+\infty\rangle$ C) $[-9,+\infty\rangle$ D) $[9,+\infty\rangle$ E) $\langle-\infty,-9]$

Solución:

$$f(x)=(\sec 3x+\csc 3x)^2-9=(\sec 3x\cdot\csc 3x+1)^2-10$$
$$=(2\csc 6x+1)^2-10$$
$$2\csc 6x\le -2 \ \vee\ 2\csc 6x\ge 2 \Rightarrow 2\csc 6x+1\le -1 \ \vee\ 2\csc 6x+1\ge 3$$
$$\Rightarrow (2\csc 6x+1)^2\ge 1 \ \vee\ (2\csc 6x+1)^2\ge 9$$
$$\Rightarrow (2\csc 6x+1)^2-10\ge -9 \ \vee\ (2\csc 6x+1)^2-10\ge -1$$
$$\therefore \operatorname{Ran}(f)=[-9,+\infty\rangle.$$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halle el dominio de la función real f definida por

$$f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{4-x^2}+4(\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x).$$

A) $[-2,\ 2]-\{0,\pm\frac{\pi}{6},\pm\frac{\pi}{2}\}$ B) $[-2,\ 2]-\{0,\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{\pi}{3}\}$ C) $[-1,\ 1]-\{0,\pm\frac{\pi}{4}\}$

D) $[-1,\ 1]-\{0,\pm\frac{\pi}{6}\}$ E) $[-2,\ 2]-\{0,\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{\pi}{2}\}$

Solución:

$$f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{4-x^2}+8\csc 4x$$
$$x\in\operatorname{Dom}(f)\Leftrightarrow 4-x^2\ge 0 \ \wedge\ \operatorname{sen}4x\ne 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 2 \ \wedge\ 4x\ne n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$
$$\therefore \operatorname{Dom}(f)=[-2,\ 2]-\{0,\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{\pi}{2}\}$$

Rpta.: E

2. Halle el rango de la función real f definida por

$$f(x)=\sqrt{\csc^4 3x-\operatorname{ctg}^4 3x}+3.$$

A) $[4,\ \infty\rangle$ B) $[5,\infty\rangle$ C) $\langle 4,\infty\rangle$ D) $[0,\infty\rangle$ E) $[3,\infty\rangle$

Solución:

$f(x)=\sqrt{\csc^2 3x+\text{ctg}^2 3x}+3=\sqrt{1+2\text{ctg}^2 3x}+3$

$\Rightarrow\ 0\le 2\text{ctg}^2 3x\ \Rightarrow\ 1\le 1+2\text{ctg}^2 3x\Rightarrow\ 1\le\sqrt{1+2\text{ctg}^2 3x}$

$\Rightarrow\ 4\le\sqrt{1+2\text{ctg}^2 3x}+3$

$\therefore\ \text{Ran}(f)=[\,4,\ \infty\rangle$

Rpta.: A

3. Si $[c, d]$ es el rango de la función real f definida por

$$f(x)=2\csc^2 2x+4\csc 2x+5,\ \frac{\pi}{8}<x\le\frac{5\pi}{12},$$

halle $c+d$.

A) 30 B) 28 C) 32 D) 34 E) 29

Solución:

$f(x)=2(\csc^2 2x+2\csc 2x+1)+3=2(\csc 2x+1)^2+3$

$\frac{\pi}{4}<2x\le\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\ 1\le\csc 2x\le 2\Rightarrow\ 2\le\csc 2x+1\le 3$

$\Rightarrow\ 4\le(\csc 2x+1)^2\le 9\ \Rightarrow\ 8\le 2(\csc 2x+1)^2\le 18$

$\Rightarrow\ 11\le f(x)\le 21\ \Rightarrow\ \text{Ran}(f)=[11,\ 21]=[c,\ d]$

$\therefore c+d=32.$

Rpta.: C

4. En un laboratorio de biología la función real P definida por $P(t)=5+3\sec\frac{\pi t}{24}$ representa el número de bacterias en miles y t el tiempo en días. Si $t=0$ es el inicio de la observación, ¿cuál es la población de bacterias al octavo día?.

A) 13 000 B) 9 000 C) 10 000 D) 11 000 E) 12 000

Solución:

$P(t)=5+3\sec\frac{\pi t}{24}\ \Rightarrow\ P(8)=5+3\sec\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow\ P(8)=5+3(2)=11$ mil bacterias.

Rpta.: D

5. La función real f definida por $f(t)=10\csc\frac{\pi t}{8}$ describe la oscilación de una pesa en centímetros, donde t denota el tiempo en segundos. Halle el periodo de f.

A) 15 B) 16 C) 14 D) 18 E) 13

Solución:

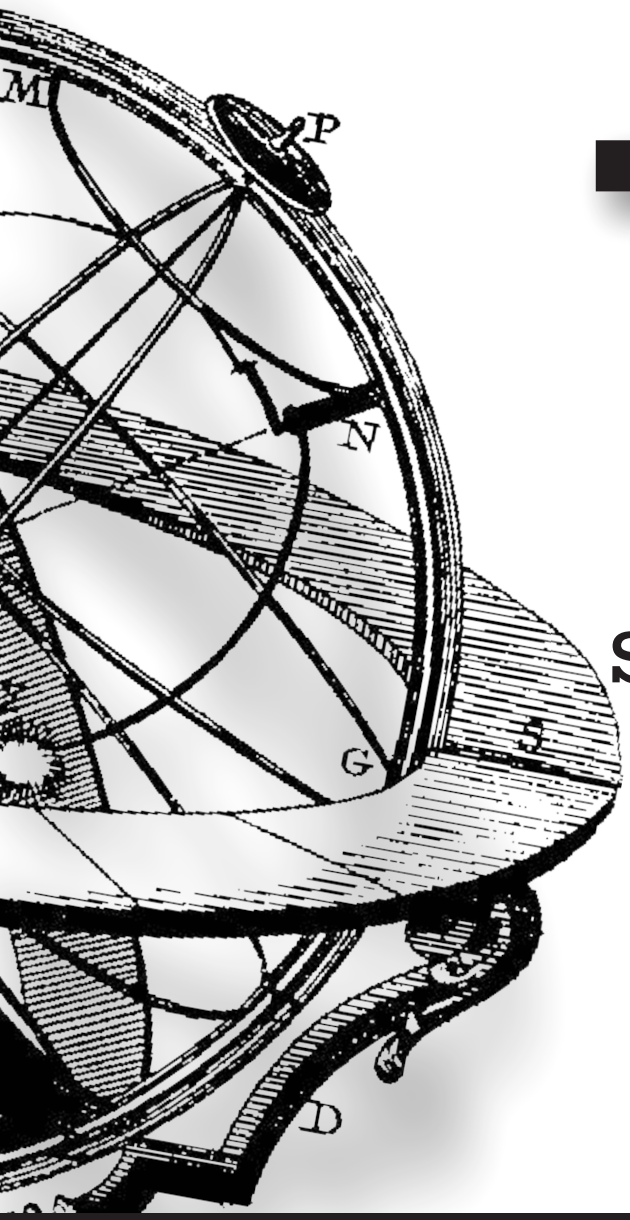
$f(t)=10\csc\frac{\pi t}{8} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$

$\therefore$ Una oscilación de de la pesa se efectua cada 16 segundos.

Rpta.: B

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



17

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS I

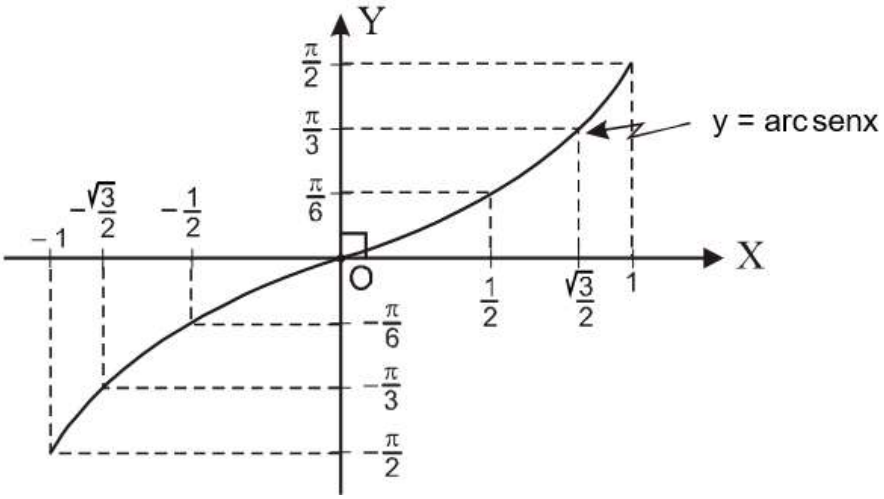
FUNCIÓN INVERSA DEL SENO (O ARCO SENO)

Es la función f: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $y = \text{arc sen}x$ si y solo si $x = \text{sen}y$

$x \longmapsto y = \text{arc sen}x$

$\text{Dom}(f) = [-1, 1]$

$\text{Ran}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

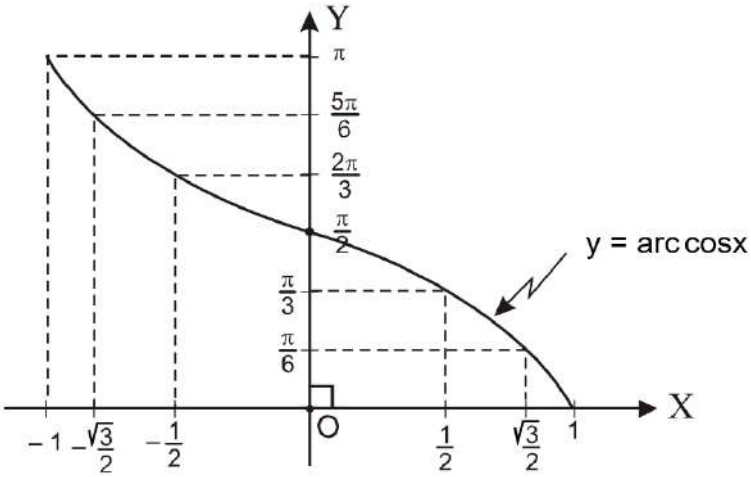
FUNCIÓN INVERSA DEL COSENO (O ARCO COSENO)

Es la función f: $[-1, 1] \to [0, \pi]$ definida por $y = \text{arc cos}x$ si y solo si $x = \cos y$

$x \longmapsto y = \text{arc cos}x$

$\text{Dom}(f) = [-1, 1]$

$\text{Ran}(f) = [0, \pi]$



x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

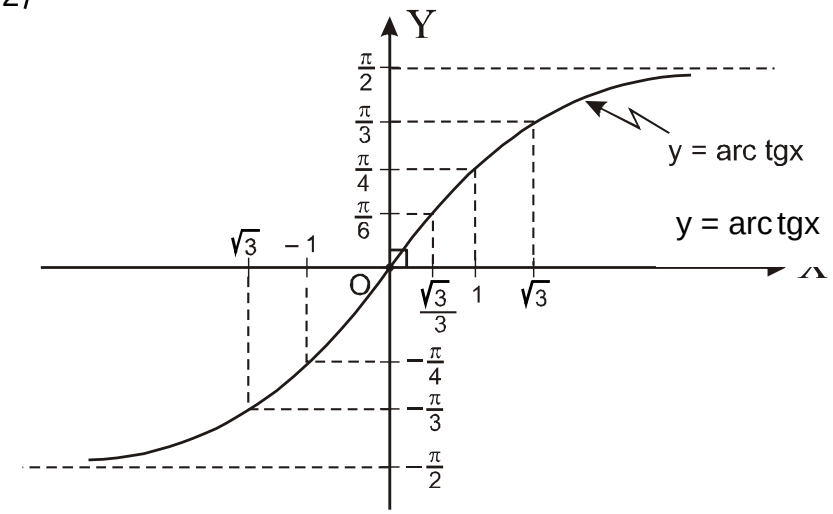
FUNCIÓN INVERSA DE LA TANGENTE (O ARCO TANGENTE)

Es la función $f : \mathbb{R} \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ definida por $y = \text{arc}\,\text{tg}x$ si y solo si $x = \text{tg}y$

$x \longmapsto y = \text{arc}\,\text{tg}x$

Dom(f) = $\mathbb{R}$

Ran(f) = $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
y	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Halle la suma de las soluciones positivas de la ecuación

$$\arctan(x)+\arctan(1-x)=2\arctan(\sqrt{x-x^2}).$$

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

Solución:

$\alpha=\arctan x \Rightarrow \tan\alpha=x$

$\beta=\arctan(1-x) \Rightarrow \tan\beta=1-x$

$\theta=2\arctan(\sqrt{x-x^2})\Rightarrow \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sqrt{x-x^2}$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{x-x^2}}{1-(\sqrt{x-x^2})^2}$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{2\sqrt{x-x^2}}{x^2-x+1}$$

Como: $\alpha+\beta=\theta \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\tan\theta\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan\theta$

$$\Rightarrow \frac{x+(1-x)}{1-x(1-x)}=\frac{2\sqrt{x-x^2}}{x^2-x+1} \Rightarrow 1=2\sqrt{x-x^2}\Rightarrow 1=4x-4x^2$$

$\Rightarrow (2x-1)^2=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ (raíz repetida)

$\therefore \sum$ de las soluciones $= \frac{1}{2}$.

Rpta.: D

2. Simplifique la expresión

$$\text{sen}\left[\arccos\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\text{arcsen}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]+\frac{\arccos 0}{\text{arcsen}1}.$$

A) 1 B) $\frac{\pi}{2}$ C) 2 D) $\frac{3}{2}$

Solución:

$$\text{sen}\left[\arccos\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\text{arcsen}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]+\frac{\arccos 0}{\text{arcsen}1}=$$

$$=\text{sen}\left[\arccos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\text{arcsen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]+\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)+1$$

$$=2.$$

Rpta.: C

3. Una regadera automática de agua en un parque se desplaza inicialmente un ángulo α para poder mojar el césped, luego es modificado aumentando un ángulo β. Si $\cot\alpha=\tan\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\right]$ y $\beta-\alpha=\frac{\pi}{6}$, determine $\tan\beta$.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{3}{2}$

Solución:

$$\cot\alpha=\tan\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\right]$$

$$\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3} \quad \wedge \quad \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)=\phi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{13}}=\cos\phi$$

$$\cot\alpha=\tan\left(-\frac{\pi}{3}-\phi\right)=\frac{-\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{1}}{1+(-\sqrt{3}).2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

Luego:

$$\beta-\alpha=\frac{\pi}{6}\rightarrow\tan\beta=\frac{\frac{5}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{5}{3\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}$$

Rpta.: A

4. Una estatua está ubicada sobre un pedestal de 25 pies de altura. En el suelo, sobre el mismo plano, desde un punto situado a 35 pies del pie del pedestal, la base de la estatua con su parte más alta subtiende un ángulo igual a $\operatorname{arc\,sen}(0,6)$. Calcule la altura de la estatua.

A) $\frac{1110}{13}$ pies B) $\frac{1100}{13}$ pies C) $\frac{1110}{17}$ pies D) $\frac{1100}{17}$ pies

Solución:

Sea $\alpha = \operatorname{arcsen}(0,6) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4}$

Por otra parte $\tan\beta = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

Sea h la altura de la estatua, entonces

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{3}{4}+\frac{5}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}} \Rightarrow \frac{25+h}{35} = \frac{41}{13} \Rightarrow 325+13h = 1435$$

$$\Rightarrow h = \frac{1110}{13} \text{ pies}$$

Rpta.: A

5. Calcule el valor de la expresión

$$17\cos^2\left[\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)\right] + 5\tan\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{40}{41}\right)\right].$$

A) 17 B) 22 C) 15 D) 20

Solución:

$$17\cos^2\left[\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)\right] + 5\tan\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{40}{41}\right)\right]$$

Sea $\alpha = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{4}, \alpha \in \text{IVC} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{40}{41}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{40}{41} \Rightarrow \tan\frac{\beta}{2} = \frac{4}{5}$

Luego, $17\left(\frac{16}{17}\right) + 5\left(\frac{4}{5}\right) = 20.$

Rpta.: D

6. Establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, entonces $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \pi - x$.

ii. $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \arccos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$

iii. $\arctan 2x = 2\arctan x$, $\forall x \neq 0$.

A) VFV B) FVV C) FFV D) VFF

Solución:

i. $\operatorname{sen}(x-\pi)=-\operatorname{sen}x$

$\Rightarrow \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x-\pi))=\operatorname{arcsen}(-\operatorname{sen}x)$

$\Rightarrow x-\pi=-\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x)$

$\Rightarrow \pi-x=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}x)\cdots$ (V)

ii. $\frac{\pi}{3}>1\Rightarrow\frac{\pi}{3}\notin \text{Dom(arcsen)}\Rightarrow \operatorname{arcsen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ no existe

$\therefore$ la proposición es falsa (F)

iii. Para $x=1$ se tiene $\arctan 2=2\arctan 1=\frac{\pi}{2}$,

pero arctan no puede tomar el valor $\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ la proposición es falsa (F).

Luego de i), ii) y iii) se tiene VFF.

Rpta.: D

7. La función real f definida por $f(x)=\frac{A}{\pi}\arccos\left(\frac{x}{10}-2\right)$, $x\in[10,30]$ verifica $f(25)=10$. Determine el valor de $\operatorname{arcsen}\left(\frac{A}{60}\right)+\arccos\left(\frac{\sqrt{2}A}{60}\right)$.

A) $\frac{5\pi}{12}$ B) $\frac{7\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{5\pi}{3}$

Solución:

$$10=\frac{A}{\pi}\arccos\left(\frac{25}{10}-2\right)\Rightarrow 10=\frac{A}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow 10=\frac{A}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow A=30$$

Luego, $\operatorname{arcsen}\left(\frac{A}{60}\right)+\arccos\left(\frac{\sqrt{2}A}{60}\right)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$.

Rpta.: A

8. Sea la función real f definida por $f(x)=7\operatorname{arcsen}\left(\frac{3x-4}{2}\right)-10\csc(3x)$. Si su dominio es $[a,b]-\{c\}$, calcule el valor de $3a+b+\frac{6c}{\pi}$.

A) 8 B) 4 C) 6 D) 5

Solución:

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow -2 \le 3x - 4 \le 2 \ \wedge \ 3x \ne n\pi,\ n \in Z$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \le x \le 2 \ \wedge \ x \ne \frac{n\pi}{3},\ n \in Z$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\therefore\ 3a + b + \frac{6c}{\pi} = 3\left(\frac{2}{3}\right) + 2 + \frac{6}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6.$$

Rpta.: C

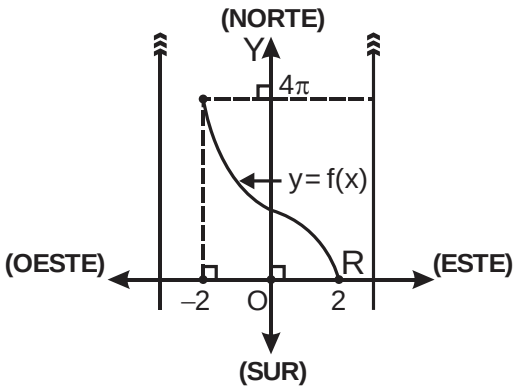
9. Un tráiler se dirige de Sur a Norte tal como se muestra en la gráfica, ocurriendo un accidente en el punto R. Un investigador determina que la trayectoria que sigue el tráiler desde el punto R hasta el punto T, lugar donde se detiene el vehículo está determinada por la función real f definida por $f(x) = A\arccos(Bx)$, donde A y B son positivos. Determine el valor de la expresión $A + 2B$.

A) 6

B) 5

C) 4

D) 3



Solución:

Evaluando el dominio de la función:

$$-2 \le x \le 2 \Rightarrow -2B \le Bx \le 2B \Rightarrow -2B = -1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = A \cdot \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Evaluando la función para $x = -2$

$$f(-2) = A \cdot \arccos(-1) = 4\pi \Rightarrow A \cdot \arccos(-1) = 4\pi \Rightarrow A \cdot \pi = 4\pi \Rightarrow A = 4$$

Luego, $f(x) = 4 \cdot \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\therefore A + 2B = 4 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 5.$$

Rpta.: B

10. Las medidas de los lados de un terreno de forma rectangular son 5x y 10x en metros, donde x es solución de la ecuación

$$\arctan(x-4)=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Si cada metro cuadrado del terreno cuesta 100 soles, halle el costo del terreno.

A) S/ 74 200 B) S/ 72 200 C) S/ 72 000 D) S/ 41 500

Solución:

$$\arctan(x-4)=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\Rightarrow \arctan(x-4)=\frac{\pi}{4}-\alpha$$

donde $\alpha=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{3}{2}$

Luego, $x-4=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}\Rightarrow x=\frac{19}{5}$

$\therefore$ Costo del terreno $=5\left(\frac{19}{5}\right)\cdot 10\left(\frac{19}{5}\right)\cdot 100=S/72200.$

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La distancia entre dos ciudades es 60x kilómetros, siendo x la solución de la ecuación $\arctan(2x-3)=\arctan(1)+\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Si un bus viaja con velocidad constante de 60 kilómetros por hora, halle el tiempo en recorrer la distancia que separa ambas ciudades.

A) 4 horas B) 5 horas C) 3 horas D) 6 horas

Solución:

$$\arctan(2x-3)=\arctan(1)+\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\Rightarrow \arctan(2x-3)=\frac{\pi}{4}+\alpha$$

donde $\alpha=\operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{2}{3}$

Luego, $2x-3=\dfrac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\Rightarrow 2x-3=5\Rightarrow x=4$

La distancia entre las dos ciudades es $60x=240$ km.

$\therefore t=\frac{e}{v}=\frac{240}{60}=4$ horas.

Rpta.: A

2. Dada la función real f definida por $f(x)=5\arccos(\text{sen}^6x+\cos^6 x)$, determine el rango de f.

A) $\left[1\,,\ 5\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

B) $\left[0,\ 5\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

C) $\left[0,\ 3\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

D) $\left[0,\ 6\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

Solución:

$\text{sen}^6x+\cos^6 x=1-3\,\text{sen}^2x\cdot\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\text{sen}^2 2x$

Para $x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $0\le \text{sen}^2 2x\le 1\Rightarrow -\frac{3}{4}\le -\frac{3}{4}\text{sen}^2 2x\le 0\Rightarrow \frac{1}{4}\le 1-\frac{3}{4}\text{sen}^2 2x\le 1$

Así; $0\le \arccos\left(1-\frac{3}{4}\text{sen}^2 2x\right)\le \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow 0\le 5\arccos\left(1-\frac{3}{4}\text{sen}^2 2x\right)\le 5\cdot\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

$\therefore \text{Ran}(f)=\left[0,\ 5\cdot\arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

Rpta.: B

3. Si $[c, d]$ es el rango de la función real f definida como $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$, halle el valor de $\text{arcsen}\left(\frac{\text{sen}\,2c-\cos d}{2}\right)$.

A) 1

B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{6}$

Solución:

$f(x)=\arctan\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)+\arctan\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)=\arctan(2+\sqrt{3})+\arctan\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$

$=\frac{5\pi}{12}+\arctan\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$

Por otra parte $4-x^2\ge 0\Rightarrow 4\ge x^2\ge 0\Rightarrow -4\le -x^2\le 0\Rightarrow 0\le 4-x^2\le 4$

$\Rightarrow 0\le\sqrt{4-x^2}\le 2\Rightarrow 0\le\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\le 1\Rightarrow 0\le\arctan\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)\le\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{5\pi}{12}\le\frac{5\pi}{12}+\arctan\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)\le\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow [c, d]=\left[\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$

$$\therefore \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}2c-\cos d}{2}\right)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{2\pi}{3}}{2}\right)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Rpta.: D

4. En la fábrica de chocolates CHOCO, el ingreso diario está modelado por $I(x)=\tan x+\dfrac{\tan(3\operatorname{arcsen}x)-\cot(3\arccos x)}{\tan(5\operatorname{arcsen}x)+\cot(5\arccos x)}$ en decenas de miles de soles donde $x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right]$. ¿Cuánto es el máximo ingreso semanal de dicha fábrica?

A) S/ 65 000 B) S/ 70 000 C) S/ 77 000 D) S/ 63 000

<u>Solución</u>:

Como $\operatorname{arcsen}x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

$*\ 3\operatorname{arcsen}x+3\arccos x=\frac{3\pi}{2}$

$$3\operatorname{arcsen}x=\frac{3\pi}{2}-3\arccos x$$

$$\tan(3\operatorname{arcsen}x)=\tan\left(\frac{3\pi}{2}-3\arccos x\right)\Rightarrow\ \tan(3\operatorname{arcsen}x)=\cot(3\arccos x)$$

$*\ 5\operatorname{arcsen}x+5\arccos x=\frac{5\pi}{2}$

$$5\operatorname{arcsen}x=\frac{5\pi}{2}-5\arccos x$$

$$\tan(5\operatorname{arcsen}x)=\tan\left(\frac{5\pi}{2}-5\arccos x\right)\ \Rightarrow\ \tan(5\operatorname{arcsen}x)=\cot(5\arccos x)$$

$\Rightarrow I(x)=\tan x$

Como $0<x\le\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ 0<\operatorname{tg}x\le 1$

$I_{máx}=S/10\ 000.00$

$\therefore$ El ingreso semanal es de $S/70\ 000$.

Rpta.: B

5. Calcule el área de un sector circular de radio 20 cm y ángulo central θ rad tal que $\theta=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}+\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5}}$.

A) 30π cm^2 B) 30 cm^2 C) 50π cm^2 D) 55π cm^2

Solución:

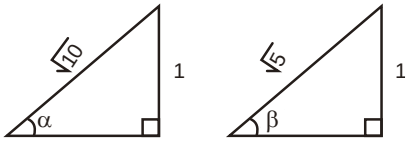
1) Sea $\alpha = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ y $\beta = \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, entonces

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; con α y β ángulos agudos.

2) $\theta = \alpha + \beta$

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$



$$\operatorname{sen}\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{2}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} \vee \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

como $\dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{\sqrt{5}} < \operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pues "arcsen" es creciente, entonces $\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \beta < \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 0 < \alpha + \beta < \dfrac{3\pi}{4}$. Así, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

3) Área AOB $= \dfrac{1}{2}\theta(20)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)(20)^2 = 50\pi$ cm^2.

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. El radio de un sector circular está determinado por la expresión $\tan(\text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{5}{\sqrt{34}})$ en metros. Si el ángulo central mide 15°, halle el área del sector circular.

A) $\frac{\pi}{3}u^2$ B) $\frac{3\pi}{2}u^2$ C) $\frac{2\pi}{3}u^2$ D) $\frac{5\pi}{4}u^2$

Solución:

Sea $\alpha = \text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \beta = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$, entonces

$$\tan(\text{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}) = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{8}{2} = 4$$

Luego, el área del sector circular es

$$S = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{12})(4)^2 = \frac{2\pi}{3}u^2.$$

Rpta.: C

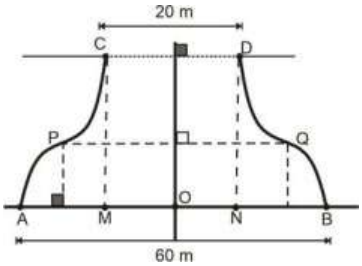
2. La curva que describe el contorno de una caverna funeraria está determinada por la función $f(x) = \frac{30}{\pi}\arccos(\frac{|x|}{10} - 2)$, donde x denota la longitud en metros. Un grupo de arqueólogos desean preservar dicha caverna para lo cual deben colocar un soporte rectilíneo horizontal cuyos extremos están apoyados en los puntos P y Q a 10 metros del suelo (véase la figura, la cual es simétrica con respecto al eje Y). Si dicho soporte metálico cuesta 800 soles el metro, ¿cuánto costará todo el soporte?

A) 44 000 soles

B) 48 000 soles

C) 56 000 soles

D) 40 000 soles



Solución

De la figura por la simetría $x \in [-30,-10] \cup [10,30]$ tenemos $f(t) = 10$

Entonces

$$10 = \frac{30}{\pi}\arccos(\frac{|x|}{10} - 2) \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \arccos(\frac{|x|}{10} - 2) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|x|}{10} - 2 \Rightarrow x = \pm 25$$

Como $\text{Long.soporte} = 2|x| \Rightarrow \text{Long.soporte} = 50\,\text{m}.$

Así, el precio del soporte $= 40\,000$ soles.

Por consiguiente, se tiene que pagar 40 000 soles

Rpta.: D

3. Sea $E = \text{sen}(3\arccos\frac{1}{2} - \arctan\frac{12}{5})$. Si $26E$ y $\frac{13E}{2}$ metros son las medidas del largo y el ancho de un terreno rectangular, respectivamente, halle el costo del terreno si el metro cuadrado cuesta \$ 100.

A) \$14 000 B) \$14 400 C) \$15 200 D) \$14 500

Solución:

$$E = \text{sen}(3\arccos\frac{1}{2} - \arctan\frac{12}{5}) = \text{sen}(\pi - \arctan\frac{12}{5}) = \text{sen}(\arctan\frac{12}{5}) = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow \text{Área} = (26E)(\frac{13E}{2}) = (24)(6) = 144\,\text{m}^2$$

$\therefore$ El costo del terreno es de : \$14 400.

Rpta.: B

4. Si $[c, d]$ es el rango de la función real f definida por

$$f(x) = 2\,\text{arcsen}(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \arccos\sqrt{4 - x^2}\,,$$ halle el valor de $2c + d$.

A) 2π B) 3π C) π D) $\frac{2\pi}{3}$

Solución:

$0 \le 4 - x^2$

Luego, $0 \le 4 - x^2 \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{4 - x^2} \le 1 \Rightarrow \arccos(1) \le \arccos\sqrt{4 - x^2} \le \arccos(0)$

$$\Rightarrow 0 \le \arccos\sqrt{4 - x^2} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \arccos\sqrt{4 - x^2} \le \pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \le f(x) \le \pi \Rightarrow [c, d] = [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow 2c + d = 2\pi.$$

Rpta.: A

5. Una escalera de 8 metros se apoya sobre la fachada de un edificio formando un ángulo θ. Si la parte inferior de la escalera está a $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ metros de la base del edificio, calcule el valor de $\tan\frac{\theta}{2}$.

A) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ D) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Solución:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}\Rightarrow\theta=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{12}$$

Luego, $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Rpta.: D

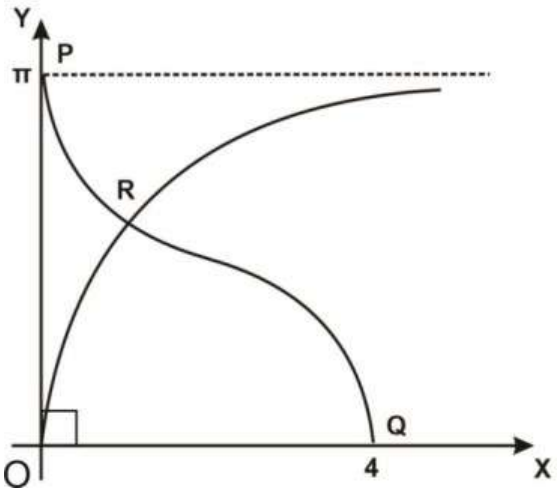
6. En la figura, se muestra cuatro ciudades P, Q, R y O, que están interconectadas por las carreteras cuyas trayectorias están determinadas por parte de las gráficas de las funciones $F(x)=2\arctan\left(\sqrt{3}\,x\right)$ y $G(x)=\arccos(ax-b)$; $a>0$, donde x denota la distancia en kilómetros. Halle la distancia de Q respecto a la proyección de la ciudad R sobre el eje X.

A) 3 km

B) 2 km

C) 2.5 km

D) 3.5 km



Solución:

Del enunciado:

$$0\le x\le 4\quad\rightarrow\quad -b\le ax-b\le 4a-b\quad\rightarrow\quad b=1\ \wedge\ a=\frac{1}{2}$$

Luego:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}x-1\right)=2\arctan\left(\sqrt{3}\,x\right)\quad\rightarrow\quad\frac{1}{2}x-1=\cos\left[2\arctan\left(\sqrt{3}\,x\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}x-1=\frac{1-\operatorname{tg}^2\left[\arctan\left(\sqrt{3}\,x\right)\right]}{1+\operatorname{tg}^2\left[\arctan\left(\sqrt{3}\,x\right)\right]}\quad\rightarrow\quad\frac{x}{2}-1=\frac{1-3x^2}{1+3x^2}\quad\rightarrow\quad x=1.$$

Las coordenadas de $R\left(1;\frac{2\pi}{3}\right)$. **Rpta.: A**

7. El metro cuadrado de un terreno rectangular destinado para la construcción de una vivienda cuesta S/ 400. Si $(7-x)$m y 12m son las medidas del ancho y largo del terreno, satisfaciendo x la ecuación $3\operatorname{arcsen}x+2\arccos x=\frac{\pi}{2}$, halle el valor del terreno.

A) S/ 33 000
B) S/ 51 000
C) S/ 38 400
D) S/ 41 500

Solución:

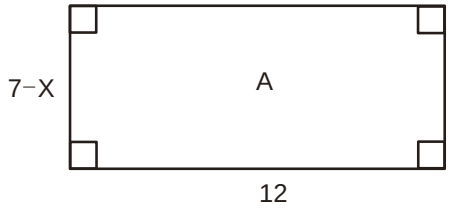
$$3\operatorname{arcsen}x+2\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$3\operatorname{arcsen}x+2\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}x\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$3\operatorname{arcsen}x+\pi-2\operatorname{arcsen}x=\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsen}x=-\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=x$$

$$\Rightarrow \quad x=-1.$$



A: Área

Luego: $A=(8m)(12m) \;\Rightarrow\; A=96m^2$

Por lo tanto el valor del terreno es $96m^2.\frac{S/400}{1m^2}=S/38400$.

Rpta.: C

8. Calcule la diferencia entre el máximo y mínimo valor que puede tomar la función real f definida por $f(x)=(\arccos x)^2+\frac{\pi}{2}(\pi-2\arccos x)$.

A) $\frac{\pi^2}{4}$
B) $\frac{3\pi^2}{4}$
C) $\frac{\pi^2}{2}$
D) $\frac{5\pi^2}{8}$

Solución:

$$f(x)=(\arccos x)^2+\frac{\pi^2}{2}-\pi\arccos x \;\Rightarrow\; f(x)=(\arccos x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{\pi^2}{4}$$

como $\quad 0\le\arccos x\le\pi \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2}\le\arccos x-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\; 0\le(\arccos x-\frac{\pi}{2})^2\le\frac{\pi^2}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi^2}{4}\le(\arccos x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{\pi^2}{4}\le\frac{\pi^2}{2}$$

$$\therefore\; \frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}.$$

Rpta.: A

9. Halle el producto de todos los números enteros que pertenecen al dominio de la función real f definida por $f(x) = 3\arccos(x-3) + \arctan\sqrt{16-x^2}$

A) 20 B) 100 C) 24 D) 34

Solución

Dominio:

$(-1 \le x-3 \le 1 \ \wedge \ 16-x^2 \ge 0) \Leftrightarrow (2 \le x \le 4 \ \wedge \ x^2 \le 16)$

$\Leftrightarrow (2 \le x \le 4 \ \wedge \ -4 \le x \le 4) \Leftrightarrow (2 \le x \le 4)$

Producto de enteros del dominio $= (2)(3)(4) = 24$

Rpta.: C

10. A partir de la expresión $\cos(2x + \operatorname{arcsen} y) = y$, halle $y = f(x)$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$

Solución

Analizando se observa: $-1 \le y \le 1 \Rightarrow \arccos(\cos(2x + \operatorname{arcsen} y)) = \arccos y$

$\Rightarrow 2x + \operatorname{arcsen} y = \arccos y \Rightarrow 2x = \arccos y - \operatorname{arcsen} y$

$\Rightarrow 2x = (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} y) - \operatorname{arcsen} y \Rightarrow 2\operatorname{arcsen} y = \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow \operatorname{arcsen} y = \frac{\pi}{4} - x$

$\Rightarrow y = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$

$\therefore y = f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)$.

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $M=\tan\left(2\arctan 4+\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}\right)$, halle el valor de $84M$.

A) 15 B) 20 C) 45 D) 13

Solución:

Considerando $\arctan 4=\alpha$ y $\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}=\beta \Rightarrow 4=\tan\alpha$ y $\operatorname{sen}\beta=\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow M=\tan(2\alpha+\beta)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\beta}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-\frac{8}{15}+\frac{3}{4}}{1-(-\frac{8}{15})(\frac{3}{4})}=\frac{-32+45}{60+24}=\frac{13}{84},$$

$\therefore 84M=13.$

Rpta.: D

2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $\arctan 1=-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(-1)$.

ii. $\arctan x+\arctan y=\arctan(\frac{x+y}{1-xy})+\pi,\ \forall x, y\in\mathbb{R}$ tal que $xy\neq 1$

iii. $\exists x\in\mathbb{R}\ /\ \operatorname{arcsen} x+\operatorname{arcsen}(\frac{1}{x})=\pi$.

A) FVV B) VFV C) FFV D) FFF

Solución:

i. $-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(-1)=-\frac{1}{2}(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}=\arctan 1$ Verdadero.

ii. $\arctan x+\arctan x=\arctan(\frac{x+y}{1-xy})+\pi,\ \forall x, y\in\mathbb{R}$ tal que $xy\neq 1$

Considerando $x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ y=1$ se tiene

$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+\arctan 1=\frac{5\pi}{12}$ (*)

Por otro lado: $\arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)+\pi=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)+\pi$

$$=\arctan(2+\sqrt{3})+\pi=\frac{17\pi}{12}\cdots(**)$$

De (*) y (**) la proposición es falsa.

iii. $\exists x /\ \operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen}(\frac{1}{x}) = \pi$ Verdadero. Tomar x=1.

Rpta.: B

3. Sean las funciones reales f, g definidas por $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ y $g(x) = \arccos x$, respectivamente. Si (a, b) es el punto de intersección de las gráficas de f y g, calcule el valor de $\operatorname{arcsen}((4b)^{-1}\pi) + \arctan(\sqrt{2}a)$.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{4}$

Solución:

Para calcular la intersección: $f(x) = g(x) \Rightarrow \operatorname{arcsen} x = \arccos x$

Por otro lado, como $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow G(f) \cap G(g) = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})\} \Rightarrow (a, b) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$

$\therefore \operatorname{arcsen}((4b)^{-1}\pi) + \arctan(\sqrt{2}a) = \operatorname{arcsen}((4(\frac{\pi}{4}))^{-1}\pi) + \arctan(\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}))$

$= \operatorname{arcsen}(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$

Rpta.: D

4. La distancia en kilómetros entre dos ciudades está determinada por la suma de los valores máximo y mínimo que toma la función real f definida por $f(x) = \frac{360}{\pi}\arccos(\frac{2x^2}{4+x^4})$. Si la distancia es recorrida por un bus con una velocidad de 60 kilómetros por hora, halle el tiempo que emplea el bus para recorrer dicha distancia

A) 5 horas B) 4, 5 horas C) 5, 5 horas D) 6 horas

Solución:

$(x^2-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 4 \geq 4x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{2x^2}{x^4+4} \geq 0$

$\Rightarrow \arccos(\frac{1}{2}) \leq \arccos(\frac{2x^2}{x^4+4}) \leq \arccos(0) \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \arccos(\frac{2x^2}{x^4+4}) \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 120 \leq \frac{360}{\pi}\arccos(\frac{2x^2}{x^4+4}) \leq 180$

Luego la distancia $= 120 + 180 = 300\,\text{km}.$

Por lo tanto, $t = \frac{300\,\text{km}}{60\,\text{km/h}} = 5$ horas.

Rpta.: A

5. Halle el dominio de la función real f definida por

$$f(x) = 2\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}+3\right)+\arccos(x+4)+\csc x+\sec x.$$

A) $[-5,\ -3]-\{-\pi,\ -\frac{3\pi}{2}\}$

B) $[-7,\ -4]-\{-2\pi,\ -\frac{3\pi}{2}\}$

C) $[-5,\ -4]-\{-\frac{3\pi}{2}\}$

D) $[-5,\ -1]-\{-\frac{3\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\}$

<u>Solución</u>

$$x\in \mathrm{Dom}(f) \Leftrightarrow \left(-1\le \frac{x}{2}+3\le 1 \ \wedge\ -1\le x+4\le 1 \wedge x\ne \frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(-8\le x\le -4 \ \wedge\ -5\le x\le -3 \wedge x\ne \frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(-5\le x\le -4 \ \wedge\ x\ne \frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{Dom}(f)=[-5,\ -4]-\{-\frac{3\pi}{2}\}.$$

Rpta.: C

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si α es solución de la ecuación $\operatorname{arcsen} x - 2\arccos x = \frac{\pi}{2}$, determine el valor de $\operatorname{arctg}\alpha$.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $-\frac{\pi}{4}$ E) $-\frac{\pi}{6}$

Solución:

$\operatorname{arcsen} x - 2\arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arcsen} x - 2\arccos x = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$

$\Rightarrow \arccos x = 0 \Rightarrow x = 1 = \alpha.$

$\therefore \operatorname{arctg}\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$

Rpta.: C

2. Si $[c, d]$ es el rango de la función real definida por

$$f(x) = \left| \frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{6} \right|,$$

halle el valor de d^c.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 0 E) 1

Solución:

Como $-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le \frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) \le \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \le \frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} \le \frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \left|\frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{6}\right| \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 0 \le f(x) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow [c, d] = [0, \frac{\pi}{2}]$

$\therefore d^c = 1.$

Rpta.: E

3. Si $[a, b]$ es el dominio de la función real f definida por

$$f(x) = 3\,\text{arcsen}\left(\frac{x}{5} - 2\right) + 4\arccos\left(3 - \frac{x}{2}\right) - 5\ \text{arctg}\sqrt{36 - x^2}\ ,$$

halle $a + b$.

A) 13 B) 7 C) 10 D) 11 E) 8

Solución:

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow -1 \le \frac{x}{5} - 2 \le 1 \ \wedge\ -1 \le 3 - \frac{x}{2} \le 1 \ \wedge\ 36 - x^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \le x \le 15 \ \wedge\ 4 \le x \le 8 \ \wedge\ -6 \le x \le 6$$

Luego, $[a, b] = [5, 6]$

$\therefore a + b = 11.$

Rpta.: D

4. Halle el dominio de la función real **f** definida por

$$f(x) = \sqrt{4\,\text{arctg}^2 x + 7\,\text{arctg}\,x - 15}\,.$$

A) $\langle -\infty, \text{tg}(\frac{5}{4})]$ B) $\langle -\infty, \text{tg}(\frac{5}{4})\rangle$ C) $[\text{tg}(\frac{5}{4}), +\infty\rangle$

D) $\langle -\infty, \text{tg}(\frac{4}{5})]$ E) $[\text{tg}(\frac{4}{5}), +\infty\rangle$

Solución:

$$f(x)=\sqrt{4\,\text{arctg}^2x+7\,\text{arctg}\,x-15}$$

$$x\in\text{Dom}(f)\Leftrightarrow 4\,\text{arctg}^2x+7\,\text{arctg}\,x-15\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4\,\text{arctg}\,x-5)(\text{arctg}\,x+3)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}\leq \text{arctg}\,x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{5}{4}\right)\leq x$$

$$\therefore \text{Dom}(f)=\left[\text{tg}\left(\frac{5}{4}\right),\ +\infty\right\rangle.$$

Rpta.: C

5. Dada la ecuación $\frac{\pi}{2}+\text{arcsen}\left(x+\frac{3}{2}\right)=\text{arccos}\left(x-\frac{2}{5}\right)$, determine el valor de $\text{arccos}\left(\frac{10x}{11}\right)$.

A) $\frac{2\pi}{3}$ B) $-\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{6}$

Solución:

$$-1\leq x+\frac{3}{2}\leq 1 \quad\wedge\quad -1\leq x-\frac{2}{5}\leq 1$$

$$-\frac{3}{5}\leq x\leq -\frac{1}{2}$$

Luego:

$$\text{arcsen}\left(x+\frac{3}{2}\right)=-\text{arcsen}\left(x-\frac{2}{5}\right)\ \Rightarrow\ x+\frac{3}{2}=-\left(x-\frac{2}{5}\right)\Rightarrow\ x=-\frac{11}{20}$$

Por lo tanto:

$$\text{arccos}\left(\frac{10x}{11}\right)=\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

Rpta.: A

6. Como resultado del estudio de la población de un determinado tipo de insectos, un entomólogo modela el número de insectos en miles por la función real P definida por $P(t)=\dfrac{\operatorname{arc\,sen}\frac{t}{60}}{\arccos\frac{t}{60}}+5,\quad 0\le t<60$, donde t denota el tiempo en minutos. Determine la mínima población de insectos.

A) 4 500 B) 8 000 C) 1 000 D) 3 000 E) 5 000

<u>Solución</u>:

1) $$P(t)=\frac{\operatorname{arc\,sen}\frac{t}{60}}{\arccos\frac{t}{60}}+5 \quad\Rightarrow\quad P(t)=\frac{\operatorname{arcsen}\frac{t}{60}+\arccos\frac{t}{60}+4\arccos\frac{t}{60}}{\arccos\frac{t}{60}}$$

$$P(t)=\frac{\frac{\pi}{2}+4\arccos\frac{t}{60}}{\arccos\frac{t}{60}} \quad\Rightarrow\quad P(t)=\frac{\frac{\pi}{2}}{\arccos\frac{t}{60}}+4$$

2) Luego, $0\le t<60 \quad\Rightarrow\quad 0\le\frac{t}{60}<1$

$$\Rightarrow\quad \arccos 1<\arccos\frac{t}{60}\le\arccos 0$$

$$\Rightarrow\quad 0<\arccos\frac{t}{60}\le\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad 0<\frac{2}{\pi}\le\frac{1}{\arccos\frac{t}{60}}$$

$$\Rightarrow\quad 0<1\le\frac{\frac{\pi}{2}}{\arccos\frac{t}{60}}\quad\Rightarrow\quad 5\le\frac{\frac{\pi}{2}}{\arccos\frac{t}{60}}+4\quad\Rightarrow\quad 5\le P(t)$$

$\therefore$ menor número de insectos = 5 000.

Rpta.: E

7. Calcule el valor de la expresión

$$\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{9}{2}\right).$$

A) 0 B) $\frac{3\pi}{4}$ C) π D) $-\pi$ E) $-\frac{3\pi}{4}$

Solución:

$$\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{9}{2}\right) = \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}}\right) + k\pi$$

$$= \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg}(-4) + \pi, \text{ donde } k = 1 \text{ pues } \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2} > 1$$

$$= \pi.$$

Rpta.: C

8. Un terreno de forma rectangular tiene $4(\sqrt{33}-3)$m de largo y $6x$ m de ancho. Si x satisface la ecuación $\operatorname{arcsen}(x-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} + \arccos(\frac{x}{2})$, halle el valor del terreno si el metro cuadrado cuesta S/ 500.

A) S/40 000 B) S/58 000 C) S/50 000 D) S/48 000 E) S/45 000

Solución:

$$\operatorname{arcsen}(x-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} + \arccos(\frac{x}{2}) \Rightarrow x-\frac{1}{2} = \operatorname{sen}[\frac{\pi}{6} + \arccos(\frac{x}{2})]$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{x}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}[\arccos(\frac{x}{2})] \Rightarrow x-\frac{1}{2} = \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$\Rightarrow 4x-2 = x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2} \Rightarrow 3x^2-3x-2=0$$

$$\Rightarrow 6x = 3+\sqrt{33}$$

$\therefore$ Costo del terreno $= 500[4(\sqrt{33}-3)](\sqrt{33}+3) =$ S/ 48 000.

Rpta.: D

9. Calcule el valor de la expresión $5+\sec^2(\text{arctg}\sqrt{2})+\csc^2(\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}})$.

A) 12 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

Solución:

$R=5+(1+\text{tg}^2(\text{arctg}\sqrt{2}))+(1+\text{ctg}^2(\text{arcctg}\sqrt{3}))$

$R=7+(\text{tg}(\text{arctg}\sqrt{2}))^2+(\text{ctg}(\text{arcctg}\sqrt{3}))^2$

$R=7+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=7+2+3=12$

Rpta.: A

10. Calcule el valor de la expresión $6x+3y$, si x e y satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{arctg}(x+y)=\pi/4$$

$$\text{arctg}(x-2y)=-\pi/4.$$

A) 3 B) 2 C) 4 D) 6 E) 5

Solución:

$arctg(x+y)=\pi/4 \Rightarrow x+y=1$..... (i)

$arctg(x-2y)=-\pi/4 \Rightarrow x-2y=-1$.....(ii)

Resolviendo (i) , (ii):

$3y=2\Rightarrow y=2/3$

$x=1-y=1-(2/3)=1/3$

$\therefore\ 6x+3y=6(\frac{1}{3})+3(\frac{2}{3})=4.$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule el valor de la expresión $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) + arc\sec(\sqrt{2})$.

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{7\pi}{12}$ C) $\frac{5\pi}{12}$ D) $\frac{12\pi}{7}$ E) $\frac{12\pi}{5}$

Solución:

$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\beta = \operatorname{arc\,sec}\sqrt{2}$ $\cos\beta = \sqrt{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

$E = \alpha + \beta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

Rpta.: C

2. Determine el valor de la expresión $2\operatorname{arc\,tg}(\frac{1}{3}) - \operatorname{arc\,tg}(-\frac{1}{7})$.

A) B) C) D) $-\frac{\pi}{3}$ E)

Solución:

$$y = arc\,tg(\frac{1}{3}) + arc\,tg(\frac{1}{3}) + arc\,tg(\frac{1}{7}) \Rightarrow y = arc\,tg\,\frac{1}{3} + arc\ tg\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}}\right)$$

$$y = arc\ tg(\frac{1}{3}) + arc\ tg(\frac{1}{2}) \Rightarrow y = arc\ tg\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}\right) \qquad y = arc\ tg(1) = \frac{\pi}{4}$$

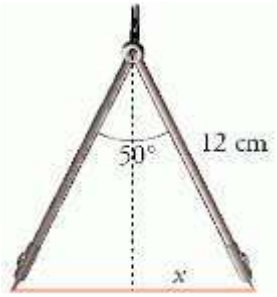
Rpta.: C

3. Los brazos de un compás miden 12cm y forman un ángulo de 50°. Si el radio de la circunferencia que puede trazarse en esa abertura es x cm, halle $36\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{12}\right)$.

A) 5π B) 2π

C) $\frac{5\pi}{2}$ D) 3π

E)



Solución:
De la figura

$$\text{sen}25° = \frac{x}{12}$$

$$\therefore x = 12\text{sen}25°$$

$$\text{arc sen}\left(\frac{x}{12}\right) = \frac{5\pi}{36}$$

$$36\,\text{arc sen}\,x = 5\pi$$

Rpta.: A

4. Halle el dominio de la función real f definida por $f(x) = \pi + 3\arccos\left(\frac{|x-4|}{3}\right)$.

A) $[1, 7]$ B) $[0, 7]$ C) $[1, 5]$ D) $[-7, 1]$ E) $[-1, 6]$

Solución:

Tenemos $-1 \le \frac{|x-4|}{3} \le 1 \Rightarrow -3 \le |x-4| \le 3 \Rightarrow |x-4| \ge -3 \wedge |x-4| \le 3$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \wedge -3 \le x-4 \le 3 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \wedge 1 \le x \le 7$

Luego, $x \in (\mathbb{R} \cap [1, 7]) = [1, 7] = \text{Dom}(f)$

Rpta.: A

5. Si $[a, b]$ y $[c, d]$ denotan el dominio y rango, respectivamente de la función f definida por $f(x) = 3\text{arcsen}(2x-3) + \text{arcsen}1$, halle el valor de $(a+b)\pi + c + d$.

A) 6π B) 3π C) 2π D) 5π E) 4π

Solución:

$\text{Dom}(f): -1 \le 2x-3 \le 1 \Rightarrow 2 \le 2x \le 4 \Rightarrow 1 \le x \le 2$

Luego $\text{Dom}(f) = [1, 2]$

$\text{Ran}(f): -\frac{\pi}{2} \le \text{arcsen}(2x-3) \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \le 3\text{arcsen}(2x-3) \le \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow -\pi \le 3\text{arcsen}(2x-3) + \frac{\pi}{2} \le 2\pi \Rightarrow -\pi \le f(x) \le 2\pi$

Luego, $\text{Ran}(f) = [-\pi, 2\pi]$

$$\therefore (a+b)\pi + c + d = 3\pi - \pi + 2\pi = 4\pi$$

Rpta.: E

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Halle el rango de la función real f definida por

$$f(x) = x \cdot \text{sen}(\text{arcsen}\, x) - 2\cos(\arccos x) + \frac{2\,\text{arcsen}1}{\pi}$$

A) $[0, 4]$ B) $\langle 0, 4]$ C) $[0, 4\rangle$ D) $[0, 3]$ E) $[0, 5]$

Solución:

Tenemos, $sen(arcsen\, x) = x,\ x \in [-1, 1] \wedge \cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1, 1]$

entonces $f(x) = x \cdot x - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Como $-1 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le (x-1)^2 \le 4$

Por consiguiente $Ran(f) = [0, 4]$

Rpta.: A

2. Sea f la función real definida por

$$f(x) = \text{arcsen}x + \frac{3\pi}{8},\ x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

Si el rango de f es $[a, b]$, calcule $b - a$.

A) $\frac{3\pi}{2}$ B) $-\frac{3\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $-\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{8}$

Solución:

Como $\frac{-1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-\pi}{4} \le arcsen\, x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{-\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} \le arcsen\, x + \frac{3\pi}{8} \le \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{8} \le f(x) \le \frac{5\pi}{8} \Rightarrow Ran(f) = [\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}] = [a, b]$

Luego, $b - a = \frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

Rpta.: C

3. Si el rango de la función real f definida por $f(x)=\dfrac{2\operatorname{arctg}x+\pi}{\operatorname{arctg}x}$, $x\in[1,\ \infty\rangle$, es $\langle a,\ b]$, halle $f(b-a-1)$.

A) 8 B) 9 C) 11 D) 6 E) 12

Solución:

Como $1\leq x$, entonces $\dfrac{\pi}{4}\leq arctg\,x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{4}{\pi}\geq\dfrac{1}{arctg\,x}>\dfrac{2}{\pi}\Rightarrow 4\geq\dfrac{\pi}{arctg\,x}>2$

$\Rightarrow 6\geq 2+\dfrac{\pi}{arctg\,x}>4$. Luego, $y\in\langle 4,\ 6]=Ran(f)=\langle a,\ b]$

$y\in\langle 4,\ 6]=Ran(f)=\langle a,\ b]$

$\therefore\ b-a-1=1\Rightarrow f(a-b-1)=f(1)=2+\dfrac{\pi}{\operatorname{arctg}1}=6$

Rpta.: D

4. Evaluar la expresión

$$\left(2\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}\right)\right)^2-\left(3\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}\right)\right)^2+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}\right).$$

A) -3 B) -2 C) -4 D) 2 E) 3

Solución:

Se E la expresión buscada

$$E=4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3}-9\left[1-\operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}\right)\right]+\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}.$$

$$E=3-9\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-4$$

Rpta.: C

5. Debido a que la Luna orbita la Tierra, se observan diferentes fases de la Luna durante el periodo de un mes. En la figura, t se llama ángulo de fase. La fase de la Luna se modela por $F(t)=\frac{1}{2}(1-\cos t)$ y da la fracción de la cara de la luna que esta iluminada por el Sol. Evaluar $G=F(\text{arc sen}(1))-F(\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}))$.

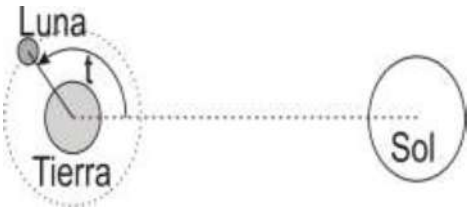
A) $\sqrt{2}/4$

B) $\sqrt{2}/2$

C) $\sqrt{2}/6$

D) $\sqrt{2}/3$

E) $2\sqrt{2}/5$



<u>Solución</u>:

$\text{arcsen}(1)=\frac{\pi}{2}$

$\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi}{4}$

$F(\pi/2)=\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$

$F(\pi/4)=\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$G=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Rpta.: A

6. Se encontró que la temperatura promedio en una ciudad, expresada en ºC se puede determinar mediante la función real f definida por $f(x)=\frac{1}{3}\text{arc sen}(\frac{\sqrt{3}x}{2})$, donde x denota el tiempo en meses. ¿Cuál es la temperatura promedio en el mes de enero?.

A) $\frac{\pi}{9}$ºC B) $\frac{\pi}{8}$ºC c) $\frac{\pi}{10}$ºC D) $\frac{\pi}{12}$ºC E) $\frac{\pi}{7}$ºC

Solución:

Si x=1 , enero

$\beta=\text{arcc sen}(\frac{\sqrt{3}(1)}{2})$

Entonces $\beta=\frac{\pi}{3}$

$f(x)=\frac{1}{3}\beta=\frac{1}{3}\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{9}$ºC.

Rpta.: A

7. Si $\langle c, d\rangle$ es el rango de la función real f definida por

$$f(x)=\arccos\left(\frac{8}{e^{3x}+8}-\frac{1}{2}\right),$$

halle $c+d$.

A) 3π B) π C) 2π D) -3π E) -3π

Solución:

$$e^{3x}+8>8\Rightarrow\frac{1}{e^{3x}+8}<\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{1}{e^{3x}+8}<\frac{1}{8}\Rightarrow 0<\frac{8}{e^{3x}+8}<1$$

$$\Rightarrow-\frac{1}{2}<\frac{8}{e^{3x}+8}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\Rightarrow\arccos(\frac{1}{2})<\arccos(\frac{8}{e^{3x}+8}-\frac{1}{2})<\arccos(-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{3}<f(x)<\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\text{Ran}(f)=\langle\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\rangle=\langle c, d\rangle$$

$$\therefore c+d=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi$$

Rpta.: B

8. Si $[c, d]$ es el rango de la función real f definida por

$$f(x)=\arccos^2 x + 2\pi\arccos x + 3\pi^2, \text{ halle } c + d.$$

A) $10\pi^2$ B) $8\pi^2$ C) $9\pi^2$ D) $11\pi^2$ E) $7\pi^2$

Solución:

$$f(x)= (\arccos x)^2 + 2\pi\arccos x + \pi^2 + 2\pi^2$$
$$= (\arccos x + \pi)^2 + 2\pi^2$$
$$0 \le \arccos x \le \pi \Rightarrow \pi \le \arccos x + \pi \le 2\pi$$
$$\Rightarrow \pi^2 \le (\arccos x + \pi)^2 \le 4\pi^2 \Rightarrow 3\pi^2 \le (\arccos x + \pi)^2 + 2\pi^2 \le 6\pi^2$$
$$\Rightarrow 3\pi^2 \le f(x) \le 6\pi^2 \Rightarrow \text{Ran}(f)=[3\pi^2, 6\pi^2]=[c, d]$$
$$\therefore c + d = 3\pi^2 + 6\pi^2 = 9\pi^2.$$

Rpta.: C

9. En la ecuación $\text{arcsen}\frac{5}{x} + \text{arcsen}\frac{12}{x} = \frac{\pi}{2}$, x denota la longitud del lado de un cuadrado en metros. Halle el área de la región limitada por el cuadrado.

A) 125m^2 B) 169m^2 C) 144m^2 D) 225m^2 E) 150m^2

Solución:

$$\frac{5}{x} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\frac{12}{x}\right) = \cos\left(\text{arcsen}\frac{12}{x}\right) = \sqrt{1-\frac{144}{x^2}}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{x} = \sqrt{1-\frac{144}{x^2}} \Rightarrow 25 = x^2 - 144 \Rightarrow x^2 = 169$$

Rpta.: B

10. Si $[a, b]$ es el dominio de la función real f definida por $f(x)=\sqrt{(\arccos\frac{x}{4})^2-\frac{\pi^2}{9}}$, halle $b-a$.

A) 7 B) 6 C) 5 D) –6 E) –7

Solución:

$$f(x)=\sqrt{(\arccos\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3})(\arccos\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3})}$$

$$x\in Dom(f) \Leftrightarrow (\arccos\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3})(\arccos\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3})\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \arccos\frac{x}{4}\leq -\frac{\pi}{3} \vee \frac{\pi}{3}\leq \arccos\frac{x}{4}\leq \pi$$

$$\Leftrightarrow \text{(no es posible)} \vee \frac{\pi}{3}\leq \arccos\frac{x}{4}\leq \pi$$

$$\frac{1}{2}\geq \frac{x}{4}\geq -1$$

$$2\geq x\geq -4$$

Luego, $Dom(f)=[-4, 2]=[a, b]$

$\therefore b-a=2-(-4)=6.$

Rpta.: B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El área de una plancha de aluminio está dada por la expresión $\frac{4}{\pi}(\text{arcsen}\frac{b}{2}-\text{arcsen}\frac{a}{2})m^2$. Si el intervalo $[a, b]$ denota el dominio de la función real g

definida por $g(x)=4\sqrt{4-x^2}$, y cada metro cuadrado de la plancha cuesta 200 soles, ¿cuánto se debe pagar por la plancha de aluminio?.

A) S/ 900 B) S/ 700 C) S/ 800 D) S/ 600 E) S/ 1 000

Solución:

$x\in \text{Dom}(g) \Leftrightarrow 4-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 4 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 2$

$\text{Dom}(g)=[-2, 2]=[a, b]$

Luego, $S=\frac{4}{\pi}(\text{arcsen}\frac{2}{2}-\text{arcsen}\frac{-2}{2})=\frac{4}{\pi}[\text{arcsen}1-\text{arcsen}(-1)]$

$=\frac{8}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=4 \Rightarrow$ Area de la plancha de aluminio es $4\,m^2$.

$\therefore$ El costo de la plancha es $=4(200)=800$ soles.

Rpta.: C

2. Si $[-b, -a]\cup[a, b]$ es el dominio de la función real f definida por

$$f(x)=9\,\text{arcsen}(9-x^2)-9\,\text{arccos}(\sqrt{x^2-9})+4\,\text{arctg}\,4x,$$

halle a^2+b^2.

A) 17 B) 15 C) 19 D) 18 E) 20

Solución:

$-1\leq 9-x^2\leq 1 \wedge 0\leq x^2-9\leq 1 \Leftrightarrow -10\leq -x^2\leq -8 \wedge 9\leq x^2\leq 10$

$\Leftrightarrow 8\leq x^2\leq 10 \wedge 9\leq x^2\leq 10 \Leftrightarrow 9\leq x^2\leq 10 \Leftrightarrow 9\leq x^2\leq 10$

$\Leftrightarrow 3\leq |x|\leq\sqrt{10}$

$D_f=[-\sqrt{10}, -3]\cup[3, \sqrt{10}]$

$\therefore a^2+b^2=\left(-\sqrt{10}\right)^2+3^2=19.$

Rpta.: C

3. Calcule el valor de la expresión

$$\text{sen}(\text{arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}))+\text{tg}^2(\text{arcsen}(-\frac{1}{2}))+\cos(3\,\text{arcsen}(\frac{1}{2})).$$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{5}{6}$

Solución:

$$\text{sen}(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}))+\text{tg}^2(\text{arcsen}(-\frac{1}{2}))+\cos(3\,\text{arcsen}(\frac{1}{2}))=$$

$$=\text{sen}(\frac{5\pi}{6})+\text{tg}^2(-\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{3\pi}{6})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0=\frac{5}{6}.$$

Rpta.: E

4. Si $[c, d\rangle$ es el rango de la función real f definida por

$$f(x)=4\,\text{arctg}(-1)-6\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})+6\,\text{arctg}(\frac{4x^2}{4x^2+3}),$$

halle $d-c$.

A) $\frac{3}{2}\pi$ B) 4π C) 2π D) $-\frac{3}{2}\pi$ E) -3π

Solución:

$$f(x)=4(-\frac{\pi}{4})-6(\frac{5\pi}{6})+6\,\text{arctg}(\frac{4x^2}{4x^2+3})=-6\pi+6\,\text{arctg}(\frac{4x^2}{4x^2+3})$$

$$=-6\pi+6\,\text{arctg}(1-\frac{3}{4x^2+3})$$

Calculando el rango de f :

$$0\le 4x^2 \Rightarrow 3\le 4x^2+3 \Rightarrow 0<\frac{1}{4x^2+3}\le\frac{1}{3}\Rightarrow 0>\frac{-3}{4x^2+3}\ge -1$$

$$\Rightarrow 0\le 1-\frac{3}{4x^2+3}<1\Rightarrow \text{arctg}(0)\le \text{arctg}(1-\frac{3}{4x^2+3})<\frac{\pi}{4}=\text{arctg}(1)$$

$$\Rightarrow 0\le \text{arctg}(1-\frac{3}{4x^2+3})<\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0\le 6\,\text{arctg}(1-\frac{3}{4x^2+3})<\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -6\pi\le -6\pi+6\,\text{arctg}(1-\frac{3}{4x^2+3})<-\frac{9\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Ran}_f=[-6\pi\,;-\frac{9\pi}{2}\rangle=[c, d\rangle$$

$$\therefore d-c=-\frac{9\pi}{2}+6\pi=\frac{3\pi}{2}.$$

Rpta.: A

5. Para una exposición en un simposio de ciencias, se presenta una gigantografía de forma rectangular cuyas dimensiones son $L = \text{sen}\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ y $P = \cos\left(\text{arcsen}\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, L y P en cm. ¿Cuál es el número que representa $\sqrt{130}(L)(P)$?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 7

<u>Solución</u>:

Sean $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\beta = \text{arcsen}\frac{3}{\sqrt{10}}$,

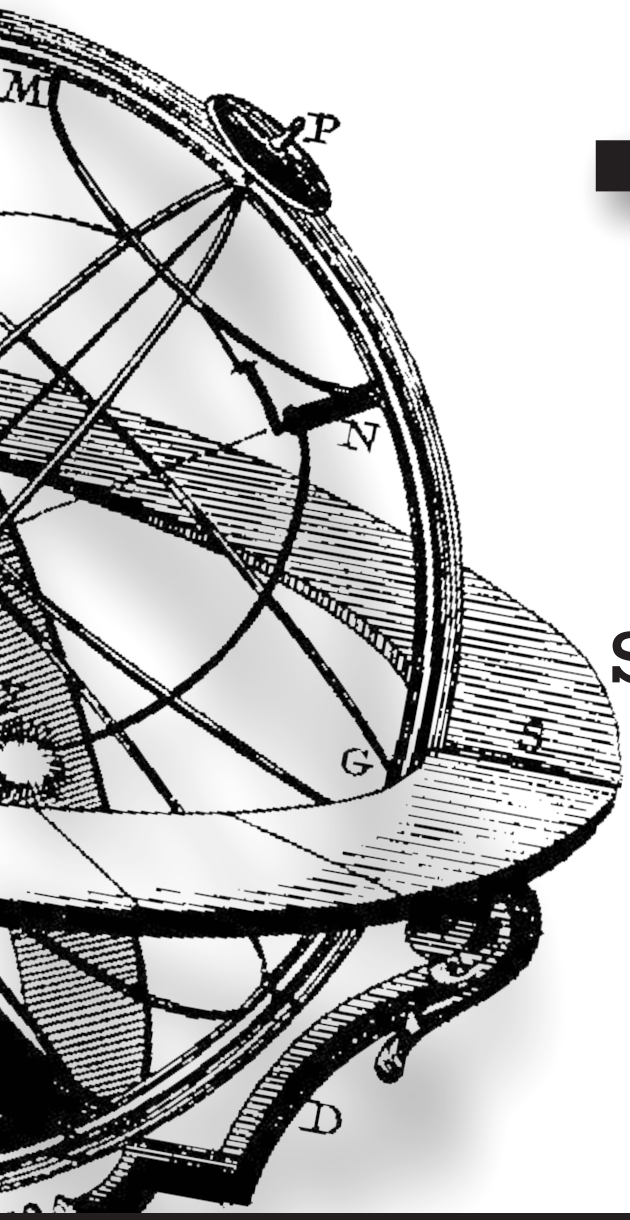
entonces $LP = \text{sen}\,\alpha.\cos\beta = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{130}}$

$\therefore \sqrt{130}\,LP = 3\,\text{cm}^2$

Rpta.: C

TRIGONOMETRÍA

MANUAL DE PRACTICAS Y EJERCICIOS



18

semana

pre SAN MARCOS

Manhattan Editores

Trigonometría

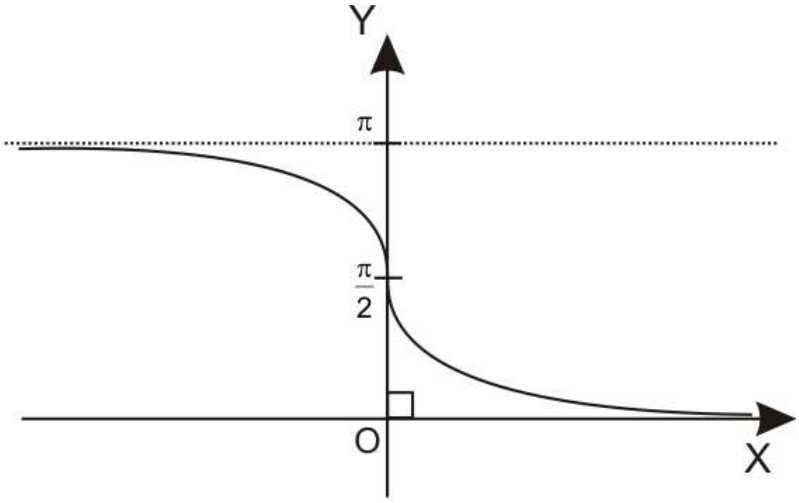
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS II

FUNCIÓN INVERSA DE LA COTANGENTE (O ARCO COTANGENTE)

Es la función f : $\mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle$ definida por y = arccotx si y solo si x = coty.

Dom(f) = $\mathbb{R}$

Ran(f) = $\langle 0, \pi \rangle$

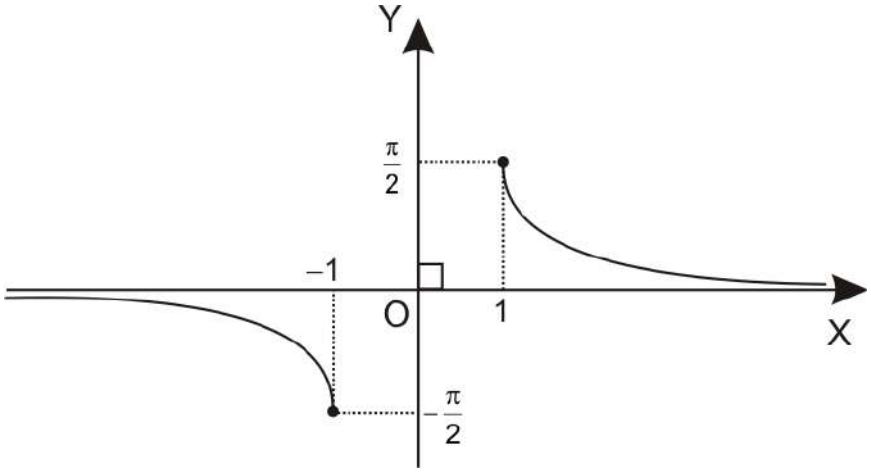


FUNCIÓN INVERSA DE LA COSECANTE (O ARCO COSECANTE)

Es la función f: $\langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty \rangle \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right]$ definida por y = arc cscx si y solo si x = cscy.

Dom(f) = $\langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty \rangle$

Ran(f) = $\left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right]$

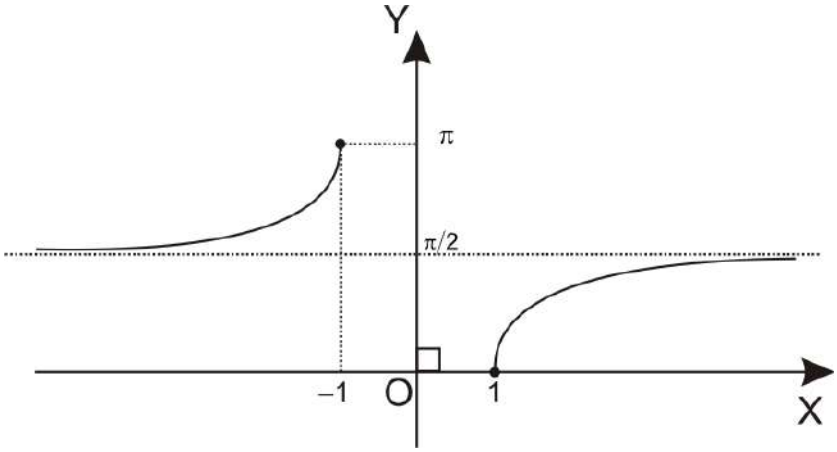


FUNCIÓN INVERSA DE LA SECANTE (O ARCO SECANTE)

Es la función f: $\langle -\infty,-1]\cup[1,+\infty\rangle \rightarrow \left[0,\frac{\pi}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{\pi}{2},\pi\right]$ definida por y = arcsecx si y solo si x = secy.

Dom(f) = $\langle -\infty,-1]\cup[1,+\infty\rangle$

Ran(f) = $\left[0,\frac{\pi}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{\pi}{2},\pi\right]$



Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $\operatorname{arccsc}(-x)$, $\operatorname{arcsec}(-x)$ y $\operatorname{arcsec}(x)$ son términos consecutivos de una progresión aritmética en el orden mencionado, determine la razón de dicha progresión.

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$

Solución:
Del enunciado:

$2\operatorname{arcsec}(-x)=\operatorname{arccsc}(-x)+\operatorname{arcsec}(x)$, Sabemos que: $\operatorname{arccsc}(x)+\operatorname{arcsec}(x)=\frac{\pi}{2}$

$2\lfloor \pi-\operatorname{arcsec}(x)\rfloor=-\operatorname{arccsc}(x)+\operatorname{arcsec}(x)$

$2\left[\pi-\operatorname{arcsec}(x)\right]=2\operatorname{arcsec}(x)-\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsec}(x)=\frac{5\pi}{8}$

Luego:

$r=\operatorname{arcsec}(x)-\operatorname{arcsec}(-x)$

$r=2\operatorname{arcsec}(x)-\pi$

$\therefore$ La razón es $\frac{\pi}{4}$

Rpta.: C

2. Si se cumple que $\arctan(x)+\operatorname{arcsec}(x+2)=k\pi$, $k\in Z$, calcule el valor de $\cot\lfloor \arctan(x+4)\rfloor$.

A) $\frac{3}{14}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{3}{11}$ D) $\frac{4}{13}$

Solución:

$$\arctan(x)+\operatorname{arcsec}(x+2)=k\pi,\quad k\in Z$$
$$(x+2\geq 1\quad\vee\quad x+2\leq -1)\quad\wedge\quad x\in R$$
$$x\in\langle -\infty\,;-3]\ \cup\ [-1\,;\ +\infty\rangle$$

Del enunciado:

$$\tan[\arctan(x)]=\tan[k\pi-\operatorname{arcsec}(x+2)]$$
$$x=-\tan[\operatorname{arcsec}(x+2)]$$
$$x^2=\sec^2[\operatorname{arcsec}(x+2)]-1=(x+2)^2-1\qquad\Rightarrow\quad x=-\frac{3}{4}$$

Luego:

$$E=\cot\left[\arctan\left(\frac{13}{4}\right)\right]=\cot\left[\operatorname{arccot}\left(\frac{4}{13}\right)\right]$$
$$E=\frac{4}{13}$$

Rpta.: D

3. Dos de los lados de un triángulo T miden $\left|4\cos[2\operatorname{arcsen}(0,75)+\arccos(0,75)]\right|$ dam y

$$\left|\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\csc\left(2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3\cdot\operatorname{arcsec}\left(\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)\right)\right|\text{ dam.}$$

Si el ángulo formado por estos dos lados es $\frac{\pi}{3}$, calcule el área de la región triangular T.

A) $3\sqrt{3}$ dam^2 B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ dam^2 C) $\frac{15}{2}$ dam^2 D) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ dam^2

Solución:

Resolvemos calculando el primer lado:

$$\left|4\cos\left(\operatorname{arcsen}(0,75)+\underbrace{\operatorname{arcsen}(0,75)+\arccos(0,75)}_{\pi/2}\right)\right|=\left|-4\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(0,75))\right|=3\text{ dam.}$$

Calculando el segundo lado

$$\left|\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\csc\left(2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3\cdot\operatorname{arcsec}\left(\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)\right)\right|$$

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}\wedge\operatorname{arcsec}\left(\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{12}\ \wedge\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$
$$=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\Rightarrow\left|\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\times\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\right|=4\text{ dam.}$$

Luego $\text{Área}_{\Delta} = \dfrac{3 \times 4 \times \text{sen}\dfrac{\pi}{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ dam^2.

Rpta.: A

4. Juan compró un automóvil en 12 000 soles y después de un año lo vendió en $(100a + 9800)$ soles. Si el valor de a satisface la ecuación $\text{arccot}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = a.\text{arccot}\sqrt{3}$, determine la cantidad de dinero que perdió Juan en dicha venta.

A) 1500 soles
B) 2000 soles
C) 1900 soles
D) 1800 soles

Solución:

$$\text{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = a.\text{arccot}\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = a \cdot \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = 2$$

Luego, el precio venta es de $(100a + 9800) = 200 + 9800 = 10000$ soles

$\therefore$ Perdió $12000 - 10000 = 2000$ soles.

Rpta.: B

5. Determine el valor de $\text{arc cot}\,1 + \text{arc cot}\left(-\dfrac{1}{3}\right) + \text{arc cot}\,2$.

A) 5π
B) 3π
C) 0
D) π

Solución:

$$E = \text{arc cot}\,1 + \text{arc cot}\left(-\frac{1}{3}\right) + \text{arc cot}\,2$$

$$E = \frac{\pi}{4} + \pi - \text{arc cot}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{arc cot}\,2$$

$$E = \pi + \left(\frac{\pi}{4} - \arctan(3) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$E = \pi + \left(\frac{\pi}{4} - \left(\arctan(3) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \pi + \left(\frac{\pi}{4} - (\alpha - \beta)\right)$$

$$\alpha = \arctan 3$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \tan(\alpha - \beta) = 1,\ \alpha \text{ y } \beta \text{ agudos entonces } \alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow E = \pi + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

Rpta.: D

6. Determine el rango de la función real f definida por

$$f(x)=(\operatorname{arc\,cot} x+\arctan x)^2-(\operatorname{arc\,cot} x-\arctan x)^2.$$

A) $\left\langle -2\pi^2,\ \dfrac{\pi^2}{4}\right]$ B) $\left\langle -\pi^2,\ \dfrac{\pi^2}{4}\right]$

C) $\left\langle -2\pi^2,\ \dfrac{\pi^2}{2}\right]$ D) $\left\langle -\pi^2,\ \dfrac{\pi^2}{2}\right]$

Solución:

$$f(x)=(\operatorname{arc\,cot} x+\arctan x)^2-(\operatorname{arc\,cot} x-\arctan x)^2$$

$$f(x)=4.\operatorname{arc\,cot} x\cdot\arctan x=4\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\arctan x$$

$$f(x)=-4(\arctan x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{\pi^2}{4}$$

Como $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan x<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow -\dfrac{3\pi}{4}<\arctan x-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 0\le\left(\arctan x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2<\dfrac{9\pi^2}{16}$

$$-\frac{9\pi^2}{4}<-4\left(\arctan x-\frac{\pi}{4}\right)^2\le 0\quad\Rightarrow\quad -2\pi^2<f(x)\le\frac{\pi^2}{4}$$

Rpta.: A

7. Calcule el valor de $\operatorname{arc\,csc}(\sqrt{10}A)$, siendo $A=\cos[\operatorname{arccot}(-\frac{1}{3})]$.

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) $-\dfrac{\pi}{3}$ C) $-\dfrac{\pi}{4}$ D) $-\dfrac{\pi}{2}$

Solución:

Sea $\alpha=\operatorname{arccot}(-\frac{1}{3})\Rightarrow\cot\alpha=-\frac{1}{3}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow A=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\therefore\ \operatorname{arc\,csc}(\sqrt{10}\,A)=\operatorname{arc\,csc}(-1)=-\dfrac{\pi}{2}.$

Rpta.: D

8. Un escolar para ir a su colegio de lunes a viernes, recibe de su padre la cantidad de $3x-12y+4$ soles semanalmente, donde x e y satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\operatorname{arc\,cot}(2x+y)=\dfrac{3\pi}{4}\\ \operatorname{arc\,sec}(x-y)=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}.$$

Si gasta las cuatro quintas partes del dinero que le da su padre, cuánto ahorra el escolar a la semana.

A) 4 soles B) 5 soles C) 3 soles D) 6 soles

Solución:

$\operatorname{arc\,cot}(2x+y)=\frac{3\pi}{4} \Rightarrow 2x+y=-1 \cdots(1)$

$\operatorname{arc\,sec}(x-y)=\frac{\pi}{3} \Rightarrow x-y=2 \cdots(2)$

Resolviendo simultáneamente el sistema de ecuaciones

$x=\frac{1}{3} \wedge y=-\frac{5}{3}$

Recibe: $3(\frac{1}{3})-12(-\frac{5}{3})+4=25$ soles

Luego, ahorra: $\frac{1}{5}(25)=5$ soles.

Rpta.: B

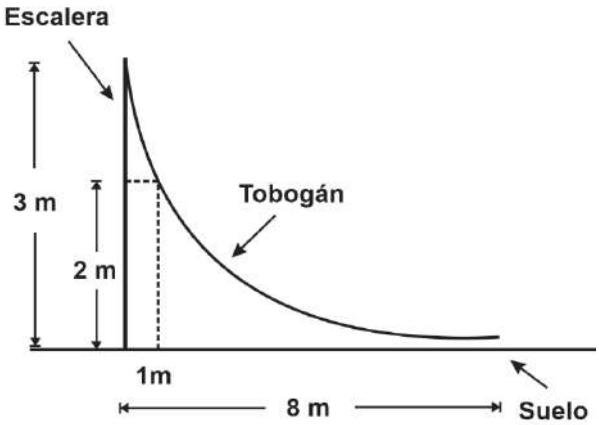
9. En la figura, se muestra el perfil de la estructura de un tobogán que está descrita por la función real f definida por $f(x)=A\operatorname{arc\,csc}(Bx+C)$; $B>0$. Si se considera la base de la escalera como el origen de coordenadas, determine el valor de $\pi A+\sqrt{3}(B+C)$.

A) 10

B) 6

C) 8

D) 9



Solución:

Sea $y=A\operatorname{arc\,csc}(Bx+C)$ la función buscada.

Como:

$Bx+C\geq 1 \rightarrow x\geq\frac{1-C}{B} \rightarrow \frac{1-C}{B}=0 \rightarrow C=1$

Luego:

$3=A\operatorname{arc\,csc}(1) \rightarrow A=\frac{6}{\pi}$

$2=\frac{6}{\pi}\operatorname{arc\,csc}(B+1) \rightarrow B+1=\frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow B=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

Por consiguiente $\pi A+\sqrt{3}(B+C)=\pi(\frac{6}{\pi})+\sqrt{3}[(\frac{2}{\sqrt{3}}-1)+1]=6+2=8$.

Rpta.: C

10. Si $\langle c, d\rangle$ es el rango de la función real f definida por

$$f(x)=\frac{5\pi}{\operatorname{arccot}(2x+3)+3\pi}+2,$$

halle $4c+3d$.

A) 22 B) 25 C) 24 D) 28

Solución:

$0<\operatorname{arccot}(2x+3)<\pi \Rightarrow 3\pi<\operatorname{arccot}(2x+3)+3\pi<4\pi$

$\Rightarrow \frac{1}{4\pi}<\frac{1}{\operatorname{arccot}(2x+3)+3\pi}<\frac{1}{3\pi} \Rightarrow \frac{5}{4}<\frac{5\pi}{\operatorname{arccot}(2x+3)+3\pi}<\frac{5}{3}$

$\Rightarrow \frac{13}{4}<\frac{5\pi}{\operatorname{arccot}(2x+3)+3\pi}+2<\frac{11}{3}$

$\Rightarrow \operatorname{Ran}(f)=\langle\frac{13}{4},\frac{11}{3}\rangle=\langle c, d\rangle$

$\therefore 4c+3d=4(\frac{13}{4})+3(\frac{11}{3})=24.$

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $\operatorname{arcsec}(-1)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arccot}(0)$.

ii. $\operatorname{arccsc}(\pi-5)=\pi-\operatorname{arccsc}(5)$.

iii. Existe $x\in R$ tal que $\arctan x+\operatorname{arccot}(-x)=\frac{\pi}{2}$

A) VFV B) FVV C) FFV D) VFF

Solución:

i. $\operatorname{arcsec}(-1)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arccot}(0) \Rightarrow \pi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$. ……(V)

ii. $\operatorname{arccsc}(\pi-5)=\pi-\operatorname{arccsc}(5) \Rightarrow \pi-5=5$ … .. (F)

iii. Para $x=0$, $\arctan 0+\operatorname{arccot} 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ ……(V)

Rpta.: A

2. Si $\alpha = \operatorname{arccsc}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ y $\theta = \operatorname{arccsc}\left(\dfrac{1+\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\right)$, calcule $\sec 2\theta$.

A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 1

Solución:

se tiene que $\csc\alpha = \sqrt{6}+\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{12}$

Por otra parte $\dfrac{1+\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = \csc 2\alpha \Rightarrow \theta = \operatorname{arccsc}\left(\dfrac{1+\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\right) = 2\alpha \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore \sec 2\theta = \sec\dfrac{\pi}{3} = 2.$

Rpta.: C

3. Si $\langle c, d\rangle$ es el complemento del dominio de la función real f definida por $f(x) = \dfrac{\pi}{3}\operatorname{arcsec}(|x-2|)+5$, determine el valor de c + d.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 5

Solución:

$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow |x-2| \geq 1 \Leftrightarrow (x-2 \leq -1 \vee x-2 \geq 1) \Leftrightarrow (x \leq 1 \vee x \geq 3)$

$(\text{Dom}(f))' = \langle 1, 3\rangle = \langle c, d\rangle$

$\therefore c+d = 4.$

Rpta.: B

4. Si $\langle a, b\rangle$ es el complemento del dominio de la función real f definida por

$$f(x) = 5\operatorname{arcsec}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \sqrt{3}\operatorname{arccsc}\left(\frac{x-3}{4}\right) + \operatorname{sen}x,$$

Halle el valor de la expresión a^2+b^2.

A) 30 B) 60 C) 40 D) 50

Solución:

$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-2}{2} \leq -1 \vee \dfrac{x-2}{2} \geq 1\right) \wedge \left(\dfrac{x-3}{4} \leq -1 \vee \dfrac{x-3}{4} \geq 1\right)$

$\Leftrightarrow (x \leq 0 \vee x \geq 4) \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 7)$

$\Leftrightarrow (x \leq 0 \vee x \geq 4) \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 7)$

$\text{Dom}(f) = \langle -\infty, -1] \cup [7, +\infty\rangle \Rightarrow (\text{Dom}(f))' = \langle -1, 7\rangle = \langle a, b\rangle$

$\therefore a^2+b^2 = 1+49 = 50.$

Rpta.: D

5. La edad actual de Pedro es $\frac{6x^2}{\pi}\text{arcsec}(-2)$ años, donde x es la solución de la ecuación $\text{arc}\cot\left(\frac{x-1}{x-3}\right)+\text{arc}\cot\left(\frac{x+1}{x+3}\right)=\frac{\pi}{4}$. Halle la edad de Pedro para el año 2052.

A) 62 años B) 60 años C) 52 años D) 65 años

<u>Solución</u>:

Se tiene que $\frac{x-1}{x-3}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\text{arc}\cot\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\right)=\frac{\cot\left(\text{arc}\cot\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\right)+1}{\cot\left(\text{arc}\cot\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\right)-1}$

$$=\frac{\frac{x+1}{x+3}+1}{\frac{x+1}{x+3}-1}$$

$\Rightarrow \frac{x-1}{x-3}=\frac{2x+4}{-2}\Rightarrow \frac{x-1}{x-3}=-(x+2)\Rightarrow 1-x=(x+2)(x-3)$

$\Rightarrow x^2=7.$

Luego, la edad de Pedro:

$\frac{6x^2}{\pi}\text{arc}\sec(-2)=\frac{6(7)}{\pi}(\frac{2\pi}{3})=28$ años la edad actual

$\therefore$Para 2052, Pedro tendrá 60 años.

Rpta.: B

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Calcule el valor de la expresión

$$\operatorname{arc\,cot}\left\{\frac{25}{7}\cos\left[\operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{4}{3}\right)+\operatorname{arc\,tan}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\right\}+\frac{\pi\operatorname{arc\,sec}\sqrt{2}}{2\operatorname{arc\,csc}1}\ .$$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{3\pi}{4}$

Solución:

Considerando: $\operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{4}{3}\right)=\alpha$ y $\operatorname{arc\,tan}\left(-\frac{3}{4}\right)=\beta$

$\Rightarrow\ \alpha\in \text{IIC}: \operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}$ y $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ $\wedge$ $\beta\in \text{IVC}: \operatorname{sen}\beta=-\frac{3}{5}$ y $\cos\beta=\frac{4}{5}$

Si:

$$A=\operatorname{arc\,cot}\left\{\frac{25}{7}\cos\left[\operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{4}{3}\right)+\operatorname{arc\,tan}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\right\}+\frac{\pi\operatorname{arc\,sec}\sqrt{2}}{2\operatorname{arc\,csc}1}$$

$$A=\operatorname{arc\,cot}\left\{\frac{25}{7}\cos[\alpha+\beta]\right\}+\frac{\pi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\ ,$$

$$\cos[\alpha+\beta]=\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{7}{25}$$

$$A=\operatorname{arc\,cot}\left\{\frac{25}{7}\left(-\frac{7}{25}\right)\right\}+\frac{\pi}{4}$$

$$A=\pi$$

Rpta.: B

2. Si n es el número de soluciones de la ecuación $\operatorname{arc\,csc}(\operatorname{sen}x)=x$, y α es una de sus soluciones; calcule el valor de $\cos\alpha+n\operatorname{sen}^2\alpha$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

$$\operatorname{arccsc}(\operatorname{sen}x) = x$$

Solución:

Como: ……. (1)

Sea $a = \operatorname{sen}x$ …… (2)

Reemplazando en (1):

$$\operatorname{arccsc}(a) = x$$

$$\Rightarrow \quad a = \csc x \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

De (2) y (3): $\operatorname{sen}x = \csc x$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \cos x = 0$$

Luego:

$$E = \cos\alpha + n\operatorname{sen}^2\alpha = 0 + 2(1) = 2$$

Rpta.: C

3. Halle la suma de todos los enteros que pertenecen al dominio de la función real f, definida por $f(x) = \operatorname{arccsc}(2x+6) + \operatorname{arccot}\sqrt{9-x^2}$.

A) 3 B) 2 C) 1 D) 0

Solución

Dominio:

$$(2x+6 \le -1 \vee 1 \le 2x+6) \ \wedge (9 - x^2 \ge 0)$$

$$(\ 2x \le -7 \ \vee \ -5 \le 2x) \ \wedge (0 \ge x^2 - 9)$$

$$(x \le -\frac{7}{2} \vee -\frac{5}{2} \le x) \ \wedge (-3 \le x \le 3)$$

$$\rightarrow -\frac{5}{2} \le x \le 3$$

suma de enteros $= 3$.

Rpta.: A

4. Juan observa la base de un edificio con un ángulo de depresión $\theta = \operatorname{arccsc}(\frac{7}{3})$. Si Juan mide 1,80 cm; halle la altura del edificio si el ángulo de observación es de 90°.

A) 9,8 m B) 8,8 m C) 10,8 m D) 12,8 m

Solución:

$\Rightarrow$

Tenemos $\theta = \text{arccsc}(\frac{7}{3})$ $\qquad \csc\theta = \frac{7}{3}$

Por otro lado, tenemos que

$$AC = (1{,}8)\csc\theta \text{ m} \qquad AC = 4{,}2 \text{ m}$$

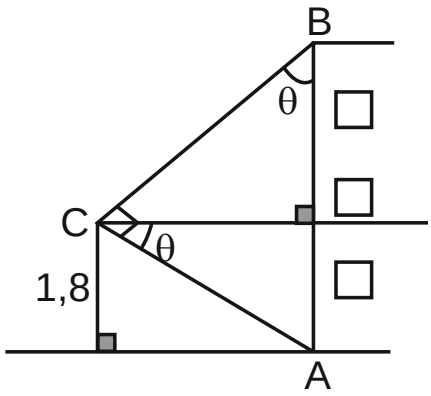
Luego

$$\text{altura} = AC.\csc\theta \text{ m}$$

Entonces

$$\text{altura} = 9{,}8 \text{ m}$$

Por tanto, la altura del edificio es 9.8 m.



Rpta.: A

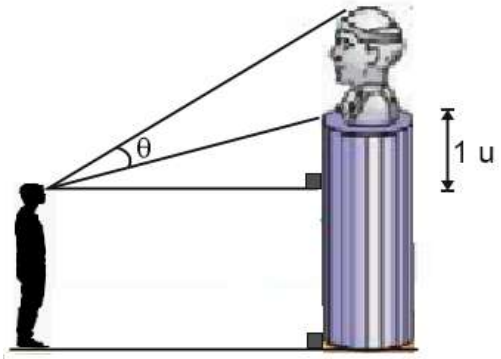
5. Juan observa un pedestal con retrato (como se muestra en la figura) con un ángulo de elevación $\text{arc}\cot\left(\frac{11}{3}\right)$. Si la distancia de Juan al pedestal es 8 u, halle la tangente del ángulo de observación θ.

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{7}$

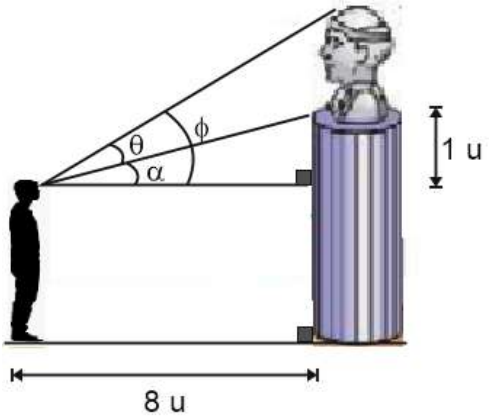
C) 7

D) 5



Solución:

Sea $\phi = \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{11}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \cot\phi = \frac{11}{3}$



Asi, tenemos:

$$\theta = \phi - \alpha$$

Entonces

$$\cot(\theta) = \cot(\phi - \alpha)$$

$$\cot(\theta) = \frac{\cot(\phi)\cot(\alpha) + 1}{\cot(\alpha) - \cot(\phi)}$$

$$\cot(\theta) = \frac{\left(\frac{11}{3}\right)8 + 1}{8 - \frac{11}{3}} = \frac{\frac{91}{3}}{\frac{13}{3}}$$

$$\cot(\theta) = 7$$

Luego: $\tan(\theta) = \frac{1}{7}$. **Rpta.: B**

π

6. Si w es la solución de la ecuación: $\operatorname{arc\,cot}(-x) + \operatorname{arc\,sec}(-1) = 2x - \operatorname{arc\,cot}(x)$, calcule el valor de $2\operatorname{arc\,sec}(\sec 2w)$.

A) 0 B) 2π C) D) 4π

Solución:

Como: $\underbrace{\operatorname{arc\,cot}(-x) + \operatorname{arc\,cot}(x)} + \operatorname{arc\,sec}(-1) = 2x$

$$\pi \quad + \quad \pi \quad = 2x$$

Luego: $w = \pi$

$\Rightarrow \quad 2\operatorname{arc\,sec}(\sec 2w) = 2\operatorname{arc\,sec}(\sec 2\pi) = 2\operatorname{arc\,sec}(1) = 0$

Rpta.: A

7. Se desea construir una rampa para discapacitados en la entrada de un hospital. Si el ángulo de inclinación de dicha rampa está determinado por la función $\theta(x) = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,cot}\left(\sqrt{x-2}\right) + \frac{\pi}{6}$, halle el máximo ángulo de inclinación.

A) $\frac{7\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{24}$ C) $\frac{7\pi}{24}$ D) $\frac{5\pi}{12}$

Solución:

Veamos su dominio $x-2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\geq 2$, $\text{Dom}(\theta)=\left[2,\infty\right\rangle$

Ahora, como $x\in\left[2,\infty\right\rangle$

tenemos:

$$0<\text{arc}\cot\left(\sqrt{x-2}\right)\leq\frac{\pi}{2}$$
$$0<\frac{1}{4}\text{arc}\cot\left(\sqrt{x-2}\right)\leq\frac{\pi}{8}$$
$$\frac{\pi}{6}<\frac{1}{4}\text{arc}\cot\left(\sqrt{x-2}\right)+\frac{\pi}{6}\leq\frac{7\pi}{24}$$
$$\frac{\pi}{6}<\theta(x)\leq\frac{7\pi}{24}$$

Entonces

$$\theta_{max}(x)=\frac{7\pi}{24}$$

Rpta.: C

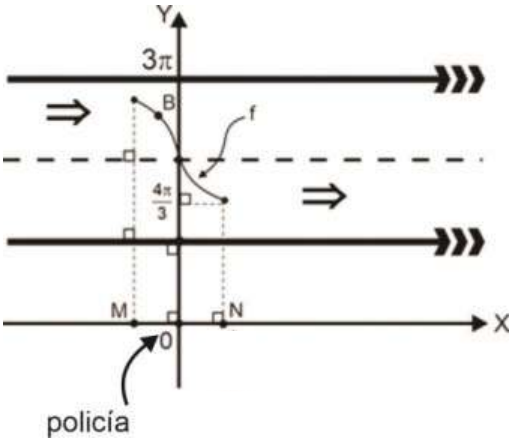
8. En la figura, la gráfica de $f(x)=2\text{arc}\cot(Ax)+\pi$; $x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, representa el recorrido de un auto al cambiar de carril en una carretera. Si $OM=ON$, $B\left(-\frac{1}{2};y\right)$ y un policía de tránsito se encuentra ubicado en el origen de coordenadas (el sistema de referencia local se encuentra en metros), determine el doble de la distancia entre el punto B del recorrido de dicho auto y el policía de tránsito.

A) $\sqrt{25\pi^2+1}$ m

B) $\sqrt{5\pi^2+1}$ m

C) $5\sqrt{\pi^2+1}$ m

D) $\sqrt{25\pi+1}$ m



Solución:

De la figura:

$$\frac{4\pi}{3} = 2\text{arc}\cot\left(A\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi$$

$$\frac{\pi}{6} = \text{arc}\cot\left(A\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\cot\frac{\pi}{6} = A\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 = A$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 2\text{arc}\cot(2x) + \pi$$

Luego:

$$y = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = 2\,\text{arc}\cot(-1) + \pi$$

$$y = 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \pi \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B\left(-\frac{1}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad d(B;O) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \quad 2d(B;O) = \sqrt{1+25\pi^2} \ \text{ m}$$

Rpta.: A

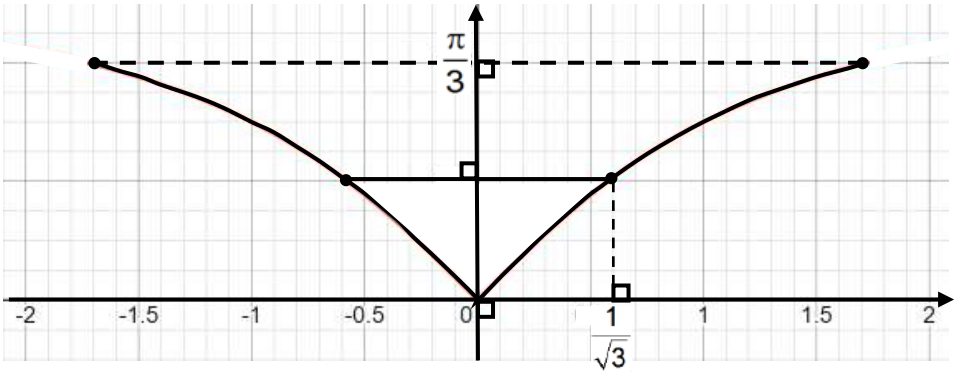
9. En la figura se representa la sección transversal de la parte superior de una copa con vino (región sombreada). Si la sección transversal de dicha copa está determinada por la función $f(x) = A + B\,\text{arc}\cot|x|\,;x \in \left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$, calcule la altura del nivel del vino (con respecto del eje X). El sistema de referencia está dado en decímetros.

A) $\frac{\pi}{6}$ dm

B) $\frac{\pi}{3}$ dm

C) $\frac{\pi}{4}$ dm

D) $\frac{\pi}{2}$ dm



Solución:

Como: $y = A + B\operatorname{arccot}|x|$, de la figura se tiene:

i) $0 = A + B\operatorname{arccot}|0|$

$0 = A + B.\frac{\pi}{2}$ ..... (1)

ii) $\frac{\pi}{3} = A + B\operatorname{arccot}\left(\sqrt{3}\right)$

$\frac{\pi}{3} = A + B.\frac{\pi}{6}$ ..... (2)

Resolviendo (1) y (2):

$$A = \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad B = -1 \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}|x|$$

Luego:

$$H = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Rpta.: A

10. Se tienen dos automóviles A y B los cuales siguen las trayectorias descritas por las gráficas de las funciones $d(t) = \operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{t+4}}{2}\right)$ y $m(t) = \arctan\left(\sqrt{\frac{t}{t+2}}\right)$ donde t es el número de horas después de las 11 a.m. Si ambos automóviles parten a las 11 a.m., ¿A qué hora se encontrarán otra vez?

A) 12 pm B) 2 pm C) 1 pm D) 3 pm

Solución:

Sea t el tiempo en que se encuentran por primera vez

Entonces $\operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{t+4}}{2}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{t}{t+2}}\right)$, $t \geq 0$

Sea, $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{\sqrt{t+4}}{2}\right)$ y $\alpha = \arctan\left(\sqrt{\frac{t}{t+2}}\right) \Rightarrow$ $\sec\theta = \frac{\sqrt{t+4}}{2}$ y $\tan\alpha = \sqrt{\frac{t}{t+2}}$

tenemos: $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\theta$

Entonces $1 + \left(\sqrt{\frac{t}{t+2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{t+4}}{2}\right)^2$ $t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t=0 \vee t=2$

Por tanto, se encontrarán a la 1pm.

Rpta.: C

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones, en el orden indicado:

i) Si $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, entonces $\text{arcsen}(\text{sen}x) = \pi - x$.

ii) Si $f(x) = \pi + \arccos x + \text{arc}\sec x$, entonces $\text{Dom}(f) = \varnothing$.

iii) Si $g(x) = \text{arc}\sec x$; $x \in \langle 2;+\infty\rangle$, entonces $\text{Ran}(g) = \left\langle \frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\rangle$.

A) VFV B) VVV C) VFF D) FFV

Solución:

Del dato:

i) (**V**) Como : $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \text{arcsen}\left(\text{sen}[\pi - x]\right) = \pi - x$$

$$\Rightarrow \quad \text{arcsen}(\text{sen}x) = \pi - x$$

ii) (**F**) $x \in \text{Dom}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x \in [-1;1] \right) \wedge \left(x \in \langle -\infty;-1] \cup [1;+\infty\rangle\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$

Luego $\text{Dom}(f) \neq \varnothing$

iii) (**V**) Como: $2 < x \quad \Rightarrow \quad \text{arc}\sec 2 < \text{arc}\sec x < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} < \text{arc}\sec x < \frac{\pi}{2}.$$

Rpta.: A

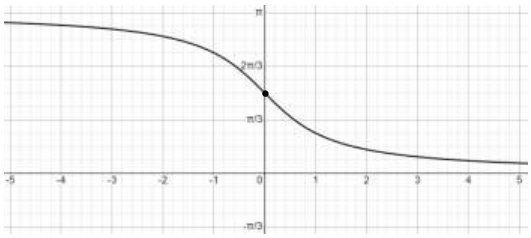
2. Sean f y g dos funciones reales definidas por $f(x) = \left|\text{arc}\csc x\right|$ y $g(x) = \text{arc}\cot x$.
Si n es el número de puntos de intersección de las gráficas de f y g, calcule el valor de $2n+1$.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7

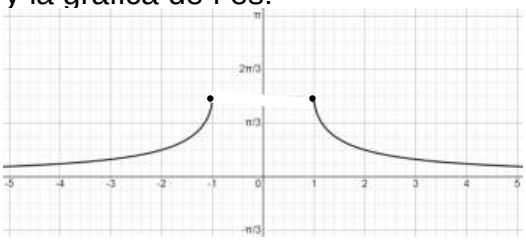
Solución:

Como:

La gráfica de g es:



y la gráfica de f es:



Para determinar los puntos de intersección de las gráficas:

$$|\operatorname{arc\,csc} x| = \operatorname{arc\,cot} x$$

Entonces $\operatorname{arc\,csc} x = \operatorname{arc\,cot} x$ (Por la información de las gráficas $x > 1$)

Sea: $\operatorname{arc\,csc} x = \operatorname{arc\,cot} x = \theta$

Entonces $x = \csc\theta = \cot\theta$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta \neq 0 \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

Luego, las gráficas de las funciones f y g no se intersectan en ningún punto, es decir $n = 0$.

$\Rightarrow \quad 2n + 1 = 1.$

Rpta.: A

3. Luis compró un terreno en 40 000 soles y después de tres años lo vendió en $\frac{25\,000}{x}$ soles. Si x satisface la ecuación $\operatorname{arc\,sec}(2x+1) - \operatorname{arc\,csc}(2x+1) = \frac{\pi}{6}$, ¿cuánto ganó Luis en la venta de dicho terreno?

A) 15 000 soles
B) 14 000 soles
C) 12 000 soles
D) 10 000 soles

<u>Solución</u>:

Del dato:

$$\operatorname{arc\,sec}(2x+1) - \operatorname{arc\,csc}(2x+1) = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,csc}(2x+1) - \operatorname{arc\,csc}(2x+1) = \frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{arc\,csc}(2x+1) = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad 2x+1 = \csc\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Luis compró el terreno en 40 000 soles y lo vendió en $\frac{25000}{x}$ soles, es decir 50 000 soles.

Por lo tanto, ganó 10 000 soles.

Rpta.: D

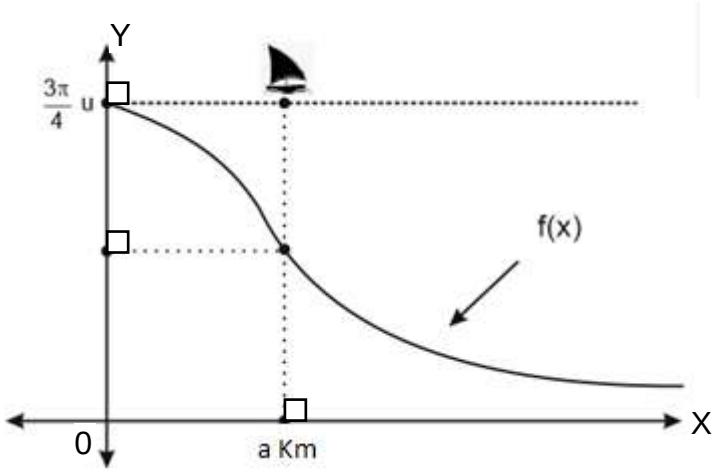
4. En la figura se muestra la vista lateral de la costa de una ciudad. La función $f(x)=\operatorname{arccot}(x-a)+k$ modela el contorno de la plataforma continental en donde x está en Km. Un barco zarpa de la costa y después de transcurrido a Km, esta se encuentra a una altura de $\frac{\pi}{4}$ u con respecto a la plataforma. ¿A qué altura se encuentra el barco después de 1 Km?

A) π u

B) $\frac{\pi}{2}$ u

C) $\frac{2\pi}{3}$ u

D) $\frac{\pi}{3}$ u



<u>Solución</u>:

Tenemos

$f(a)=\operatorname{arccot}(0)+k \Rightarrow k=0$,

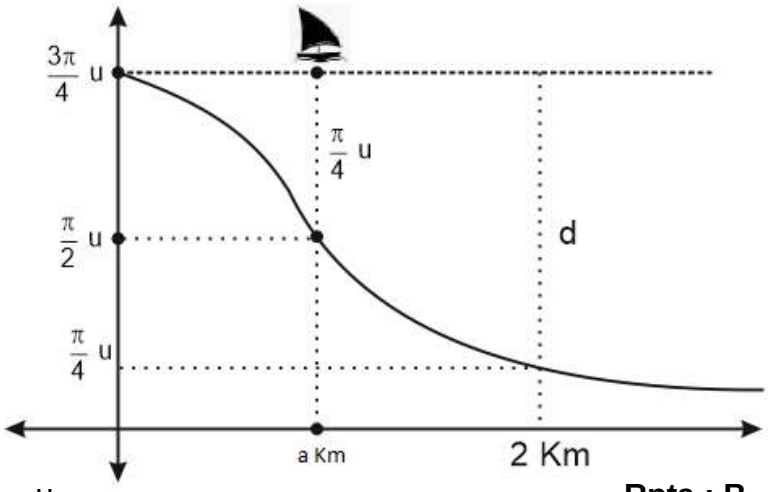
$f(0)=\operatorname{arccot}(-a) \Rightarrow a=1$

Entonces $f(x)=\operatorname{arccot}(x-1)$

Luego

$f(2)=\operatorname{arccot}(1) \Rightarrow f(2)=\frac{\pi}{4}$

Así:



$d=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ u

Rpta.: B

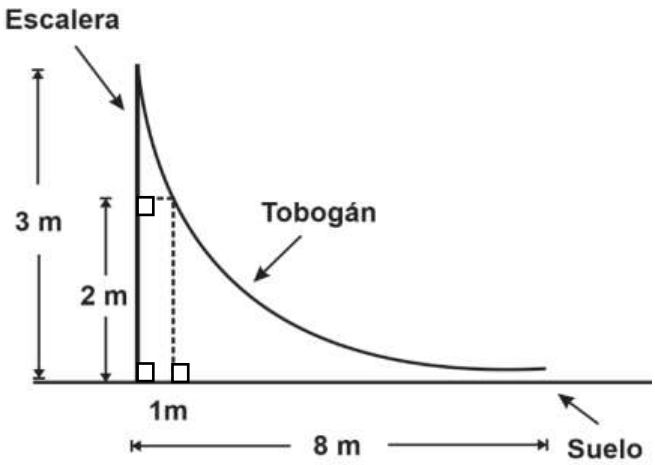
5. La figura representa el perfil de la estructura de un tobogán el cual es descrito por la función $f(x) = A\,\text{arc}\csc(Bx + C)$; donde A y B son constantes positivas. Si consideramos a la base de la escalera como el origen de coordenadas, determine la regla de correspondencia de la función que describe a la estructura del tobogán.

A) $y = \frac{6}{\pi}\,\text{arc}\csc\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{3}x + 1\right);\ 0 \le x \le 8$

B) $y = \frac{6}{\pi}\,\text{arc}\csc(x - 1);\ 0 \le x \le 8$

C) $y = \frac{6}{\pi}\,\text{arc}\csc\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{3}x - 1\right);\ 0 \le x \le 8$

D) $y = \frac{6}{\pi}\,\text{arc}\csc\left(\frac{2\sqrt{3}+3}{3}x + 1\right);\ 0 \le x \le 8$



<u>Solución</u>:

Sea $y = A\,\text{arc}\csc(Bx + C)$ la función buscada.

Como: $Bx + C \ge 1 \;\rightarrow\; x \ge \frac{1-C}{B} \;\rightarrow\; \frac{1-C}{B} = 0 \;\rightarrow\; C = 1$

Luego:

$$3 = A\,\text{arc}\csc(1) \;\rightarrow\; A = \frac{6}{\pi}$$

$$2 = \frac{6}{\pi}\,\text{arc}\csc(B+1) \;\rightarrow\; B + 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; B = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}.$$

La función buscada es $y = \frac{6}{\pi}\,\text{arc}\csc\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{3}x + 1\right);\ 0 \le x \le 8$.

Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Si $R = \text{ctg}\left(2\text{arctg}3 + \text{arcctg}\frac{2}{5}\right)$, halle $14R$.

A) 20 B) 21 C) 23
D)24 E) 25

Solución:

Considerando $\arctan 3 = \alpha$ y $\text{arccot}\frac{2}{5} = \beta \Rightarrow 3 = \tan\alpha$ y $\cot\beta = \frac{2}{5}$

$R = \text{ctg}(2\alpha + \beta)$,

Sea $M = \tan(2\alpha + \beta) = \dfrac{\tan 2\alpha + \tan\beta}{1 - \tan 2\alpha \tan\beta}$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{2(3)}{1-9} = -\dfrac{3}{4}$ y $\tan\beta = \dfrac{5}{2}$, reemplazando en M tenemos:

$M = \dfrac{14}{23} \to R = \dfrac{23}{14} \to 14R = 23$

Rpta.: C

2. Juan compró un automóvil en 12 000 soles y después de un año lo vendió en $(100a + 9800)$ soles. Si a está determinada por $\text{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = a.\text{arccot}\sqrt{3}$.

¿Cuánto perdió Juan en la venta mencionada?

A) 1500 soles B) 1600 soles C) 1900 soles
D) 1800 soles E) 2000 soles

Solución:

$\text{arccot}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = a.\text{arccot}\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{\pi}{3} = a.\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow a = 2$

Juan vendió su auto en $(100(2) + 9800)$ soles, es decir 10 000 soles.

Juan perdió 12 000 – 10 000 = 2000 soles.

Rpta.: E

3. Establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $\operatorname{arcctg} 0 = \operatorname{arcsen}(-1)$.

ii. $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall x \neq 0$.

iii. $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

A) VFV B) FVV C) FFV D) VFF E) FFF

Solución:

i. $\operatorname{arcctg} 0 = \operatorname{arcsen}(-1) \rightarrow \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ Falso.

ii. $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, si x>0 Falso.

iii. $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arcctg} 2 = \frac{\pi}{2}$ Verdadero.

Rpta.: C

4. Sea la función real F definida por

$$F(x) = \sqrt{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{3}\operatorname{arccos}\left(\frac{x}{3}\right) + \operatorname{tg} x$$

Halle el dominio de F.

$[-2,2]$ B) $[-3,3]$ C) $\langle -2,2\rangle$ D) $\langle -3,3\rangle$ E) $[-2,2]-\left\{\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right\}$

Solución:

De los dominios de arcoseno y arcocoseno tenemos que:
$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$ y $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1 \rightarrow -3 \leq x \leq 3$, además del tercer sumando $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto el dominio de F es $[-2,2]-\left\{\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right\}$.

Rpta.: E

5. Sea F es una función real definida por

$$F(x) = 2\operatorname{arcctg}(x+2) + \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right), \quad -2 \leq x \leq -1$$

Halle la suma de los números enteros que pertenecen al rango de F.

A) 6 B) 4 C) 5 D) 3 E) 7

Solución:

Por dato,

$-2 \le x \le -1 \Rightarrow 0 \le x+2 < 1 \Rightarrow \operatorname{arccot}(0) \ge \operatorname{arccot}(x+2) > \operatorname{arccot}(1)$

$\frac{\pi}{2} \ge \operatorname{arccot}(x+2) > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\operatorname{arccot}(x+2) \le \pi$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} < 2\operatorname{arccot}(x+2) + \frac{\pi}{12} \le \pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{7\pi}{12} < y \le \frac{13\pi}{12} \to 1{,}83 < y \le 3{,}40$

Con $\pi = 3{,}14$ aprox.

Luego 2 y 3 están en el rango de F. $\sum: 2+3=5$.

Rpta.: C

6. En lo que sigue F representa a la función real definida por $F(x) = 5\arctan 2x + \operatorname{arccot} 2x$. Si $\langle a,b \rangle$ es el rango de F, halle $\frac{b}{a}$.

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $-\frac{5}{2}$ D) 2 E) $-\frac{5}{3}$

Solución:

$F(x) = 4\arctan 2x + (\arctan 2x + \operatorname{arccot} 2x)$

$F(x) = 4\arctan 2x + \frac{\pi}{2}$

Sabemos que $-\frac{\pi}{2} < \arctan 2x < \frac{\pi}{2}$, entonces $-2\pi < 4\arctan 2x < 2\pi$, luego

$-2\pi + \frac{\pi}{2} < 4\arctan 2x + \frac{\pi}{2} < 2\pi + \frac{\pi}{2} \to -\frac{3\pi}{2} < y < \frac{5\pi}{2}$

Por lo tanto $\frac{b}{a} = \frac{\frac{5\pi}{2}}{-\frac{3\pi}{2}} = -\frac{5}{3}$.

Rpta.: E

7. Luis es un empleado público cuyo sueldo mensual es de (1000x) soles, él recibe al año tres gratificaciones de (150x) soles en cada una de ellas. Si x es la raíz de la ecuación $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (\operatorname{arcsec} 2).x$ ¿cuánto dinero recibe al año Luis?

A) 25 000 soles B) 26 000 soles C) 25 900 soles
D) 26 900 soles E) 24 900 soles

Solución:

$$\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\text{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=(\text{arcsec}\,2).x$$

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}x\Rightarrow 2=x$$

Sueldo mensual: (1000x2) = 2000 soles.
Sueldo anual: 24 000 soles.
Gratificación: 900 soles.
Ingreso anual: 24 000 + 900 = 24 900 soles.

Rpta.: E

8. Calcule el valor de la expresion:

$$\cos\left(\text{arcsec}\left[(-1)^{n}.2\right]+\text{arcsec}\left[(-1)^{n+1}.2\right]-\arccos\left(\frac{2}{9}\right)\right),\ n\in\mathbb{Z}.$$

A) $-\frac{5}{9}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $-\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $-\frac{1}{9}$

Solución:

i) Si n es impar:

$$\text{arcsec}\left[(-1)^{n+1}.2\right]+\text{arcsec}\left[(-1)^{n}2\right]=\text{arcsec}[2]+\text{arcsec}[-2]=\pi$$

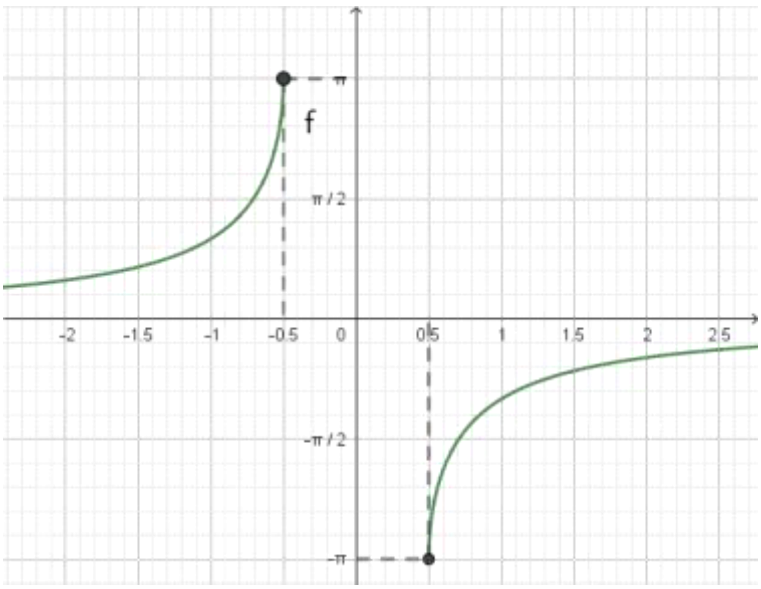
ii) Si n es par:

$$\text{arcsec}\left[(-1)^{n+1}.2\right]+\text{arcsec}\left[(-1)^{n}2\right]=\text{arcsec}[-2]+\text{arcsec}[2]=\pi$$

Entonces $\cos\left(\pi-\arccos\left(\frac{2}{9}\right)\right)=-\cos\left(\arccos\left(\frac{2}{9}\right)\right)=-\frac{2}{9}$

Rpta.: C

9. En la figura se muestra la grafica de la función $f(x) = A\operatorname{arcsc}(kx)$. Si $A > 0$, calcule $\arccos\left(\frac{k}{A}\right)$.



A) π B) $\frac{\pi}{2}$

C) 0 D) $\frac{\pi}{3}$

E) $\frac{\pi}{6}$

Solución:

$f(x) = A\operatorname{arcsc}(kx)$

$\text{Dom}(f): (kx \le -1 \vee 1 \le kx) \Rightarrow k = -2 \text{ v } k = 2$

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\pi$ y $A > 0$ entonces $k = -2$ y $A = 2$

Rpta.: A

10. Si $\theta = \operatorname{arccsc}\left(\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{2\text{tg}\alpha}\right)$ y $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, calcule $\text{sen}\theta$.

A) $\frac{\sqrt{6}}{7}$ B) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ C) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ D) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{14}$

Solución:

Como $\text{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$ y $\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{2\text{tg}\alpha} = \csc 2\alpha$ entonces $\theta = 2\alpha$

Luego, $\text{sen}\theta = \text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha = 2\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

Rpta.:B

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $A = \text{arc ctg}\left(2-\sqrt{3}\right)+\text{arc ctg}\left(1+\sqrt{2}\right)$, calcule $\cos\left(\frac{6A}{13}\right)$.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

Como $\text{ctg}\frac{5\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ y $\text{ctg}\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$ entonces

$$\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{8}=\text{arc ctg}\left(2-\sqrt{3}\right)+\text{arc ctg}\left(1+\sqrt{2}\right)=A$$

$$\cos\left(\frac{6A}{13}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rpta.: A

2. Sea la función real f definida por $f(x)=\text{arccsc}(4-x)-\text{arc sec}(2x+1)$. Determine $\text{Dom}(f)\cap[0;4]$.

A) $[-1;1]$ B) $[0;1]$ C) $[0;4]$ D) $[0;2]$ E) $[0;3]$

Solución:

$$(4-x\le -1\vee 1\le 4-x)\wedge(2x+1\le -1\vee 1\le 2x+1)$$
$$(-x\le -5\vee -3\le -x)\wedge(2x\le -2\vee 0\le 2x)$$
$$(x\ge 5\vee x\le 3)\wedge(x\le -1\vee 0\le x)$$

Entonces $\text{Dom}(f)=\langle -\infty;-1]\cup[0;3]\cup[5;+\infty\rangle \Rightarrow \text{Dom}(f)\cap[0;4]=[0;3]$

Rpta.: E

3. Si F es una función real definida por $F(x)=\frac{2}{\pi}\text{arc csc}(|x|)+2$, halle el rango de F.

A) $[2,4\rangle$ B) $[0,3]$ C) $\langle 2;3]$ D) $[2,4]-\{3\}$ E) $[0,4]-\{3\}$

Solución:

Como $F(x)=\frac{2}{\pi}\text{arc csc}(|x|)+2$ entonces

$$1\le |x| \Rightarrow 0<\text{arc csc}(|x|)\le \frac{\pi}{2}$$

$$0 < 2\operatorname{arccsc}(|x|) \leq \pi \Rightarrow 2 < \frac{2}{\pi}\operatorname{arccsc}(|x|) + 2 \leq 3$$

Rpta.: C

4. Halle la suma de las soluciones de la ecuación

$$\pi \csc x - 12 \operatorname{arcctg}\left(2-\sqrt{3}\right) = 0, 0 < x < \pi$$

A) 2π B) $\frac{4\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) $\frac{3\pi}{2}$

<u>Solución</u>:

$$\pi \csc x - 12 \operatorname{arcctg}\left(2-\sqrt{3}\right) = 0, 0 < x < \pi$$

$$\pi \csc x = 12\left(\frac{5\pi}{12}\right), 0 < x < \pi$$

$$\csc x = 5, 0 < x < \pi \Rightarrow \Sigma = \pi$$

Rpta.: D

5. Halle el valor minino de la función real F definida por $F(x) = \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arcctg}\left(1+\sqrt{2}\right)$, $1 \leq x < \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{16}$ D) $\frac{5\pi}{16}$ E) $\frac{5\pi}{8}$

<u>Solución</u>:

Como $F(x) = \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arcctg}\left(1+\sqrt{2}\right)$ y $\operatorname{arcctg}\left(1+\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{8}$, entonces

$$\frac{\pi}{8} \leq \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arcctg}\left(1+\sqrt{2}\right) < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{8}$$

Luego el valor minino de F es $\frac{\pi}{8}$.

Rpta.: A

Trigonometría

EJERCICIOS

1. Evaluar la expresión trigonométrica $\sqrt{2}\sec(\operatorname{arctg}7)$.

A) 3 B) 2 C) 5 D) 10 E) $5\sqrt{2}$

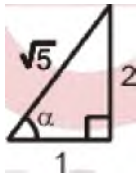
Solución:
Sea E el número buscado, luego
$E=\sqrt{2}\sec(\operatorname{arctg}7)$
Como $\operatorname{ctg}\alpha=2$ entonces $\operatorname{tg}\theta=7$
$E=\sqrt{2}\sec(\theta)=\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}\right)=10$

Rpta.: D

2. Si $E=\cos(2.\operatorname{arctg}2)+\operatorname{sen}(2.\operatorname{arcctg}2)$, halle el valor de $5E$.

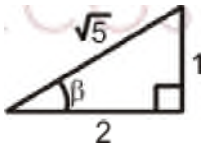
A) 0,9 B) 1,2 C) 0,8 D) 1,5 E) 1

Solución:
i) En el primer sumando de E hagamos:
$\operatorname{arctg}2=\alpha$, entonces, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)=\operatorname{tg}\alpha\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=2$



$$\cos(2\operatorname{arctg}2)=\cos 2\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\alpha=1-2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{3}{5}$$

En el segundo sumando de E, consideremos:



$$\operatorname{arcctg}2=\beta\Rightarrow\operatorname{ctg}(\operatorname{arccot}2)=\operatorname{ctg}\beta\Rightarrow\operatorname{ctg}\beta=2$$

$$\Rightarrow\operatorname{sen}(2\operatorname{arcctg}2)=\operatorname{sen}2\beta=2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{5}$$

Finalmente $E=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5E=1$

Rpta.: E

3. Halle el mayor entero que pertenece al dominio de la función real f definida por
$f(x)=\operatorname{arcsec}(4x+7)\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+2}{4}\right)$.

A) 4 B) 0 C) 6 D) 1 E) 2

Solución:

f está definida, si $(4x+7\le -1 \vee 4x+7\ge 1)\wedge -1\le \frac{x+2}{4}\le 1$

$\left(x\le -2 \vee x\ge -\frac{3}{2}\right)\wedge(-6\le x\le 2)$

$\therefore \text{Dom}(f)=[-6,-2]\cup\left[-\frac{3}{2},2\right]$

Rpta.: E

4. Sea la función f definida por $f(x)=\text{arcctg}(x^2+6x)+\text{arcsec}\left(\frac{1}{x+3}\right)$. Determine el número de elementos del conjunto $A=\{a\in\mathbb{Z}/a\in \text{Dom}f\}$.

A) 0 B) 4 C) 3 D) 1 E) 2

Solución:

$x\in \text{Dom}(f)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x+3}\le -1\vee \frac{1}{x+3}\ge 1\right)\wedge x\ne -3$

$\Leftrightarrow(-4\le x\le -2)\wedge x\ne -3$

$\therefore \text{Dom}(f)=[-4,-2]-\{-3\}$

Los enteros que pertenecen al dominio de f son -4 y -2

Rpta.: E

5. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i. $\text{arcsec}(\pi-4)=\pi-\text{arcsec}(4)$.

ii. Existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $\text{arcsec}\,x+\text{arccsc}(-x)=\pi$.

iii. El valor de $\text{arcctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ es $\frac{\pi}{2}$.

A) VVV B) VFF C) FVF D) FFF E) FVV

Solución:

i. $\text{arcsec}(\pi-4)=\pi-\text{arcsec}(4-\pi)$ (F)

ii. Si $x=-\sqrt{2}$, tenemos $\text{arcsec}\,x+\text{arccsc}(-x)=\pi$ (V)

iii. $\text{arcctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{2}\ne 0$ (F)

$\therefore$ La respuesta es FVF

Rpta.: C

6. Si $\operatorname{arcsec}\frac{\sqrt{x+9}}{x}=\operatorname{arctg}\frac{3}{x}$, evaluar $\operatorname{tg}(x\pi)$.

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) –1 E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Solución:

$$\operatorname{arcsec}\frac{\sqrt{x+9}}{x}=\operatorname{arctg}\frac{3}{x}$$

Sea $\operatorname{arcsec}\frac{\sqrt{x+9}}{x}=\operatorname{arctg}\frac{3}{x}=\theta$

$$\frac{3}{x}=\operatorname{tg}\theta\wedge\sec\theta=\frac{\sqrt{x+9}}{x}$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{3}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}=\sec\theta=\frac{\sqrt{x+9}}{x}$$

Entonces $\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{x+9}}{x}\Rightarrow 9+x^2=x+9\Rightarrow x=0\vee x=1$

Entonces $\operatorname{tg}(x\pi)=\operatorname{tg}(\pi)=0$

Rpta.: A

7. Sea f la función real definida por $f(x)=\pi-\operatorname{arcsec}\left(\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right)$. Halle el rango de la función f.

A) $\left\langle-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ B) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ C) $\left\langle\frac{\pi}{2},\pi\right]$ D) $\left\langle\frac{\pi}{2},\pi\right\rangle$ E) $\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

Solución:

$$\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}=\frac{2}{1-\cos^2 x}-1$$

$$0\le\cos^2 x\le 1\to 0\le 1-\cos^2 x\le 1$$

$$\to 1\le\frac{1}{1-\cos^2 x}\to 1\le\frac{2}{1-\cos^2 x}-1$$

$$\to 0\le\operatorname{arcsec}\left(\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right)<\frac{\pi}{2}$$

$$\to\pi\ge\pi-\operatorname{arcsec}\left(\frac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\right)>\frac{\pi}{2}$$

Entonces el rango de la función es $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right]$

Rpta.: C

8. En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x) = 2\operatorname{arcsec}(kx) - A$, $k > 0$. Calcule Ak.

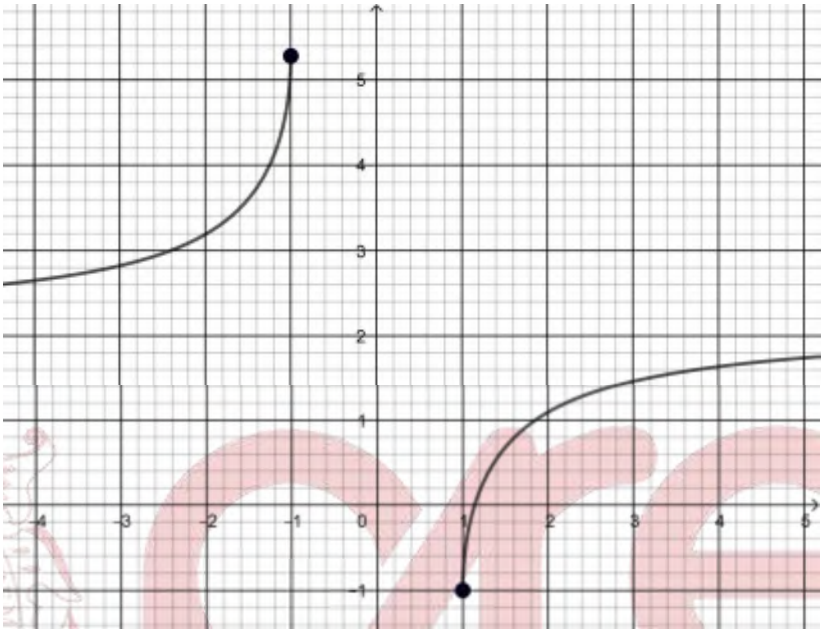
A) 1

B) 2

C) $\sqrt{2}$

D) –1

E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$



Solución:

$f(x) = \operatorname{arcsec}(kx) - A$

$\operatorname{Dom}(f): (kx \leq -1 \vee 1 \leq kx) \Rightarrow k = 1$

$\operatorname{Dom}(f) = \left\langle -\infty, -\frac{1}{k} \right] \cup \left[\frac{1}{k}, +\infty \right\rangle$

Como $f(1) = -1$ entonces $\operatorname{arcsec}(1) - A = -1 \Rightarrow A = 1$

Rpta.: A

9. Si el conjunto solución de la ecuación trigonométrica $\cos x = 0{,}4$ es $\{x \in \mathbb{R} / x = 2n\pi \pm \operatorname{arccsc}(a) \wedge n \in \mathbb{Z}\}$. Halle $\operatorname{tg}(\sqrt{21}\, a\pi)$.

A) $2 - \sqrt{3}$ B) 0 C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) $2 + \sqrt{3}$

Solución:

Como $\cos x = 0{,}4$ entonces el conjunto solución es

$$\left\{ 2n\pi \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right); n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ 2n\pi \pm \operatorname{arcsec}\left(\frac{5}{2}\right); n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$=\left\{2n\pi \pm \operatorname{arc}\sec\left(\frac{5}{2}\right);n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{2n\pi \pm \operatorname{arc}\csc\left(\frac{5}{\sqrt{21}}\right);n\in\mathbb{Z}\right\}$$

Entonces $a=\frac{5}{\sqrt{21}}\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\sqrt{21}\,a\pi\right)=\operatorname{tg}(5\pi)=0$

Rpta.: B

10. Dos lados de un triángulo T miden $-3\cos(2\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\operatorname{arccsc}2)$ unidades y $\frac{15}{2}\tan(2\operatorname{arcctg}4)$ unidades. Si el ángulo formado por los lados mencionados mide 30°, halle el área de la región limitada por T.

A) $5m^2$ B) $4\ m^2$ C) $8\ m^2$ D) $6\ m^2$ E) $3\ m^2$

<u>Solución</u>:

$$-3\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{6}\right)=-3\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=-3\cos\pi=3$$

Cálculo de $\operatorname{tg}(2\operatorname{arcctg}(4))$:

Hagamos $\operatorname{arcctg}4=\alpha\rightarrow 4=\operatorname{ctg}\alpha\rightarrow\frac{1}{4}=\operatorname{tg}\alpha$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\left(\frac{1}{4}\right)}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{8}{15}$$; luego,

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arccot}4)=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{8}{15}\rightarrow\frac{15}{2}\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}4)=\frac{15}{2}.\frac{8}{15}=4$$

Finalmente,

Área $T=\frac{1}{2}.3.4.\operatorname{sen}30^\circ=\frac{1}{2}.3.4.\frac{1}{2}=3$.

Rpta.: E

<u>EJERCICIOS PROPUESTOS</u>

1. Si $E=\operatorname{arctg}(-3)+\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arcctg}(-6)$, halle $8.\operatorname{tg}E$.

A) 10 B) 12 C) 11 D) 13 E) 14

Solución:

$$E = \text{arctg}(-3) + \text{arctg}(-1) + \pi + \text{arctg}\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$P = \text{arctg}(-3) + \text{arctg}(-1)$$

Cálculo de $P = \text{arctg}\left[\frac{(-3)+(-1)}{1-(-3)(-1)}\right] - \pi$

$$P = \text{arctg}\left(\frac{-4}{-2}\right) - \pi \Rightarrow P = \text{arctg}(2) - \pi \quad ...(ii)$$

Llevando (ii) en (i):

$$E = \text{arctg}\,2 - \pi + \pi + \text{arctg}\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$E = \text{arctg}\,2 + \text{arctg}\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$E = \text{arctg}\left[\frac{2+\left(-\frac{1}{6}\right)}{1-2\left(-\frac{1}{6}\right)}\right] = \text{arctg}\left(\frac{11/6}{8/6}\right) = \text{arctg}\left(\frac{11}{8}\right)$$

$$\text{tg}E = \text{tg}\left[\text{arctg}\left(\frac{11}{8}\right)\right] = \frac{11}{8} \Rightarrow 8\,\text{tg}E = 11\ .$$

Rpta.: C

2. Si F es una función real definida por $F(x) = 3\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}+1\right) + \frac{5\,\text{ctg}\,x}{8\,\text{arcctg}(x-1)}$, halle el dominio de F.

A) $[-4,0\rangle$ B) $[-4,0]$ C) $[-4,0\rangle - \{-\pi\}$

D) $[-4,0] - \{-\pi\}$ E) $[-6,0] - \{-\pi, -2\pi\}$

Solución:

$$x \in \text{Dom}(f) \rightarrow -1 \le \frac{x}{2} + 1 \le 1 \ \wedge\ \text{sen}x \ne 0$$

$$-2 \le x + 2 \le 2 \rightarrow -4 \le x \le 0 \ \wedge\ \text{sen}x \ne 0$$

$$x \ne \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0, \quad x \ne 0$$

$$k = 1, \quad x \ne \pi$$

$$k = -1, \quad x \ne -\pi$$

$$\text{Dom}(F) = [-4,0] - \{-\pi\}$$

Rpta.: C

3. Si $E = \text{arctg}\left(\dfrac{1}{\csc\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-2}\right) + \text{tg}(\text{arcctg}2)$, halle 4E.

A) $2-2\pi$ B) $2+\pi$ C) $2-\pi$ D) $2+2\pi$ E) 3π

Solución:

i) $\tan(\text{arcctg}2) = \dfrac{1}{\cot(\text{arcctg}2)} = \dfrac{1}{2}$

ii) $\arctan\left(\dfrac{1}{\csc\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-2}\right) = \text{arctg}\left(\dfrac{1}{1-2}\right) = \text{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

$E = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-\pi}{4} \Rightarrow 4E = 2-\pi$

Rpta.: C

4. Resolver la siguiente ecuación $3\text{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right) = 19x - 4\,\text{arcctg}\left(2+\sqrt{3}\right)$.

A) $\dfrac{\pi}{12}$ B) $\dfrac{5\pi}{12}$ C) $\dfrac{5\pi}{6}$ D) $\dfrac{\pi}{8}$ E) $\dfrac{\pi}{6}$

Solución:

$3\arctan(2+\sqrt{3}) + 3\,\text{arcctg}(2+\sqrt{3}) = 19x - \text{arcctg}(2+\sqrt{3})$

$3\left[\text{arctg}(2+\sqrt{3}) + \text{arcctg}(2+\sqrt{3})\right] = 19x - \text{arcctg}(2+\sqrt{3})$

$3\dfrac{\pi}{2} = 19x - \dfrac{\pi}{12} \Rightarrow \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12} = 19x \Rightarrow \dfrac{19\pi}{12} = 19x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12}$

Rpta.: A

5. Halle el valor máximo de la función real F definida por $F(x) = \text{arcctg}\,x + \text{arc}\sec 2$, $1 \le x < 2+\sqrt{3}$.

A) $\dfrac{7\pi}{12}$ B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) $\dfrac{5\pi}{2}$ D) $\dfrac{7\pi}{10}$ E) $\dfrac{7\pi}{9}$

Solución:

$F(x) = \operatorname{arccot} x + \frac{\pi}{3}$, teniendo presente que la función arcctg es decreciente en su dominio, podemos escribir:

$$\leq x < 2+\sqrt{3} \rightarrow \operatorname{arcctg}(1) \geq \operatorname{arcctg}(x) > \operatorname{arcctg}(2+\sqrt{3})$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} \geq \operatorname{arcctg} x + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}$$

$$\rightarrow \frac{7\pi}{12} \geq F(x) \geq \frac{5\pi}{12}$$

Luego el Máximo de F es: $\frac{7\pi}{12}$.

Rpta.: A